บทที่ 2
พีชคณิตของเซต
(The Algebra of Sets)

2.1 เซต *(Sets)*

เซตหมายถึง กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ เช่นกลุ่มของอักษรในภาษาอังกฤษทั้งหมด, กลุ่มของจำนวนจริงทั้งหมดที่น้อยกว่า 5 เราเรียกสิ่งต่าง ๆ ที่มาประกอบกันเป็นเซตว่า สมาชิก *(element)* และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก เขียนเล็กในภาษาอังกฤษเขียนแทนสมาชิก ในขณะเดียวกันจะใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่เขียนแทนเซต

โดยปกติเรามีวิธีบรรยายเซตได้ 2 วิธีคือ

ก. บรรยายโดยบอกคุณสมบัติของสมาชิกของเซต

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.1 A คือเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 8

$A = \{x : x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $8\}$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.2 B คือเซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง -2 กับ 5

$B = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง -2 กับ $5\}$

หรือ $B = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มและ $-2 < x < 5\}$

ข. บรรยายโดยการแจงสมาชิกของเซต

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.3 A คือเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 8

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.4 B คือเซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง -2 กับ 5

$B = \{-1,0,1,2,3,4\}$

นิยาม

> เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงตัวเดียวเราเรียกว่า *singleton* เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัวเรียก *unordered pair*

นิยาม

> x ใด ๆ ที่อยู่ในเซต A เราเรียกว่าสมาชิก *(member)* หรืออีลีเมนต์ *(element)* ของ A เราจะเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $x \in A$ และดีไนล์ *(denial)* ของ $x \in A$ จะเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $x \notin A$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.5

$3 \in \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

$2 \notin \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

2.2 การเท่ากันของเซต, สับเซต *(Equality of set, Sulset)*

นิยาม

> เซต A และ B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ ทั้งเซต A และ B มีอีลีเมนต์เดียวกันหรือเหมือนกันใช้สัญญลักษณ์ $A = B$ และดีไนล์ของ $A = B$ ใช้สัญญลักษณ์ $A \neq B$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.1 $\{x : x^2 = 1$ และ x เป็นจำนวนเต็ม$\} = \{1,-1\}$

<u>ข้อสังเกต</u> 1. $\{a,a,b,c,c\} = \{a,b,c\}$

2. $\{a,b\} = \{b,a\}$

นิยาม

> เราจะกล่าวว่าเซต A เป็นสับเซตของเซต B
> ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย
> ใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$ และนิเสธของ $A \subseteq B$
> ใช้สัญลักษณ์ $A \nsubseteq B$

ตัวอย่าง 2.2.2

$\{2,6\} \subseteq \{1,2,3,6\}$

$\{a,b\} \subseteq \{c,b,a\}$

$\{1,2,3\} \nsubseteq \{1,2,5\}$

$\{6,7,3\} \subseteq \{3,7,6\}$

นิยาม

> เราจะใช้สัญลักษณ์ $A \subset B$ เมื่อ $A \subseteq B$
> และ $A \neq B$ ดังนั้น $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุก ๆ ตัว
> ของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วยแต่ยังมีสมาชิกของ B
> อีกบางตัวที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของ A ถ้า $A \subset B$
> เรากล่าวว่า A เป็น *proper subset* ของ B
> และนิเสธของ $A \subset B$ เราเขียน $A \not\subset B$

คุณสมบัติของสับเซต

1. $A \subseteq A$ (Reflexive)

2. $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ (Transitive)

3. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ ($A \subseteq B$ & $B \subseteq A$)

คุณสมบัติของพรอพเพอร์สับเซต (proper subset)

1. $A \not\subset A$

2. $A \subset B$ & $B \subseteq C$ แล้ว $A \subset C$

3. ถ้า $A \subseteq B$ & $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B \not\subseteq A$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.3

$\{1,3\} \subset \{1,2,3\}$

$\{1,3\} \not\subset \{1,3\}$

$\{1,4\} \not\subset \{1,3\}$

2.3 เซตเปล่าและจำนวนสับเซต

นิยาม

> เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เรียก A ว่าเซตเปล่า (null set or empty set) ใช้สัญลักษณ์ Φ และเซตเปล่าเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

ตัวอย่าง 2.3.1

$\{x : x \neq x\}$

ตัวอย่าง 2.3.2

สับเซตของ Φ มีเพียงเซตเดียวคือเซต Φ เอง

ตัวอย่าง 2.3.3

สับเซตของ $\{x\}$ คือ Φ และ $\{x\}$

ดังนั้น *singleton* จะมี 2 สับเซต

ตัวอย่าง 2.3.4

ถ้า $x \neq y$ แล้วสับเซตของ *unordered pair* $\{x,y\}$ คือ

Φ , $\{x\},\{y\},\{x,y\}$

ดังนั้นเซตที่ประกอบด้วย 2 อีลีเมนต์มี 4 สับเซต

ตัวอย่าง 2.3.5

ถ้า $x \neq y \neq z$ แล้วสับเซตของ *unordered pair* $\{x,y,z\}$

คือ Φ ,$\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{y,z\}$, $\{x,y,z\}$

ดังนั้นเซตที่ประกอบด้วย 3 อีลีเมนต์จะมี 8 สับเซต

นิยาม

> ให้ $\mathcal{P}(A)$ แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ A แล้ว
>
> $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

ทฤษฎี 2.1

> สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ ถ้า A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมด n ตัวแล้วเซต $\mathcal{P}(A)$ จะมีสมาชิกทั้งสิ้น 2^n อีลีเมนต์

พิสูจน์ ในกรณีที่ $n = 0$

$\mathcal{P}(A)$ ประกอบด้วยสมาชิกเพียง 1 อีลีเมนต์ (ดังตัวอย่าง 2.3.2)

สมมติว่าเซต A มีสมาชิก n ตัว โดยที่ $n > 0$ ในการเลือกสับเซต C ใด ๆ ของ A

จะมีทางที่เป็นไปได้สำหรับแต่ละ $x \in A$ คือ

$x \in A$ หรือ $x \notin A$

ไม่ว่า $x \in C$ หรือไม่ก็ตามเหตุการณ์นี้เป็นอิสระกับเหตุการณ์ที่ว่าไม่ว่าสมาชิก y ของ A จะเป็นสมาชิกของ C หรือไม่

ดังนั้นจึงมีวิธีเลือกสับเซตของ A ได้ทั้งหมด 2^n วิธี

ซ.ต.พ.

2.4 ผลรวมของเซต (Union)

นิยาม

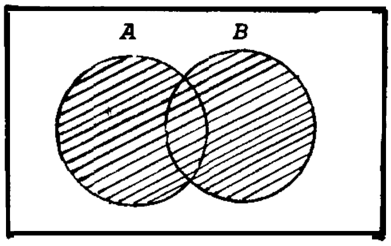
> ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลรวม (union) ของ A กับ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B หรือทั้ง A และ B ใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$
>
> $$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.1

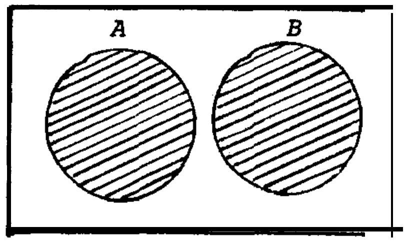
$$\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,6\} = \{1,2,3,5,6\}$$

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$$

ถ้าเราแทนสมาชิกของ A และ B ด้วยจุดต่าง ๆ ในวงกลมแล้วผลรวมของ A และ B จะประกอบด้วยจุดทั้งหมดในวงกลมทั้งสองวงดังรูป



$A \cup B$



$A \cup B$

คุณสมบัติของผลรวมของเซต

u_1 $A \cup A = A$ *(Idempotent)*

u_2 $A \cup B = B \cup A$ *(Commutativity)*

u_3 $A \cup \Phi = A$

u_4 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Associativity)*

u_5 $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

u_6 $A \subsetneq A \cup B$ & $B \subsetneq A \cup B$

2.5 ผลร่วมของเซต *(Intersection)*

นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลร่วมของ A และ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B ใช้สัญลักษณ์ $A \cap B$ $A \quad B = \{x : x \in A \text{ \& } x \in B\}$

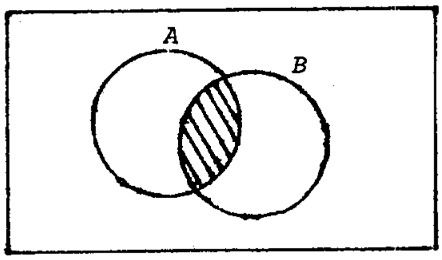
<u>ตัวอย่าง</u> 2.5.1

$\{1,2,4\} \cap \{2,4,5\} = \{2,4\}$

$\{1,2,5\} \cap \{3,4,6\} = \Phi$

$\{0,1,3\} \cap \{2,0\} = \{0\}$

เราสามารถจะเขียนรูปแสดงผลร่วมของเซต A กับ B ได้ดังนี้



$A \cap B$

นิยาม

> เซ็ต A และ B ใด ๆ ที่ $A \cap B = \Phi$
> เรากล่าวว่า A และ B เป็นเซ็ตที่แยกกันเด็ดขาด
> *(disjoint set)*

คุณสมบัติของผลร่วมของเซ็ต

I_1 $A \cap A = A$ *(Idempotent)*

I_2 $A \cap B = B \cap A$ *(Commutativity)*

I_3 $A \cap \Phi = \Phi$

I_4 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Associativity)*

I_5 $A \cap B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

I_6 $A \cap B \subseteq A \;\&\; A \cap B \subseteq B$

ความสัมพันธ์ที่สำคัญระหว่างผลรวมและผลร่วมของเซ็ต คือกฎการกระจาย *(Distributive law)*

D_1 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D_2 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>พิสูจน์</u> $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\because A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \;\&\; x \in B \cup C\}$$
$$= \{x : x \in A \;\&\; (x \in B \vee x \in C)\}$$

$= \{x : (x \in A \ \& \ x \in B) \vee (x \in A \ \& \ x \in C\}$

$= \{x : x \in (A \cap B) \vee x \in A \cap C \}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ข.ต.พ.

<u>ข้อพิสูจน์</u> $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\because A \cup (B \cap C) = \{x : x \in A$ หรือ $x \in B \cap C\}$

$= \{x : x \in A$ หรือ $(x \in B \ \& \ x \in C)\}$

$= \{x : (x \in A$ หรือ $x \in B)$

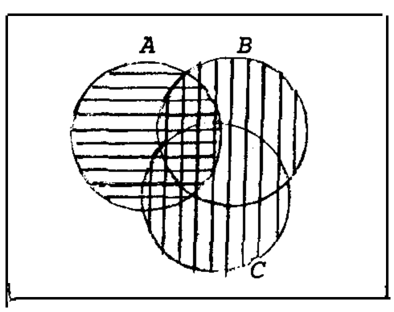
$\& (x \in A$ หรือ $x \in C)\}$

$= \{x : x \in (A \cup B) \ \& \ x \in (A \cup C)\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

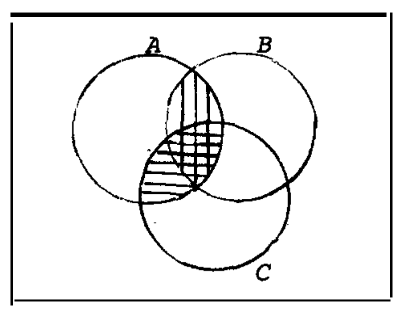
ข.ต.พ.

เราสามารถจะตรวจสอบคุณสมบัติ D_1 และ D_2 ได้ด้วยการเขียนรูปเช่นเดียวกัน ดังรูปข้างล่างนี้รูป ก. เราให้เส้นตั้งฉากแทน $B \cup C$ และเส้นนอนแทน A ด้วยเหตุนี้ $A \cap (B \cup C)$ จะแทนได้ด้วยเนื้อที่ที่เกิดจากการตัดกันของเส้นนอนและเส้นตั้งฉาก ส่วนรูป ข. ให้เส้นตั้งฉากแทน $A \cap B$ และเส้นนอนแทน $A \cap C$ ดังนั้น $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ จึงได้ดังรูป ข. ซึ่งเป็นพื้นที่เหมือนกับรูป ก.



$A \cap (B \cup C)$

รูป ก.



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

รูป ข.

รูป ที่ใช้เขียนแทนเซตอย่าง นี้เราเรียกว่า *Venn diagrams* (แผนภาพเวนน์)

ตัวอย่าง 2.5.2

จงแสดงว่า $A \cap (A \cup B) = A$

วิธีทำ โดย $U6$ $A \subseteq A \cup B$

ดังนั้นโดย $I5$ $A \cap (A \cup B) = A$

ตัวอย่าง 2.5.3

จงแสดงว่า $A \cup (A \cap B) = A$

วิธีทำ $\because A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$

$= A \cap (A \cup B)$

$= A$

กฎการกระจายในเทอมทั่ว ๆ ไป

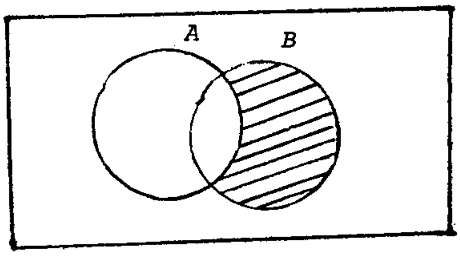
$D(I)$ $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$D(II)$ $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$

2.6 ผลต่างและผลต่างสมมาตร *(Difference and Symmetric difference)*

นิยาม

> ให้ A และ B เป็นเซ็ตใด ๆ ผลต่าง $B \sim A$ หมายถึงเซ็ตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A
>
> $B \sim A = \{x : x \notin A \ \& \ x \in B\}$



$B \sim A$

คุณสมบัติของผลต่าง

D_1 $B \sim B = \Phi$

D_2 $B \sim \Phi = B$

D_3 $\Phi \sim B = \Phi$

D_4 $(A \sim B) \sim C = A \sim (B \cup C) = (A \sim C) \sim B$

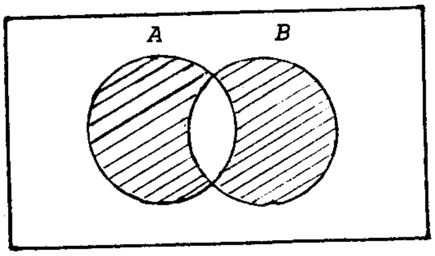
<u>ตัวอย่าง</u> 2.6.1

$\{1,2,4,5,7\} \sim \{2,5\} = \{1,4,7\}$

$\{a,b,c\} \sim \Phi = \{a,b,c\}$

นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลต่างสมมาตร $A \Delta B$ คือ $(A \sim B) \cup (B \sim A)$
$A \Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A)$



$A \Delta B$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.6.2

ให้ $A = \{0,1,2,3,5\}$, $B = \{0,1,2,3\}$

$C = \{0,1,4,5\}$

จงหา $A \Delta B$ และ $A \Delta C$

วิธีทำ ในที่นี้ $B \subset A$ แต่ $C \not\subset A$

$A \sim B = \{5\}$

$B \sim A = \Phi$

$A \sim C = \{2,3\}$

$C \sim A = \{4\}$

$A \Delta B = \{5\}$

$A \Delta C = \{2,3,4\}$

ข้อสังเกต $A \Delta B = (A \cup B) \sim (A \cap B)$

คุณสมบัติของผลต่างสมมาตร

SD_1 $A \Delta A = A$

SD_2 $A \Delta B = B \Delta A$

SD_3 $A \Delta \Phi = A$

2.7 เซตจักรวาล และคอมพลิเมนต์ *(Universal set, Complement)*

นิยาม

> เราจะกำหนดเซตใดเซตหนึ่งขึ้นและเรียกเซตนี้ว่า เซตจักรวาล ถ้าเซตทุกเซตที่เรากล่าวถึง หรือสนใจเป็นสับเซตของเซตนี้ทั้งสิ้น ใช้สัญลักษณ์แทนเซตจักรวาลด้วย X

นิยาม

> ถ้า $A \subseteq X$ แล้วคอมพลีเมนต์ $\bar{A}$ ของ A
> คือ $X \sim A$
>
> $$\bar{A} = \{x : x \in X \ \& \ x \notin A\}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของคอมพลีเมนต์

C_1 $\quad \bar{\bar{A}} = A$

C_2 $\quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad$ } De Morgan's Laws

C_3 $\quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\quad$ }

C_4 $\quad A \cap \bar{A} = \Phi$

C_5 $\quad A \cup \bar{A} = X$

C_6 $\quad \bar{\Phi} = X$

C_7 $\quad X = \Phi$

C_8 $\quad A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

C_9 $\quad A = B$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{A} = \bar{B}$

C_{10} $\quad A \sim B = A \cap \bar{B}$

C_{11} $\quad A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

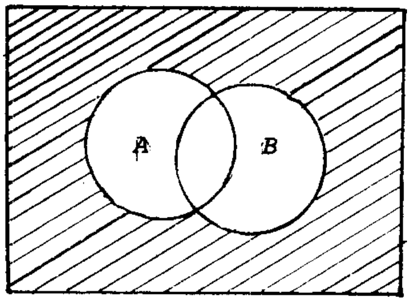
<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.1

จงแสดงว่า $\quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

<u>วิธีทำ</u>

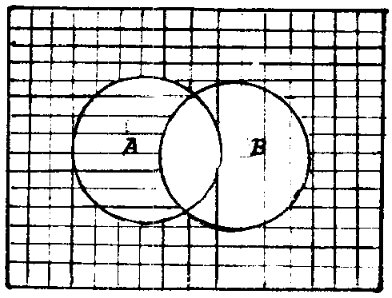
$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in X \,\&\, x \notin A \cup B\} \\
&= \{x : x \in X \,\&\, \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x : x \in X \,\&\, (x \notin A \,\&\, x \notin B)\} \\
&= \{x : (x \in X \,\&\, x \notin A) \,\&\, (x \in X \,\&\, x \notin B)\} \\
&= \{x : x \in X \,\&\, x \notin A\} \cap \{x : x \in X \,\&\, x \notin B\} \\
&= \bar{A} \cap \bar{B}
\end{aligned}
$$

ถ้าเราจะแสดงโดยใช้ *Venn diagram* จะได้ดังนี้



$\overline{A \cup B}$

พื้นที่แรเงา



$\bar{A} \cap \bar{B}$

พื้นที่เส้นตัดกัน

De Morgan's Law

$C(2')$ $\quad \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$

$C(3')$ $\quad \overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.2

$A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap \bar{B} = \Phi$

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $A \cap \bar{B} = \Phi$

$$\begin{aligned} A &= A \cap X \\ &= A \cap (B \cup \bar{B}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้ถ้า $A \cap B = \Phi$ แล้ว $A = A \cap B$

ดังนั้นโดย I_5 จะได้ว่า $A \subseteq B$

สมมติ $A \subseteq B$

โดย I_5 จะได้ว่า $A = A \cap B$

ดังนั้น $A \cap \bar{B} = (A \cap B) \cap \bar{B}$

$$\begin{aligned} &= A \cap (B \cap \bar{B}) \\ &= A \cap \Phi \\ &= \Phi \end{aligned}$$

<u>ช.ต.พ.</u>

2.8 คู่ลำดับ ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

(Ordered pair, Relation and Function)

2.8.1 คู่ลำดับ *(ordered pair)*

ในชีวิตประจำวันของเรานั้นเราจะพบกับ "คู่" และ "ลำดับ" อยู่มากมาย ถ้าลองนึกถึงประพจน์ 2 ประพจน์ "สุขุมใส่ถุงเท้าแล้วจึงใส่รองเท้า" กับ "สุขุมใส่รองเท้าแล้วจึงใส่ถุงเท้า" ทั้งสองประพจน์นี้ให้มโนภาพที่ไม่เหมือนกัน ดังนั้นจึงต้องพิจารณาถึงลำดับที่ใส่ก่อนหลัง

ถ้าบอกว่า "เด็กขี่จักรยาน" และ "จักรยานขี่เด็ก" ก็จะได้มโนภาพสองอย่างที่ไม่เหมือนกันอีก การจะบอกว่า "อะไร" ขี่ "อะไร" จำเป็นต้องบ่งให้ถูกต้องตามลำดับก่อนหลัง จึงจะทำให้นึกมองเห็นภาพตามที่ต้องการ

จากตัวอย่างที่ยกขึ้นมานี้ นักศึกษาคงจะพอมองเห็นว่า "ลำดับ" ที่เหตุการณ์สองอย่างเกิดขึ้นนั้นมีความสำคัญในการจะให้มโนภาพที่ถูกต้อง

ในทางคณิตศาสตร์เราใช้สัญญลักษณ์ (x,y) เพื่อหมายถึงการนำเอา x กับ y มาเข้าคู่กันตามลำดับที่เขียนเอาไว้ คือ x ก่อนแล้วจึง y และเรียก (x,y) ว่า คู่ลำดับ เรียก x ว่า *coordinate* ที่ 1 เรียก y ว่า *coordinate* ที่ 2 ของคู่ลำดับ (x,y)

ดังนั้นนักศึกษาจะเห็นได้ว่า คู่ลำดับ (x,y) ไม่ใช่เซต $\{x,y\}$

เพราะฉะนั้นถ้าให้ (ถุงเท้า, รองเท้า) เพื่อแทนประพจน์" สุขุมใส่ถุงเท้าแล้วจึงใส่รองเท้า" ประพจน์ "สุขุมใส่รองเท้าแล้วจึงใส่ถุงเท้า" ก็ต้องแทนด้วย(รองเท้า, ถุงเท้า)

ถ้าให้ (เด็ก, จักรยาน) แทนประพจน์ "เด็กขี่จักรยาน" แล้ว (จักรยาน, เด็ก) ก็จะต้องแทนประพจน์ "จักรยานขี่เด็ก"

นิยาม

> ให้ $(x,y),(u,v)$ เป็นคู่ลำดับใด ๆ
>
> $(x,y) = (u,v)$ ก็ต่อเมื่อ $x = u,\ y = v$

นิยาม

> ให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียน *(Cartesian product)* ของเซต A กับเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือเซตของคู่ลำดับ (x,y) ทั้งหมดซึ่ง $x \in A$ และ $y \in B$

$$A \times B = \{(x,y) \;/\; x \in A,\ y \in B\}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.8.1

$A = \{a,b,c\}$

$B = \{1,2\}$

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.8.2

ให้ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด

$R \times R = \{(x,y) \;/\; x$ และ $y \in R\}$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$
2. $A \times \Phi = \Phi = \Phi \times A$
3. จำนวนอีลีเมนต์ของ $A \times B$ เท่ากับจำนวนอีลีเมนต์ของ $B \times A$ และต่างก็เท่ากับผลคูณของจำนวนอีลีเมนต์ของ A กับจำนวนอีลีเมนต์ของ B

2.8.2. ความสัมพันธ์

นิยาม

เราจะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B ถ้า R เป็นสับเซ็ตของ $A \times B$ และถ้า $(x,y) \in R$ แล้วเราจะกล่าวว่า "x มีความสัมพันธ์ R กับ y เขียนแทนด้วย $x R y$

จากนิยามของความสัมพันธ์ จะเห็นได้ว่าจำนวนความสัมพันธ์ที่จะมีได้ทั้งหมดระหว่างเซต A กับเซต B ก็ต้องเท่ากับจำนวนสับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ และเนื่องจาก Φ ก็เป็นสับเซตอันหนึ่งด้วย Φ จึงเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B ด้วยเรียก *empty relation* ระหว่าง A กับ B

นิยาม

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ A เราจะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์ใน A

ตัวอย่าง 2.8.3

ให้ $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$

$R_1 = \{(a,1),(b,2),(c,1)\}$

$R_2 = \{(b,1),(a,2)\}$

จะเห็นว่า R_1 และ R_2 ต่างก็เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B เพราะต่างก็เป็นสับเซตของ $A \times B$

ตัวอย่าง 2.8.4

ให้ A เป็นเซตของคนทั้งโลก

ถ้าเราพูดว่า "นายยงเป็นพ่อของแดง" หมายความว่าเรามีคู่ลำดับ (นายยง, แดง) เป็นอีลีเมนต์อันหนึ่งในเซตที่เป็นความสัมพันธ์ R ระหว่าง A กับ B ซึ่ง R เป็นความสัมพันธ์อันหนึ่งในเซตของคนทั้งโลก และความสัมพันธ์ R คือ "ความเป็นพ่อ" กล่าวคือ

R = {(นายยง, แดง), (นายยง, ดำ), (นายละอาด, นภา), (นายวิชัย, อุล่า)}

จะเห็นว่า $R \subseteq A \times A$

และ (นายยง, แดง) $\in R$

จึงกล่าวว่า นายยง R แดง ซึ่งหมายความว่า นายยงเป็นพ่อของแดง

ตัวอย่าง 2.8.5

ให้ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริง

R_1 = {(x,y)/ $x,y \in R$ และ x มากกว่า y }

R_2 = {(x,y)/ x, $y \in R$ และ x น้อยกว่า y}

R_3 = {(x,y)/ x, $y \in R$ และ x น้อยกว่าหรือเท่ากับ y}

จะเห็นว่า R_1, R_2, R_3 เป็นความสัมพันธ์ในเซตจำนวนจริงทั้งสิ้นเพราะต่างก็เป็นสับเซตของ $R \times R$

โดยปกติแล้วเรานิยมใช้สัญลักษณ์

" > " แทนความสัมพันธ์ "มากกว่า"

" < " แทนความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"

" ≤ " แทนความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"

เพราะว่า 7 มากกว่า 4 ดังนั้น $(7,4) \in R_1$ หรือจะให้ถูกต้องจริง ๆ แล้วต้องเขียน $(7,4) \in >$ แต่เรากลับนิยมเขียน $7 > 4$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.8.6

ให้ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริง

$R_1 = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 9\}$

$R_2 = \{(x,y) / y = 7x + 3\}$

$R_3 = \{(x,y) / y = \tan x\}$

R_1, R_2, R_3 เป็นความสัมพันธ์ในเซตของเลขจำนวนจริงทั้งสิ้น แต่โดยมากเราจะพบเขียนแต่เพียง $x^2 + y^2 = 9$ หรือ $y = 7x + 3$ หรือ $y = \tan x$ เท่านั้น

นิยาม

ให้ R เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B โดเมน *(domain)* ของ $R = \{x/x \in A$ และ $(x,y) \in R\}$ พิสัย *(range)* ของ $R = \{y/y \in B$ และ $(x,y) \in R\}$

จากนิยามจะได้ข้อสังเกตดังนี้

1) จะเห็นว่าโดเมนของ R คือเซตของ *coordinate* ที่ 1 ของคู่ลำดับทั้งหมดของ R และพิสัยของ R คือเซตของ *coordinate* ที่ 2 ของคู่ลำดับทั้งหมดของ R

2) โดเมนของ R เป็นสับเซตของ A

3) พิสัยของ R เป็นสับเซตของ B

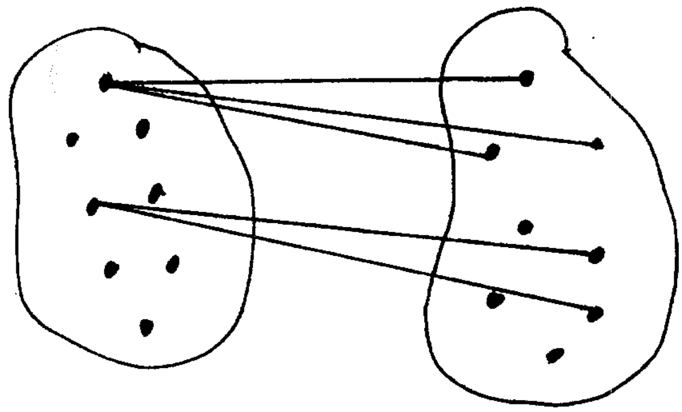
2.8.3 ฟังก์ชัน *(Function)*

นิยาม

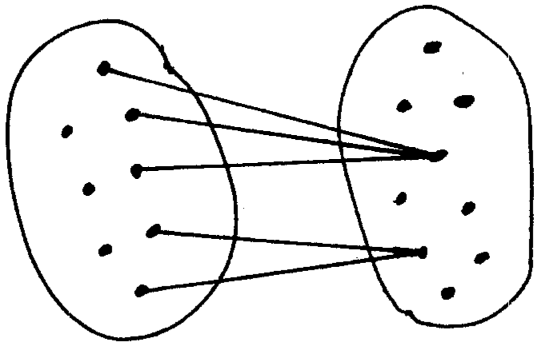
> ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ สองเซต เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B *(function from A to B)* เขียนแทนด้วย $f : A \to B$ เมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B ที่มีคุณสมบัติว่า ถ้า $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

จากนิยามจะเห็นได้ชัดเจนว่าฟังก์ชัน f เป็นความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติเฉพาะที่ว่าสำหรับอีลีเมนต์ x ใด ๆ ของ A นั้นจะมีอีลีเมนต์ของ B มามีความสัมพันธ์ f กับ x ได้อย่างมากเพียงตัวเดียวเท่านั้น

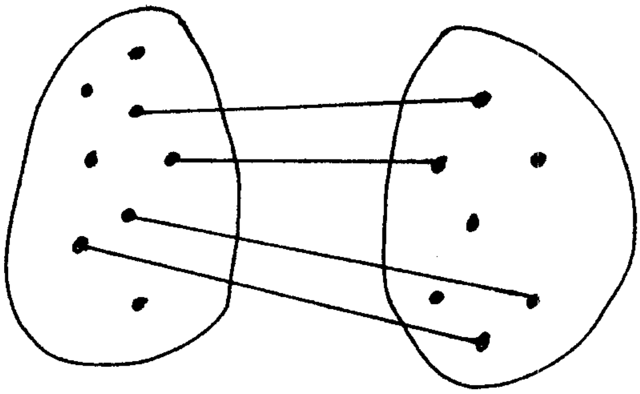
ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A กับ B แล้ว R อาจจะบอกความสัมพันธ์ระหว่างอีลีเมนต์ของ A กับ B ดังนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

ความสัมพันธ์ตามรูปที่ 1 อีลีเมนต์ 1 ตัว ใน A มีความสัมพันธ์กับอีลีเมนต์ของ B มากกว่า 1 ตัว

ความสัมพันธ์ตามรูปที่ 2 อีลีเมนต์มากกว่า 1 ตัวของ A มีความสัมพันธ์กับอีลีเมนต์ของ B เพียง 1 ตัว

ความสัมพันธ์ตามรูปที่ 3 อีลีเมนต์ 1 ตัวของ A มีความสัมพันธ์กับอีลีเมนต์ของ B เพียง 1 ตัว

ดังนั้น ความสัมพันธ์ตามรูปที่ 2 และ 3 เท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ในรูปที่ 1 ไม่ใช่ฟังก์ชัน

นิยาม

> จะใช้สัญลักษณ์ D_f แทนโดเมนต์ของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน
> และใช้สัญลักษณ์ R_f แทนพิสัยของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่าง</u> 2.8.6

ให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{a,b,c,d\}$

$f = \{(1,b),(2,a),(4,d),(5,b),(3,a)\}$

จงพิจารณา f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B หรือไม่

เนื่องจาก 1, 2, 3, 4, 5 ซึ่งเป็นอีลีเมนต์ของ A และเป็น *coordinate* ตัวที่หนึ่งของคู่ลำดับของ f ต่างมีความสัมพันธ์กับอีลีเมนต์เพียงตัวเดียวของ B

โดยนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

และ $D_f = \{x \mid x \in A$ และ $(x,y) \in f\}$

$= \{1,2,3,4,5\} \subseteq A$

และ $R_f = \{y \mid y \in B$ และ $(x,y) \in f\}$

$= \{a,b,d\} \subsetneq B$

นิยาม

> ให้ $f : A \to B$ และ $(x,y) \in f$ เรียก y เป็น *image* ของ x ภายใต้ f หรือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ใช้สัญลักษณ์ $y = f(x)$

นิยาม

> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเราจะกล่าวว่า $f = g$ เมื่อ $D_f = D_g$, $R_f = R_g$ และ $f(x) = g(x)$ สำหรับ x ทุก ๆ ตัวที่อยู่ในโดเมนต์ของ f และ g

ฟังก์ชันจากเซตของเลขจำนวนจริงไปยังเซตของเลขจำนวนจริง เราเรียกว่า *real value function*

นิยาม

ให้ $f : A \to B$ ถ้า $(x_1,y), (x_2,y) \in f$ แล้วได้ว่า $x_1 = x_2$ เราจะเรียก f ว่า *one to one function*

จากนิยามนี้จะเห็นว่า $f : A \to B$ จะเป็น *one to one function* ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

นิยาม

ให้ $f : A \to B$ ถ้า $R_f \subset B$ แล้วเรียก f ว่า *into function* แต่ถ้า $R_f = B$ แล้วเรียก f ว่า *onto function*

ที่ว่า $R_f \subset B$ หมายความว่าอีลีเมนต์บางตัวของ B เท่านั้นที่เป็น *image* ของอีลีเมนต์ของ A ภายใต้ f
แต่ถ้า $R_f = B$ หมายความว่าอีลีเมนต์ทุกตัวของ B เป็น *image* ของอีลีเมนต์ของ A

นิยาม

> ให้ $f : A \to B$ ถ้า f เป็น *one to one* และ *on to function* เรียก f ว่า *bijective function*

2.9 เซตจำกัด, เซตอนันต์, เซตอนันต์แบบนับได้, เซตนับได้

(Finite, Infinite, Denumerable, and Countable Sets)

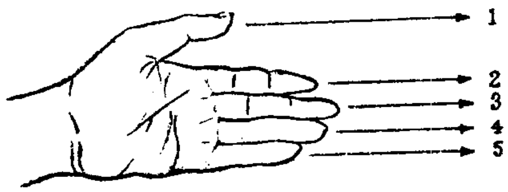
นิยาม

> เซตจำกัด *(Finite sets)* คือเซตเปล่าหรือเซตที่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้เป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง จำนวนเต็ม n บางตัว

จากนิยามนี้จะเห็นว่า เซต A จะเป็นเซตจำกัดถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งมีสัมพันธ์ชนิด 1 ต่อ 1 ระหว่างสมาชิกของเซต A กับจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่า n (เมื่อ $n = 1$, A จะต้องเป็นเซตเปล่า)

ตัวอย่าง 2.9.1

เซตของนิ้วทั้งหมดบนมือข้างหนึ่งเป็นเซตจำกัด



ขอให้สังเกตว่าสับเซตของเซตจำกัดจะต้องเป็นเซตจำกัดด้วยเช่นเดียวกับผลรวมและผลร่วมของเซตจำกัดก็ยังคงเป็นเซตจำกัด

นิยาม

> เซตอนันต์ *(Infinite sets)* คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนไม่จำกัด *(infinite)*

ตัวอย่าง 2.9.2

เซตจำนวนเต็มบวก

เซตจำนวนตรรกยะ

เซตจำนวนจริง

นิยาม

> จะเรียกเซต A ว่าเซตอนันต์แบบนับได้ *(Denumerable set)* ก็ต่อเมื่อมีสมนัยชนิด 1 ต่อ 1 ระหว่างสมาชิกของเซต A กับสมาชิกของ N โดยที่ N เป็นเซตจำนวนเต็มบวก

<u>ตัวอย่าง</u> 2.9.3

1) เซตจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคู่

(สมนัย 1 ต่อ 1 กำหนดได้โดยฟังก์ชัน $f(n) = 2n$

2) เซตจำนวนเต็ม

(สมนัย 1 ต่อ 1 กำหนดโดย $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ -(n-1)/2 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

ผลรวมของเซตจำกัดกับเซตอนันต์แบบนับได้ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ผลรวมของเซตอนันต์แบบนับได้เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

(เช่น $\{a_1, a_2, \ldots\} \quad \{b_1, b_2, \ldots\} = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$)

นิยาม

> เซต A จะเป็นเซตนับได้ *(Countable set)*
>
> ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์แบบนับได้

สับเซตของเซตนับได้ เป็นเซตนับได้

ผลรวมของเซตนับได้ เป็นเซตนับได้

2.10 จำนวนของสมาชิกในเซตจำกัด

(Number of elements in a finite set)

ให้ $\#(A)$ แทนจำนวนสมาชิกในเซตจำกัด A จะได้ว่า

1. $\#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) - \#(A_1 \cap A_2)$

2. $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) - \#(A_1 \cap A_2)$

$$- \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3)$$

$$+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

3. $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) + \#(A_4)$

$$- \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3)$$

$$- \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_4)$$

$$- \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$+ \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

ตัวอย่าง 2.10.1

สโมสรแข่งเรือแห่งหนึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 75 คน สโมสรแห่งนี้จะรับสมาชิกเฉพาะผู้ที่มีเรือใบ และเรือยนต์ติดท้าย เป็นของตนเองถ้าสมาชิกที่เป็นเจ้าของเฉพาะเรือใบมีทั้งสิ้น 48 คน สมาชิกที่เป็นเจ้าของเฉพาะเรือยนต์ติดท้ายมีทั้งสิ้น 33 คน อยากทราบว่าจะมีสมาชิก จำนวนเท่าไรที่เป็นเจ้าของทั้งเรือใบ และเรือยนต์ติดท้าย

วิธีทำ ให้ A = เซตของสมาชิกทั้งหมดที่เป็นเจ้าของเรือใบ

B = เซตของสมาชิกทั้งหมดที่เป็นเจ้าของเรือยนต์ติดท้าย

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

$$75 = 48 + 33 - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cap B) = 6$$

มีสมาชิกที่เป็นเจ้าของทั้งเรือใบและเรือยนต์ติดท้าย 6 คน

ตัวอย่าง 2.10.2

ในจำนวนนักศึกษาทั้งหมด 50 คนที่เข้าสอบในวิชาคณิตศาสตร์ ประวัติศาสตร์ และภาษาไทย มีนักศึกษา 37 คนสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 24 คนสอบผ่านวิชาประวัติศาสตร์และ 43 คนสอบผ่านวิชาภาษาไทย , มีนักศึกษาที่สอบผ่านทั้งวิชาคณิตศาสตร์และประวัติศาสตร์ 19 คน, สอบผ่านทั้งคณิตศาสตร์และภาษาไทย 29 คน, สอบผ่านทั้งวิชาประวัติศาสตร์และภาษาไทย 20 คนอยากทราบว่ามีนักศึกษาจำนวนเท่าไรที่สอบผ่านทั้ง 3 วิชาพร้อม ๆ กัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ A, B, C แทนเซตของนักศึกษาที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์, ประวัติศาสตร์ และภาษาไทยตามลำดับ

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

$$50 = 37 + 24 + 43 - 19 - 29 - 20 + \#(A \cap B \cap C)$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 14$$

มีนักศึกษาที่สอบผ่านทั้งสามวิชา 14 คน

แบบฝึกหัดที่ 2

1) จงหา สับเซตทั้งหมดของ $\{\Phi,\{\Phi\}\}$

2) จงพิสูจน์ว่า $B \cup C = \Phi$ ก็ต่อเมื่อ $B = \Phi$ และ $C = \Phi$

3) จงพิสูจน์ว่า $B \subseteq A$ และ $C \subseteq A$ แล้ว $B \cup C \subseteq A$ และถ้า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq B \cap C$

4) จงพิสูจน์ว่า ถ้า $C \subseteq A$ แล้ว $B \cap C \subseteq A$ และ $C \subseteq A \cup B$

5) จงแสดงว่า ถ้า $A \cup B = A \cup C$ แล้ว $B = C$ ไม่จริง

6) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้ *Venn diagram*

a) $A \cap B = \Phi$ b) $(C \cap A) \sim B = \Phi$

c) $(C \cap B) \sim A = \Phi$ d) $(C \cap A) \cup (C \cap B) \cup (A \cap B) = \Phi$

7) จงแสดงว่า $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$

8) จงแสดงว่า $A \,\Delta\, B = \Phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

9) จงพิสูจน์ว่า $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$ แล้ว $B = C$

10) จงพิสูจน์ว่า $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

11) จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

12. จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

13) จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

14) จงพิสูจน์ว่า a) $(A \cup B) \cap \bar{A} = B \cap \bar{A}$

b) $(A \cap B) \cup B = B$

c) $(A \cap B) \cup \bar{A} = B \cup \bar{A}$

d) $(A \cup B) \cap B = B$

15) จงพิสูจน์ว่าเซตของจำนวนตักยะทั้งหมดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

16. จงแสดงว่าเซตของจำนวนจริงทั้งหมด เป็นเซตนับได้

17) จงพิสูจน์ว่า $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \Phi$

18) จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cap \bar{B}} \cup (B \cap C) = \bar{A} \cup B$

19) ให้ $U = \{1,2,3,\ldots,8,9\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$

$C = \{3,4,5,6\}$ จงหา

a) $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$

b) $\overline{A \cap B}$

c) $\overline{A \cup C}$

d) $\bar{\bar{A}}$

e) $\overline{(A \sim B)}$