บทที่ 3
พีชคณิตบูลีน
(Boolean Algebra)

3.1 โอเปอเรชัน *(Operation)*

นิยาม

ให้ $Y \neq \Phi$ เป็นเซตใด ๆ , *n - ary operation* บนเซต Y หมายถึงฟังก์ชัน f ใด ๆ ซึ่งสำหรับแต่ละ *n - typles* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ที่ $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ สามารถกำหนดค่า $f\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ใน Y ได้

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.1

การบวกบนเซตจำนวนเต็มเป็นไบนารี โอเปอเรชัน *(binary - operation)*

การคูณบนเซตจำนวนเต็มเป็นไบนารี โอเปอเรชัน *(binary - operation)*

การลบบนเซตจำนวนเต็มเป็นไบนารี โอเปอเรชัน *(binary - operation)*

(ปกตินิยมใช้ "ไบนารีโอเปอเรชัน" แทนคำว่า *2 - ary operation)*

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.2

ฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) = x + 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม x เป็นซิงกูลารี โอเปอเรชัน *(singulary operation)* บนเซตจำนวนเต็ม (ปกตินิยมใช้ "ซิงกูลารีโอเปอเรชัน *(singulary operation)* แทน" 1 - ary operation)

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.3

การลบบนเซตจำนวนนับไม่เป็นไบนารี โอเปอเรชัน เพราะสำหรับ

$x, y \in N$

$x - y \notin N$ เสมอไป เช่น $2 - 5 = -3 \notin N$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.4

การหารบนเซตจำนวนตรรกยะไม่เป็นไบนารี โอเปอเรชันเพราะสำหรับ

$x, y \in Q$ ที่ $\frac{x}{y}$ จะมี กรณีที่ $y = 0$ ซึ่ง $\frac{x}{y} \notin Q$

3.2 *Axiom* ของพีชคณิตบูลีน

นิยาม

พีชคณิตบูลีน *(Boolean algebra)* คือเซต $B \neq \Phi$ กับไบนารีโอเปอเรชัน $\wedge$ และ $\vee$ กับ ซิงกูลารีโอเปอเรชัน $'$ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1) กฎการสลับที่ *(Commutative law)*

$$x \wedge y = y \wedge x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

$\forall x, y \in B$

2) กฎการจัดหมู่ *(Associative law)*

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$\forall x, y \in B$

3) กฎการกระจาย *(Distributive law)*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$\forall x, y, z \in B$

4) B ต้องมีสมาชิก 0 และ 1 ที่มีคุณสมบัติ

$$x \wedge 0 = 0$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 1 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge x' = 0$$

$x \vee x' = 1$

$\forall x \in B$

5) $0 \neq 1$

ใช้สัญลักษณ์ $\beta = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2.1

$(\{\Phi, \{\Phi\}\}, \cap, \cup, \sim, \Phi, \{\Phi\})$ เป็นพีชคณิตบูลีน

พิจารณาในที่นี้

$B = \{\Phi\ \{\Phi\}\}$

$\wedge = \cap =$ ผลร่วมของเซต

$\vee = \cup =$ ผลรวมของเซต

$' = \sim =$ *complement*

$0 = \Phi$

$1 = \{\Phi\}$

จากบทที่ 2 จะพบว่า $(B, \cap, \cup, \sim, \Phi, \{\Phi\})$ สอดคล้องคุณสมบัติ

$1 - 5$ ของพีชคณิตบูลีน

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2.2

$(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, \sim, \Phi, A)$ เป็นพีชคณิตบูลีนโดยที่

$B = \mathcal{P}(A)$ (เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A)

$\wedge = \cap$

$\vee = \cup$

$' = \sim$

$0 = \Phi$

$1 = A$

นิยาม

สำหรับ $x, y \in B$

$x \wedge y$ เรียกว่า x มีท y *(x meet y)*

$x \vee y$ เรียกว่า x จอย y *(x join y)*

x' เรียกว่า คอมพลีเมนต์ของ x *(complement of x)*

0 เรียกว่า ซีโรอีลีเมนต์ *(zero element)*

1 เรียกว่า ยูนิตอีลีเมนต์ *(unit element)*

<u>ทฤษฎี</u> 3.1 *Uniquiness of the Complement*

> สำหรับ $x, y \in B$ ถ้า $x \vee y = 1$ และ $x \wedge y = 0$
> แล้ว $y = x'$

พิสูจน์

ตอนที่ 1

$$\begin{aligned}
y &= y \vee 0 \\
&= y \vee (x \wedge x') \\
&= (y \vee x) \wedge (y \vee x') \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee x') \\
&= 1 \wedge (y \vee x') \\
&= (y \vee x') \wedge 1 \\
&= y \vee x'
\end{aligned}$$

ตอนที่ 2

$$
\begin{aligned}
x' &= x' \vee 0 \\
&= x' \vee (x \wedge y) \\
&= (x' \vee x) \wedge (x' \vee y) \\
&= (x \vee x') \wedge (x' \vee y) \\
&= 1 \wedge (x' \vee y) \\
&= (x' \vee y) \wedge 1 \\
&= x' \vee y \\
&= y \vee x' \\
&= y \qquad \text{(จากตอนที่ 1)}
\end{aligned}
$$

ช.ต.พ.

<u>ทฤษฎี</u> 3.2

สำหรับ $z \in B$, $(z')' = z$

พิสูจน์

ตอนที่ 1

$$
\begin{aligned}
z' \vee z &= z \vee z' \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ตอนที่ 2

$$
\begin{aligned}
z' \wedge z &= z \wedge z' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

โดยทฤษฎี 3.1 ได้ว่า

$$z = (z')'$$

ช.ต.พ.

หมายเหตุ สัญญลักษณ์ $(z')' = z''$

$((z')')' = z'''$

ฯลฯ

<u>ทฤษฎี</u> 3.3

Idempotence

สำหรับ x ใด ๆ ใน β
1. $x \wedge x = x$
2. $x \vee x = x$

<u>พิสูจน์</u> 1) $x \wedge x = x$

$$\begin{aligned} \because x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (x \vee x') \\ &= (x \wedge x) \vee (x \wedge x') \\ &= (x \wedge x) \vee 0 \\ &= x \wedge x \end{aligned}$$

2) $x \vee x = x$

$$\begin{aligned} \because x &= x \vee 0 \\ &= x \vee (x \wedge x') \\ &= (x \vee x) \wedge (x \vee x') \\ &= (x \vee x) \wedge 1 \\ &= (x \vee x) \end{aligned}$$

<u>ซ.ต.พ.</u>

นิยาม

> ดูอัล *(Dual)* ของประพจน์ในทางพีชคณิตบูลีน B คือประพจน์ที่ได้จากการเปลี่ยนสลับ $\vee$ กับ $\wedge$ และ 0 กับ 1

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2.3

ดูอัลของ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ คือ

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2.4

ดูอัลของ $x \vee x' = 1$ คือ

$$x \wedge x' = 0$$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าประพจน์ P เป็นดูอัลของประพจน์ Q แล้วประพจน์ Q จะเป็นดูอัลของประพจน์ P

<u>ทฤษฎี</u> 3.4

Dual Principle

> ถ้าประพจน์ A สอดคล้อง *axiom* ทั้ง 5 ข้อของพีชคณิตบูลีนแล้ว ดูอัลของ A จะสอดคล้อง *axiom* ทั้ง 5 ของพีชคณิตบูลีน เช่นเดียวกัน

<u>ทฤษฎี</u> 3.5

สำหรับ $x, y, z \in B$

1. $x \wedge 0 = 0$
2. $x \vee 1 = 1$

3. $x \wedge (x \vee y) = x$
4. $x \vee (x \wedge y) = x$

$\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{array}\right\}$ *Absorption Laws*

5. $(y \wedge x = z \wedge x \ \& \ y \wedge x' = z \wedge x') \rightarrow y = z$

6. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
7. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$\left.\begin{array}{l} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{array}\right\}$ *Associative Laws*

8. $(x \vee y)' = x' \wedge y'$
9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$
10. $x \vee y = (x' \wedge y')'$
11. $x \wedge y = (x' \vee y')'$
12. $x \wedge y' = 0 \longleftrightarrow x \wedge y = x$
13. $0' = 1$
14. $1' = 0$
15. $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$
16. $x \vee (x' \wedge y) = x \vee y$

<u>พิสูจน์</u>

ข้อ 1 $x \wedge 0 = 0$

$$\begin{aligned} \because x \wedge 0 &= (x \wedge 0) \vee 0 \\ &= (x \wedge 0) \vee (x \wedge x') \\ &= (x \wedge x') \vee (x \wedge 0) \\ &= x \wedge (x' \vee 0) \\ &= x \wedge x' \\ &= 0 \end{aligned}$$

ข้อ 2 $(x \vee 1 = 1)$ เป็นดูอัลของข้อ 1 $(x \wedge 0 = 0)$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 3 $x \wedge (x \vee y) = x$

$$\begin{aligned} \because x \wedge (x \vee y) &= (x \vee 0) \wedge (x \vee y) \\ &= x \vee (0 \wedge y) \\ &= x \vee 0 \\ &= x \end{aligned}$$

ข้อ 4 $(x \vee (x \wedge y) = x)$ เป็นดูอัลของ ข้อ 3

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 5 $(y \wedge x = z \wedge x \ \& \ y \wedge x' = z \wedge x') \rightarrow y = z$

สมมติ $y \wedge x = z \wedge x \ \& \ y \wedge x' = z \wedge x'$

$$\begin{aligned} y &= y \wedge 1 \\ &= y \wedge (x \vee x') \\ &= (y \wedge x) \vee (y \wedge x') \\ &= (z \wedge x) \vee (z \wedge x') \\ &= z \wedge (x \vee x') \\ &= z \wedge 1 \\ &= z \end{aligned}$$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 6 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

ในการพิสูจน์คุณสมบัติข้อ 6 เราจะใช้คุณสมบัติข้อ 5 โดยแทนค่า y ด้วย $x \vee (y \vee z)$ และแทนค่า z ด้วย $(x \vee y) \vee z$ ดังนั้นโดยคุณสมบัติของข้อ 5 เหลือแต่เพียงจะต้องแสดงให้ได้ว่า

ก. $(x \vee (y \vee z)) \wedge x = ((x \vee y) \vee z) \wedge x$

และ ข. $(x \vee (y \vee z)) \wedge x' = ((x \vee y) \vee z) \wedge x'$

ก. $\because\ (x \vee (y \vee z)) \wedge x = x \wedge (x \vee (y \vee z))$

$= x$

และ $((x \vee y) \vee z) \wedge x = x \wedge ((x \vee y) \vee z)$

$= (x \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge z)$

$= x \vee (x \wedge z)$ โดยข้อ 3

$= x$ โดยข้อ 4

ดังนั้น $(x \vee (y \vee z)) \wedge x = ((x \vee y) \vee z) \wedge x$

ข. $(x \vee (y \vee z)) \wedge x' = x' \wedge (x \vee (y \vee z))$

$= (x' \wedge x) \vee (x' \wedge (y \vee z))$

$= 0 \vee (x' \wedge (y \vee z))$

$= x' \wedge (y \vee z)$

และ $((x \vee y) \vee z) \wedge x' = x' \wedge ((x \vee y) \vee z)$

$= (x' \wedge (x \vee y)) \vee (x' \wedge z)$

$= ((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y)) \vee (x' \wedge z)$

$= (0 \vee (x' \wedge y)) \vee (x' \wedge z)$

$= (x' \wedge y) \vee (x' \wedge z)$

$= x' \wedge (y \vee z)$

จาก ก. และ ข. โดยคุณสมบัติข้อ 5 จะได้ว่า

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

ข้อ 7 $(x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z)$ เป็นคู่ฮัลของข้อ 6

$(x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$

<u>**พิสูจน์**</u> ข้อ 8 $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

ในการพิสูจน์ $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ เราใช้ทฤษฎี 3.1 โดย จะต้องแสดงว่า

ก. $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = 0$

ข. $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1$

ก. $\because (x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = (x' \wedge y') \wedge (x \vee y)$

$$
\begin{aligned}
&= ((x' \wedge y') \wedge x) \vee ((x' \wedge y') \wedge y) \\
&= (x \wedge (x' \wedge y')) \vee (x' \wedge (y' \wedge y)) \\
&= ((x \wedge x') \wedge y') \vee (x' \wedge (y' \wedge y')) \\
&= (0 \wedge y') \vee (x' \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ข. $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = ((x \vee y) \vee x') \wedge ((x \vee y) \vee y')$

$$
\begin{aligned}
&= (x' \vee (x \vee y)) \wedge ((x \vee y) \vee y') \\
&= ((x' \vee x) \vee y) \wedge (x \vee (y \vee y')) \\
&= ((x \vee x') \vee y) \wedge (x \vee 1) \\
&= (1 \vee y) \wedge 1 \\
&= 1 \vee y \\
&= y \vee 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

จาก ก. และ ข. โดยทฤษฎี 3.1 ได้ว่า

$(x \vee y)' = x' \wedge y'$

ข้อ 9 $((x \wedge y)' = x' \vee y')$ เป็นดูอัลของ ข้อ 8

$((x \vee y)' = x' \wedge y')$

พิสูจน์ ข้อ 10 $x \vee y = (x' \wedge y')'$

จากข้อ 8 เราได้แล้วว่า

$(x \vee y)' = x' \wedge y'$

โดยทฤษฎี 3.2

$(x \vee y)'' = (x' \wedge y')'$

แต่ $(x \vee y)'' = x \vee y$

$(x' \wedge y')' = x \vee y$

ข้อ 11 $(x \wedge y) = (x' \vee y')')$ เป็นดูอัลของข้อ 8

$(x \vee y = (x' \wedge y')')$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ 12 $x \wedge y' = 0 \longleftrightarrow x \wedge y = x$

$\Longrightarrow$ สมมติ $x \wedge y' = 0$

$$
\begin{aligned}
\because x &= x \wedge 1 \\
&= x \wedge (y \vee y') \\
&= (x \wedge y) \vee (x \wedge y')
\end{aligned}
$$

แต่ $x \wedge y' = 0$

$x = x \wedge y$

$\Longleftarrow$ สมมติ $x \wedge y = x$

$$
\begin{aligned}
\because x \wedge y' &= 0 \vee (x \wedge y') \\
&= (x \wedge x') \vee (x \wedge y') \\
&= x \wedge (x' \vee y') \\
&= x \wedge (x \wedge y)'
\end{aligned}
$$

แต่ $x \wedge y = x$

$$
\begin{aligned}
\therefore x \wedge y' &= x \wedge x' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

พิสูจน์ ข้อ 13 $0' = 1$

$\because 0 \vee 1 = 1$

$\because 0 \wedge 1 = 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 3.1 ได้ว่า

$0' = 1$

ข้อ 14 $(1' = 0)$ เป็นดูอัลของ ข้อ 13 $(0' = 1)$

พิสูจน์ ข้อ 15 $x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y$

$\because x \wedge (x' \vee y) = (x \wedge x') \vee (x \wedge y)$

$= 0 \vee (x \wedge y)$

$= x \wedge y$

ข้อ 16 $(x \vee (x' \wedge y) = x \vee y)$ เป็นดูอัลของข้อ 15

$(x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y)$

ซ.ต.พ.

3.3 สับพีชคณิต *(Subalgebras)*

พีชคณิตบูลีน $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ มี ซีโรอีลีเมนต์ 0 เพียงตัวเดียว *(unique)* และมียูนิตอีลีเมนต์ 1 เพียงตัวเดียว *(Unique)* เช่นเดียวกันเพราะถ้าสมมติว่า z เป็นซีโรอีลีเมนต์อีกตัวของพีชคณิตบูลีนนี้ โดยทั่วไปจะต้องได้ว่า

$x = x \vee z \qquad \forall x \in B \qquad .....(1)$

ดังนั้น (1) จะต้องจริง เมื่อ $x = 0$ ด้วย

$\therefore 0 = 0 \vee z$

แต่ $0 \vee z = z \vee 0 = z$

$\therefore z = 0$

ในทำนองเดียวกัน

ถ้าสมมติว่า u เป็นยูนิตอีลีเมนต์อีกตัวของพีชคณิตบูลีนนี้แล้ว

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \wedge u \\
&= u \wedge 1 \\
&= u
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าพีชคณิตบูลีน $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ มี ซีโรอีลีเมนต์ 0 และยูนิตอีลีเมนต์ 1 ได้เพียงตัวเดียว

สับเซท $\{0, 1\}$ ของ $\{B, \wedge, \vee, ', 0, 1\}$ close ภายใต้โอเปอเรชัน $\wedge, \vee, '$ เพราะ

$$
\begin{aligned}
0 \vee 1 &= 1 = 1 \vee 0 \\
1 \vee 1 &= 1 \\
0 \vee 0 &= 0
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
0 \wedge 1 &= 0 = 1 \wedge 0 \\
1 \wedge 1 &= 1 \\
0 \wedge 0 &= 0
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
0' &= 1 \\
1' &\quad 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้นถ้าให้ $\wedge_{\{0,1\}}$, $\vee_{\{0,1\}}$, $'_{\{0,1\}}$ เป็นสัญลักษณ์แทนโอเปอเรชัน $\wedge, \vee, '$ ของเซท $\{0, 1\}$ แล้ว

$$\beta^* = (\{0,1\}, \wedge_{\{0,1\}}, \vee_{\{0,1\}}, '_{\{0,1\}}, 0, 1\}$$

จะเป็นพีชคณิตบูลีนด้วย

ขอให้สังเกตว่า เราได้สำรวจกันแล้วว่า $\{0, 1\}$ *close* ภายใต้โอเปอเรชัน $\wedge$, $\vee$, $/$ ดังนั้นจึงง่ายที่จะตรวจสอบว่าโอเปอเรชันเหล่านี้สอดคล้อง *Axiom* ทั้ง 5 ข้อ ของพีชคณิตบูลีนโดยอัตโนมัติ

โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า A เป็นสับเซทที่ไม่ใช่เซทเปล่าของเซท B และ *close* ภายใต้โอเปอเรชัน $\wedge, \vee, /$ แล้ว $(A, \wedge_A, \vee_A, /_A, 0, 1)$ จะเป็นพีชคณิตบูลีน โดยที่ $\wedge_A, \vee_A, /_A$ เป็นสัญลักษณ์แทนโอเปอเรชัน $\wedge, \vee, /$ ของ A

พิจารณา 0 และ 1 จะต้องเป็นสมาชิกของ A

เพราะ ถ้า $x \in A$ แล้ว $x' \in A$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$0 = x \wedge x' \in A$$

และ $$1 = x \vee x' \in A$$

นิยาม

> พีชคณิตบูลีน $(A, \wedge_A, \vee_A, /_A 0, 1)$ มีชื่อเรียกว่า สับพีชคณิตของ β เมื่อ $\Phi \neq A \subseteq B$ และ $(A, \wedge_A, \vee_A, /_A, 0, 1)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

ในการแสดงว่าสับเซท A และ B *close* ภายใต้โอเปอเรชัน เราเพียงแต่แสดงว่า A *close* ภายใต้ $\wedge$ และ $/$ หรือ $\vee$ และ $/$ คู่ใดคู่หนึ่งก็เพียงพอ เพราะถ้า A *close* ภายใต้ $\wedge$ และ $/$ แล้วสำหรับ x,y ใด ๆ ใน A $x \vee y = (x' \wedge y')' \in A$ และเช่นเดียวกัน ถ้า A *close* ภายใต้ $\vee$ และ $/$ แล้วสำหรับ x,y ใด ๆ ใน A , $x \wedge y = (x' \vee y')' \in A$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3.1

ให้ $\beta = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$

$A = \{0, 1\}$

$A \subseteq B$

และ $(\{0,1\}, \wedge_{\{0,1\}}, \vee_{\{0,1\}}, '_{\{0,1\}}\ 0, 1)$

เป็นพีชคณิตบูลีน

ดังนั้น $(\{0,1\}, \wedge_{\{0,1\}}, \vee_{\{0,1\}}, '_{\{0,1\}}, 0, 1)$

สับพีชคณิตของ β

3.4 พาเชียลออร์เดอร์

นิยาม

> ในพีชคณิตบูลีน β เรากำหนดความสัมพันธ์ $\leqslant$ บน B
> โดย $x \leqslant y$ (อ่านว่า y *include* x) ก็ต่อเมื่อ
> $x \wedge y = x$

<u>ทฤษฎี</u> 3.6

> สำหรับ $x, y \in B$, $x \leqslant y$ ก็ต่อเมื่อ
> $x \vee y = y$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สมมติ $x \leq y$

$\therefore \; x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$

$\Leftarrow$ สมมติ $x \vee y = y$

$x \wedge y = x \wedge (x \vee y)$

$= x$

$\therefore \; x \leq y$

ข.ต.พ.

ทฤษฎี 3.7

สำหรับ $x, y, z \in B$
1. $x \leq x$ (Reflexivity)
2. $(x \leq y \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \leq z$ (Transitivity)
3. $(x \leq y \;\&\; y \leq x) \rightarrow x = y$ (anti-symmetry)

พิสูจน์ 1) $x \leq x$

$x \wedge x = x$

$x \leq x$

พิสูจน์ 2) $(x \leq y \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

สมมติ $x \leq y \;\&\; y \leq z$

ie $x \wedge y = x$ และ $y \wedge z = y$

$\therefore \; x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$

$= x \wedge (y \wedge z)$

$= x \wedge y$

$= x$

$\therefore \; x \leq z$

นิยาม

> ความสัมพันธ์ $\leq$ ใด ๆ บน B ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติ
>
> 1. *Reflexivity*
> 2. *Transitivity*
> 3. *Anti-symmetry*
>
> เรียกว่า พาเชียลออร์เดอร์ *(Partial order)* บน B

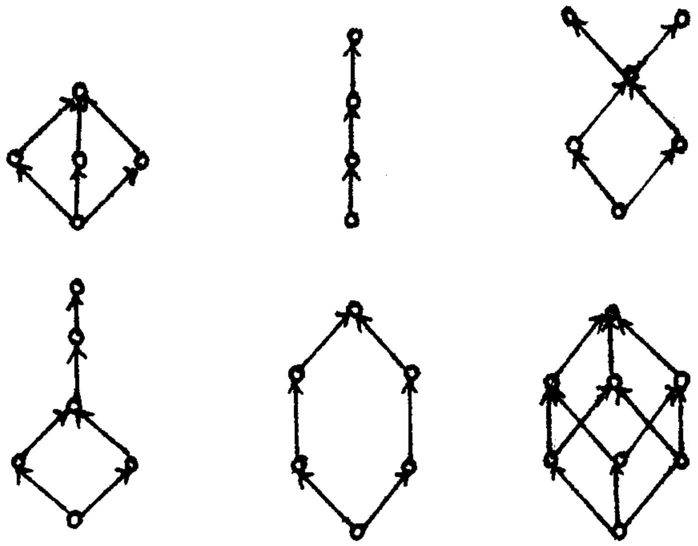
<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.1

ความสัมพันธ์ $\subseteq$ (สับเซท) บนเซท $\mathcal{P}(A)$ เป็นพาเชียลออร์เดอร์ ($\mathcal{P}(A)$ คือเซทของสับเซททั้งหมดของ A)

นิยาม

> พาเชียลออร์เดอร์เซท *(partial ordered set)* P คือเซท P กับความสัมพันธ์ $\leq$ ที่เป็นพาเชียลออร์เดอร์

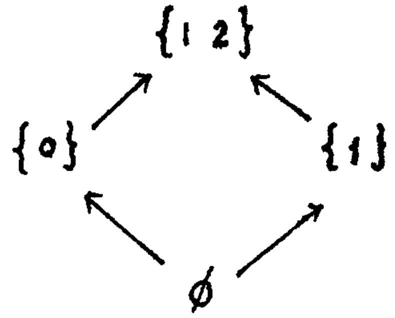
สำหรับความสัมพันธ์ $a \leq b$ บนเซท B เราหมายถึง $a < b$ แต่ $a \neq b$ พาเชียลออร์เดอร์ที่เป็นเซทจำกัด เราสามารถเขียนแทนได้ด้วยรูป *(diagam)* โดยที่แต่ละอีลีเมนต์ของเซทเราแทนด้วยจุด ถ้า $a > b$ จะเขียนจุดb ไว้เหนือจุด a แล้วลากเส้นเชื่อมจุดจาก b ไปยัง a ดังเช่น ตัวอย่างข้างล่างนี้



<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.1

พาเชียลออร์เดอร์ $\subsetneq$ บนเซทของสับเซททั้งหมดของเซท $\{0,1\}$

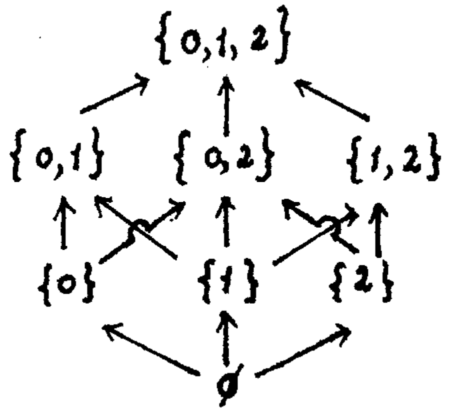
จะเขียนแสดงด้วยรูปได้ดังนี้



<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.2

พาเชียลออร์เดอร์ บนเซทของสับเซททั้งหมดของเซท $\{0,1,2\}$

จะเขียนแสดงด้วยรูป ได้ดังนี้



กฎของดูอัล *(Duality Principle)*

> ทฤษฎีใดก็ตามที่เป็นจริงทุก ๆ พาเชียลออร์เดอร์ $<$ จะยังคงเป็นจริงกับทุก ๆ ทฤษฎีที่ได้จากการเปลี่ยนพาเชียลออร์เดอร์ $\leqslant$ มาเป็น $\geqslant$

3.5 ขอบเขต *(Bound)*

นิยาม

> ให้ $\leqslant$ เป็นพาเชียลออร์เดอร์บนเซท A จะเรียกอีลีเมนต์ $z \in A$ ว่าขอบเขตบน *(upper bound)* ของ $Y \subseteq A$ เมื่อ $y \leqslant z$ สำหรับทุก ๆ $y \in Y$

นิยาม

> อีลีเมนต์ $z \in A$ จะเรียกว่าขอบเขตบนเล็กสุด *(least upper bound)* ของ $Y \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ
>
> 1. z เป็นขอบเขตบนของ Y
> 2. $z \leqslant w$ สำหรับ ทุก ๆ w ที่เป็นขอบเขตบนของ Y

ข้อสังเกต เนื่องจาก พาเชียลออร์เดอร์ $\leqslant$ สอดคล้องคุณสมบัติ *antisymmetry* ดังนั้น Y จะมีขอบเขตบนเล็กสุดได้อย่างมากสุดเพียงตัวเดียว

นิยาม

> ให้ $\leqslant$ เป็นพาเชียลออร์เดอร์บนเซท A จะเรียกอีลีเมนต์ $z \in A$ ว่าขอบเขตล่าง *(lower bound)* ของ $Y \subseteq A$ เมื่อ $z \leqslant y$ สำหรับทุก ๆ $y \in Y$

นิยาม

> อีลีเมนต์ $z \in A$ จะเรียกว่าขอบเขตล่างใหญ่สุด *(Greatest lower bound* ของ $Y \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ
>
> 1. z เป็นขอบเขตล่างของ Y
> 2. $w < z$ สำหรับทุก ๆ w ที่เป็นขอบเขตล่างของ Y

ข้อสังเกต เนื่องจากพาเชียลออร์เดอร์ $\leqslant$ สอดคล้องคุณสมบัติ *anti symmetry* ดังนั้น Y จะมีขอบเขตล่างใหญ่สุดได้อย่างมากที่สุดเพียงตัวเดียว

<u>ตัวอย่าง</u> 3.5.1

ความสัมพันธ์ น้อยกว่าหรือเท่ากับ บนเซทจำนวนเต็ม (I) เป็นพาเชียลออร์เดอร์ ทุก ๆ สับเซต (ที่ไม่ใช่เซทเปล่า) ของ I จะต้องมีขอบเขตบน (และขอบเขตล่าง) และจะต้องมีขอบเขตบนเล็กสุด (และขอบเขตล่างใหญ่สุด) อย่างไรก็ตามขอให้สังเกตว่ามีบางสับเซต (ที่ไม่ใช่เซตเปล่า) ของ I ที่ไม่มีขอบเขตบนเล็กสุด (และขอบเขตล่างใหญ่สุด) เช่น เซต I เองและเซตจำนวนเต็มคู่

3.6 แลททิซ *(Lattice)*

นิยาม

แลททิซ *(Lattice)* คือเซท $L \neq \Phi$ กับไบนารีโอเปอเรชัน $\wedge$ และ $\vee$ ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติ

1. $x \wedge x = x$ และ $x \vee x = x$ *(Idempotent)*
2. $x \wedge y = y \wedge x$ และ $x \vee y = y \vee x$ *(Commutativity)*
3. $$\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z) \end{array}\right\} \textit{(Associativity)}$$
4. $x \wedge (x \vee y) = x$ และ $x \vee (x \wedge y) = x$ *(Absorption)*

$\forall x, y, z \in L$

นิยาม

แลททิซ (Lattice) L ใด ๆ ที่สอดคล้องคุณสมบัติ

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

และ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\forall x, y, z \in L$ เรียก L ว่า *distributive lattice*

<u>ทฤษฎี</u> 3.9

ให้ L เป็นแลททิซใด ๆ สำหรับ x,y ใด ๆ ใน L, $\{x,y\} \subsetneq L$ จะมี $(x \vee y)$ เป็นขอบเขตบนเล็กสุด และ $(x \wedge y)$ เป็นขอบเขตล่างใหญ่สุด

<u>พิสูจน์</u> $\because x \wedge (x \vee y) = x$

$\therefore x \leqslant x \vee y$

และ $y \wedge (y \vee x) = y$

$y \wedge (x \vee y) = y$

$\therefore y \leqslant x \vee y$

ดังนั้น $x \vee y$ เป็นขอบเขตบนของ $\{x,y\}$

สมมติ w เป็นขอบเขตบนใด ๆ ของ $\{x,y\}$

แสดงว่า $x \leq w$

$\therefore x \wedge w = x$

และ $y \leq w$

$y \wedge w = y$

$\therefore (x \vee y) \wedge w = (x \wedge w) \vee (y \wedge w)$

$= x \vee y$

$x \vee y \leq w$

ดังนั้น $x \vee y$ เป็นขอบเขตบนเล็กสุดของ $\{x,y\}$

$\because x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$

$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$

$x \wedge y \leq x$

และ $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y)$

$= x \wedge y$

$x \wedge y \leq y$

ดังนั้น $x \wedge y$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{x,y\}$

ให้ z เป็นขอบเขตล่างใหญ่สุดใด ๆ ของ $\{x,y\}$

$\therefore z \leq x$

$z \wedge x = z$

และ $z \leq y$

$z \wedge y = z$

$\because z = z \wedge x$

$= (z \wedge y) \wedge x$ (แทนค่า)

$$= z \wedge (y \wedge x)$$

$$= z \wedge (x \wedge y)$$

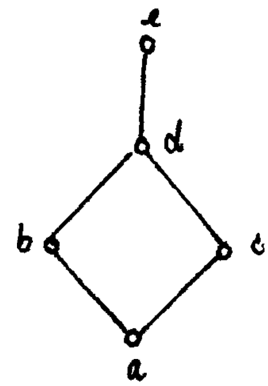
$$z \leqslant (x \wedge y)$$

ดังนั้น $x \wedge y$ เป็นขอบเขตล่างบนสุดของ $\{x,y\}$

ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่าง</u> 3.6.1

ให้ $A = \{a, b, c, d, e\}$ กำหนด $\leqslant$ บน A ดังรูปข้างล่าง นี้แล้ว A เป็น *distributive lattice*



ยูนิต 1 ของ แลททิซ L เราหมายถึง ขอบเขตบนของเซต L (*whole* เซท L) และถ้าแลททิซ L มียูนิต 1 จะต้องมีเพียงตัวเดียว (*unique*)

ซีโร 0 ของแลททิซ L หมายถึงขอบเขตล่างของเซท L และถ้าแลททิซ L มี ซีโร 0 จะต้องมีเพียงตัวเดียว (*unique*)

และแน่นอนสำหรับ $x \in L$

$0 \wedge x = 0$

$0 \vee x = x$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 1 = x$$

แลททิซบางแลททิซอาจไม่มียูนิต เช่นเซทของสับเซททั้งหมดซึ่งเป็นเซทจำกัด *(finite subset)* ของเซทจำนวนเต็ม I ซึ่งมีพาเชียลออร์เดอร์ $\subseteq$ และมีไบนารีโอเปอเรชัน $\cap$, $\cup$ เป็นแลททิซซึ่งไม่มียูนิต

แลททิซบางแลททิซอาจไม่มีซีโร เช่นกัน เช่นเซทของสับเซททั้งหมดซึ่งไม่เป็นเซทจำกัด *(cofinite subset)* ของเซทจำนวนเต็ม I ซึ่งมีพาเชียลออร์เดอร์ $\subseteq$ และไบนารีโอเปอเรชัน $\cap$, $\cup$ เป็นแลททิซซึ่งไม่มีซีโร

<u>ทฤษฎี</u> 3.10

> ในแลททิซ L ใด ๆ คุณสมบัติที่ว่า $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ กับ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ สมมูลกัน

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$\begin{aligned}
\because (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
&= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
&= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z)
\end{aligned}$$

สมมติ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$$\begin{aligned}
\because (x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\
&= (x \vee (x \wedge y)) \wedge ((x \vee z) \wedge (y \vee z)) \\
&= x \wedge ((x \vee z) \wedge (y \vee z)) \\
&= (x \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) \\
&= x \wedge (y \vee z)
\end{aligned}$$

<u>ซ.ต.พ.</u>

ข้อสังเกต พีชคณิตบูลีน β ใดที่เป็นแลททิซจะต้องเป็น *distributive lattice*

นิยาม

> แลททิซ L ใด ๆ ที่มีซีโร 0 และยูนิต 1 จะเรียกว่า *complement lattice* ถ้าสำหรับ $x \in L$ จะมี *inverse* x' ซึ่ง $x \wedge x' = 0$ และ $x \vee x' = 1$ $\forall x \in L$

ข้อสังเกต พีชคณิตบูลีน β ใด ที่เป็นแลททิซจะต้องเป็น *complement lattice*

ทฤษฎี 3.11

> ถ้าแลททิซ L เป็น *complemented distributive lattice* ที่มี $0 \neq 1$ แล้ว $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ จะเป็นพีชคณิตบูลีน

(ข้อพิสูจน์ละไว้ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด)

นิยาม

> อีลีเมนต์ $b \neq 0$ ของพีชคณิตบูลีน β จะเรียกว่าอะตอม (*atom*) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x \in B$ ถ้า $x \leqslant b$ แล้ว $x = b$ หรือ $x = 0$

ตัวอย่าง 3.6.2

ในพีชคณิตบูลีน $\mathcal{P}(A)$ ของสับเซตทั้งหมดของ $A \neq \Phi$ ซิงเกิลตัน *(singleton)* $\{x\}$ เป็นอะตอม

นั่นคือเซตที่ประกอบด้วยอีลีเมนต์เพียงตัวเดียว (สำหรับตัวอย่างนี้) เป็นอะตอม

สำหรับอะตอม b ใด ๆ และอีลีเมนต์ x ใด ๆ ของ B $b \wedge x = b$ หรือมิฉะนั้นก็ $b \wedge x = 0$ (เพราะ $b \wedge x \leqslant b$) ซึ่งทำให้ได้ผลตามมาอีกดังต่อไปนี้

1) ถ้า b เป็นอะตอมและ $b \leqslant x_1 \vee x_2 \vee , \ldots , \vee x_n$ แล้ว $b \leqslant x_i$

สำหรับ i บางตัว

(เพราะถ้า $b \not\leqslant x_i$ แล้ว $b \wedge x_i \neq b$ และดังนั้น $b A x_i = 0$

ด้วยเหตุนี้ถ้า $b \not\leqslant x_i$ $\forall_i$ แล้ว $b = b \wedge (x_1 \vee, \ldots \vee x_n)$

$= (b \wedge x_1) \vee \ldots \vee (b \wedge x_n) = 0 \vee 0 \ldots \vee 0 = 0$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้)

2) ถ้า b และ c เป็นอะตอมที่ $b \neq c$ แล้ว $b \wedge c = 0$

(เพราะ $b \wedge c \neq 0$ แล้ว $b = b \wedge c = c \wedge b = c$)

3) ถ้า b เป็นอะตอมและ $b \not\leqslant x$ แล้ว $b \leqslant x'$

(เพราะ $b \leqslant 1 = x \vee x'$ โดย (1) จะได้ 3)

นิยาม

พีชคณิตบูลีน β จะเรียกว่าอะตอมมิค *(Atomic)* ก็ต่อเมื่อทุก ๆ อีลีเมนต์ $0 \neq x \in B$ จะมีอะตอม b บางตัวซึ่ง $b \leqslant x$

พีชคณิตบูลีนในตัวอย่าง 3.6.2 เป็นอะตอมมิค

<u>ทฤษฎี</u> 3.12

ทุก ๆ พีชคณิตบูลีนที่ B เป็นเซตจำกัดเป็นอะตอมมิค

<u>พิสูจน์</u>

ให้ $0 \neq x_o \in B$

สมมติว่าไม่มีอะตอม b ซึ่ง $b \leqslant x_o$

x_o ไม่เป็นอะตอม

ดังนั้น จะต้องมี $0 \neq x_1$ บางตัวซึ่ง $x_1 \leqslant x_o$ และ $x_o \neq x_1$

ie $0 < x_1 < x_o$

x_1 ไม่สามารถเป็นอะตอมได้

ด้วยเหตุนี้จะต้องมี $0 \neq x_2$ บางตัวที่ $x_2 < x_1$

โดยวิธีการนี้ถ้าทำต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

$x_o, x_1, x_2, \ldots$ ซึ่ง $x_o > x_1 > x_2 > \ldots$

โดยที่ $x_o \neq x_1 \neq x_2 \neq \ldots$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ *(contradiction)* เพราะจากสมมติฐานนั้น B เป็นเซตจำกัด

<u>ช.ต.พ.</u>

แบบฝึกหัดที่ 3

1. ในพีชคณิตบูลีน, ให้ $x \sim y$ หมายถึง $x \wedge y'$

จงพิสูจน์ว่า

ก) $x \vee y = x \vee (y \sim x)$

ข) $x \sim (x \sim y) = x \wedge y$

ค) $x' = 1 \sim x$

ง) $x \leq y \leftrightarrow x \sim y = 0$

จ) $x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$.

ฉ) $x \wedge y = 0 \leftrightarrow x \sim y = x$

ช) $x \wedge (y \sim z) = (x \wedge y) \sim (x \wedge z)$

2. จงพิสูจน์ว่าในพีชคณิตบูลีนใด ๆ $0 \neq 1$ สมนัยกับข้อความที่ว่าพีชคณิตบูลีน ต้องประกอบด้วยสมาชิกมากกว่า 1 ตัว

3. ให้ D เป็นสับเซตของพีชคณิตบูลีน β จงแสดงว่าผลร่วมของสับพีชคณิตทั้งหมดของ β ซึ่งมี D เป็นสับเซตเป็นสับพีชคณิตของ β ด้วย (เรียกสับพีชคณิตซึ่งถูกเจนเนอเรทโดย D)

4. อะไรเป็นสับพีชคณิตซึ่งถูกเจนเนอเรทโดยเซตเปล่า Φ

5. ถ้า $D = \{b\}$ แล้วอะไรเป็นสับพีชคณิตซึ่งถูกเจนเนอเรทโดย D

6. จงพิสูจน์ว่าในพีชคณิตบูลีนใด ๆ

ก) $x \leq y \longleftrightarrow x \wedge y = 0$

ข) $x \leq y \longleftrightarrow x' \vee y = 1$

7. จงพิสูจน์ว่าสำหรับแลททิซที่มีสมาชิกจำกัด *(finite lattice)* จะมี ซีโร และยูนิต

8. ให้ A เป็นเซตซึ่งมี $\leqslant$ เป็น *tolal order* จงพิสูจน์ $(A, \leqslant)$ เป็น *distributive lattice*

9. จงแสดงว่าถ้า $(L, \wedge, \vee)$ เป็นโครงสร้าง *(structure)* ที่มี $\wedge$ และ $\vee$ เป็นไบนารีโอเปอเรชันบนเซต L ที่สอดคล้องคุณสมบัติ *commutative laws*, *associative laws* และ *absorption laws* และถ้าเรากำหนด $x \leqslant y$ โดย $x \wedge y = x$ แล้ว $(L, \leqslant)$ จะเป็นแลททิซซึ่งมีขอบเขตบนต่ำสุด $(\{x,y\}) = x \vee y$ และขอบเขตล่างสูงสุด $(\{x,y\}) = x \wedge y$

10. จงแสดงว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริงในแลททิซ

    ก) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leqslant x \wedge (y \vee z)$

    ข) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

11. จงแสดงว่าอสมการต่อไปนี้เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ *(neccessary and sufficient condition)* สำหรับแลททิซที่จะเป็น *distributive lattice*

    ก) $x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

    ข) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \leqslant x \vee (y \wedge z)$

    ค) $x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee z$

12. จงพิสูจน์ว่า สำหรับแลททิซใด ๆ

$$z \leqslant x \rightarrow (x \wedge y) \vee z \leqslant x \wedge (y \vee z)$$

13. เราจะเรียกแลททิซว่า *modular* ก็ต่อเมื่อแลททิซนั้นสอดคล้องคุณสมบัติที่ว่า $z \leqslant x \rightarrow x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee z \quad \forall\, x,y,z \in L$

ก) จงแสดงว่าแลททิซ L จะเป็น *modular* ก็ต่อเมื่อ L สอดคล้องคุณสมบัติ

$$z \leq x \rightarrow x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z \quad \forall\, x,y,z \in L$$

ข) จงพิสูจน์ว่า L เป็น *distributive lattice* แล้ว L จะเป็น *modular*

14. จงแสดงว่าแลททิซจะเป็น *modular* ก็ต่อเมื่อมันสอดคล้องคุณสมบัติ

$$(z \wedge (x \vee y)) \vee y = (z \vee y) \wedge (x \vee y)$$

$$\forall\, x,y,z \in L$$

15. จงแสดงว่าในแลททิซใด ๆ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

สำหรับ x,y,z ใด ๆ ในแลททิซ

16. จงแสดงว่าแลททิซ L จะเป็น *distributive* แลททิซก็ต่อเมื่อ

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

สำหรับ x,y,z ใด ๆ ใน L

17. ในพีชคณิตบูลีนใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

ก) $x + y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)'$

ข) $x + (x \vee y) = x' \wedge y$

ค) $y + (x \wedge y) = x' \wedge y$

ง) $x \vee y = x + y + (x \wedge y)$

18. จงพิสูจน์ทฤษฎีที่ 3.11