บทที่ 1

พีชคณิตของตรรกยะ

(The Algebra of Logic)

1.1 ทรูธฟังชันนัลโอเปอเรชัน *(Truth-Functional Operation)*

เราจำแนกประโยคที่ใช้พูดจาสื่อความหมายกันในชีวิตประจำวันออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

ก. ประโยคประเภทประโยคคำถาม คำสั่ง คำขอร้อง การแสดงความปรารถนา

เช่น ทำไมต้องเรียนวิชานี้

ห้ามสูบบุหรี่บนรถโดยสาร

ช่วยแปลข้อความนี้ให้หน่อย

ขอให้มีความเจริญตลอดไป

ข. ประโยคประเภทที่ให้ความหมายในทางที่จะบอกให้เราทราบได้ว่าถูกหรือผิด

เช่น ฟิสิกส์ศาสตร์เป็นวิชาเลือกของภาควิชาคณิตศาสตร์

วันนี้เกิดจันทรุปราคา

$2 + 7 = 8$

$48 - 3 = 45$

ประโยคประเภทนี้เป็นประโยคที่ให้ความหมายแก่เราในทางที่จะสามารถบอกได้ว่าถูกหรือผิด กล่าวคือประโยคเหล่านี้มีค่าของความเป็นจริงหรือเป็นเท็จ *(truth value)* อยู่ในตัวของมันเอง ประโยคเหล่านี้มีโอกาสที่จะเป็นจริงหรือไม่ก็เป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งแต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้นจะเป็นทั้งจริงและเท็จพร้อม ๆ กันไม่ได้ เราเรียกประโยคเหล่านี้ว่า <u>ประพจน์</u> *(proposition)* ในทางตรรกวิทยาเราจะศึกษากันแต่ประโยคประเภทนี้เท่านั้น เช่นเดียวกันกับวิชานี้เราจะศึกษาแต่ประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น

เรามีวิธีการหลายวิธีในการสร้างประพจน์ใหม่ ๆ ขึ้นมาใช้สื่อความหมาย โดยการใช้คำเชื่อมประพจน์ มาเชื่อมประพจน์ที่มีอยู่แล้วเข้าด้วยกัน ในที่นี้เราจะจำกัดพูดกันเฉพาะการเชื่อมประพจน์ต่าง ๆ ซึ่งส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ การเชื่อมประพจน์แบบนี้เราเรียกว่า ทรูธฟังชันนัลโอเปอเรชัน *(truth functional operation)* ประพจน์ใหม่ที่สร้างขึ้นมาจากการใช้คำเชื่อมไปเชื่อมประพจน์เดิมที่มีอยู่แล้วนี้ก็ยังคงเป็นประพจน์อยู่กล่าวคือยังมีค่าของความเป็นจริงหรือเป็นเท็จ *(truth value)* อยู่ในตัวของมันเอง นั่นคือสามารถจะบอกได้ว่าประพจน์ที่สร้างขึ้นใหม่นี้มีความหมายในทาง จริงหรือเท็จ

1.1.1 นิเกชัน *(Negation)*

ทรูธฟังชันนัลโอเปอเรชันที่ง่ายที่สุดคือ นิเกชัน ถ้า A เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว ดีไนล์ *(denial)* ของ A หรือไม่ใช่ A หรือไม่ A จะมี truth value ตรงข้ามกับ A กล่าวคือถ้า A มี truth value จริง ดีไนล์ของ A จะมี truth value เป็นเท็จและถ้า A มี truth value เป็นเท็จ ดีไนล์ของ A จะมี

truth value เป็นจริง เราจะใช้สัญลักษณ์ $\neg$ แทนคำเชื่อมดีไนล์ (ไม่, ไม่ใช่) นั่นคือถ้า A เป็นประพจน์ใด ๆ ดีไนล์ของ A จะเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\neg A$ เพื่อความเข้าใจที่ง่ายขึ้นเราอาจจะเขียนค่า *truth value* ของ $\neg A$ ออกมาในรูปตาราง ได้ดังนี้

A	$\neg A$
T	F
F	T

ตามตารางนี้ คอลัมน์ใต้ A คือค่า *truth value* ซึ่งอาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดของ A คือจริง (T) หรือมิฉะนั้นก็เท็จ (F) และคอลัมน์ใต้ $\neg A$ คือค่า *truth value* ของ $\neg A$ ซึ่งขึ้นอยู่กับ *truth value* ของ A

1.1.2 คอนจังชัน *(Conjunction)*

คำเชื่อมประพจน์อันดับต่อมาคือ คำว่า "และ" เราใช้สัญลักษณ์ $\&$ แทนคำว่า และ นั่นคือเราจะเขียน $A \& B$ แทนประพจน์ A และ B และ *truth value* ของประพจน์ A และ B มีดังนี้

A	B	$A \& B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

จากตารางนี้จะสังเกตได้ว่าประพจน์ $A \& B$ จะมี *truth value* เป็นจริงกรณีเดียวเท่านั้นคือกรณีที่ทั้งประพจน์ A และประพจน์ B มี *truth value* เป็นจริงทั้งคู่

1.1.3 **ดิสจังชัน** *(Disjunction)*

truth functional operation อันดับต่อมาคือการเชื่อมประพจน์ด้วยคำว่า "หรือ"

คำว่า "หรือ" เท่าที่ใช้อยู่ทุกวันนี้เราใช้กันในความหมาย 2อย่างคือ บางครั้ง A หรือ B จะหมายถึง A หรือ B เป็นจริงอย่างน้อยที่สุดหนึ่งประพจน์ ซึ่งหมายความว่าอาจเป็นจริงทั้ง A และ B ก็ได้หรือเป็นจริงเฉพาะ A หรือ B ประพจน์ใดประพจน์หนึ่งก็ได้ นั่นคือหรือในความหมายที่มีความหมายว่า หรือ/และ

แต่บางครั้ง A หรือ B จะใช้ในความหมายว่า หรือ มิฉะนั้นก็ นั่นคือเป็นจริงเฉพาะ A หรือ B ประพจน์ใดประพจน์หนึ่ง เช่น บ่ายนี้ฉันจะไปเล่นแบดมินตัน หรือมิฉะนั้นก็จะอยู่บ้านดูหนังสือ

โดยทั่ว ๆ ไปแล้วเราจะพบความหมายของคำหรือ ในความหมายหรือ/และ มากกว่า หรือมิฉะนั้นก็โดยเฉพาะในทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เวลาใช้คำว่าหรือเรามักจะหมายความถึง หรือ/และ และเรากำหนดสัญลักษณ์ V แทนคำว่าหรือ นั่นคือ $A \vee B$ จะใช้เขียนแทนประพจน์ A หรือ B ในความหมายว่า หรือ/และ ดังนั้นค่า *truth value* ของประพจน์ $A \vee B$ จึงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือกรณีที่ประพจน์ A และประพจน์ B มี *truth value* เป็นเท็จทั้งคู่ ดังตารางข้างล่างนี้

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.1.4 คอนดิชันนัล *(Conditionals)*

คำเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." ใช้สัญลักษณ์ $\rightarrow$ *(imply)*

ในทางคณิตศาสตร์เราจะพบข้อความที่บรรยายโดยประพจน์ ถ้า A แล้ว B บ่อย ๆ มาก ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องทำความเข้าใจกับความหมายของ *truth value* ของ ทรูธฟังชันนัลโอเปอเรชันน์ให้ดีก่อน ค่า *truth value* ของ คอนดิชันนัลของ A กับ B $(A \rightarrow B)$ มีดังตารางข้างล่างนี้

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

จากตารางได้ข้อสังเกตว่า

ก) *truth value* ของ $A \rightarrow B$ จะเป็นเท็จกรณีเดียวเท่านั้นคือกรณีที่ประพจน์ต้น (ในที่นี้คือ A) มี *truth value* เป็นจริงแต่ประพจน์ตาม (ในที่นี้คือ B) มี *truth value* เป็นเท็จ นอกนั้นเป็นจริงหมด

ข) ในกรณีที่ประพจน์ตาม *(Consequent)* มี *truth value* เป็นจริงประพจน์ต้น *(Antecedent)* จะมี *truth value* เป็นจริงหรือเท็จก็ตาม ประพจน์ $A \rightarrow B$ มี *truth value* เป็นจริงเสมอ

ค) ในกรณีที่ประพจน์ต้น *(antededent)* มี *truth value* เป็นเท็จประพจน์ตาม *(Consequent)* มี *truth value* เป็นอะไรก็ตาม ประพจน์ $A \rightarrow B$ จะมี *truth value* เป็นจริงเสมอ

1.1.5 ไบคอนดิชันนัล

คำเชื่อม...ก็ต่อเมื่อ...(*...if and only if...*) ใช้สัญลักษณ์ $A \leftrightarrow B$ แทนประพจน์ A ก็ต่อเมื่อ B ทรูธฟังชันนัลโอเปอเรชันนี้มีความหมายว่า ทั้ง A และ B ต้องมี *truth value* อย่างเดียวกันนั่นคือ ถ้า A เป็นจริง B ต้องจริงด้วย และ ถ้า B เป็นเท็จ A ต้องเท็จด้วยดังนั้นจะได้ตาราง *truth value* ของ $A \leftrightarrow B$ ดังนี้

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ประพจน์ในรูป $A \leftrightarrow B$ เรียกว่า ไบคอนดิชันนัล *(Biconditional)* ขอให้สังเกตด้วยว่า $A \leftrightarrow B$ จะต้องมี *truth value* เหมือนกับ $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$ เสมอ ดังนั้นในทางคณิตศาสตร์เวลาจะพิสูจน์ $A \leftrightarrow B$ เราจะต้องแยกแสดงว่า $A \rightarrow B$ และ $B \rightarrow A$ จริง

1.2 คอนเนคทิฟ *(Connectives)*

มาถึงหัวข้อนี้ เราจะเลือกทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชันและสร้างสัญญลักษณ์พิเศษสำหรับ ทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชันเหล่านั้น ($\neg$, & , V , $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) แน่นอนถ้าจะจำกัดตัวเราศึกษาเฉพาะกรณีตัวแปร 2 ตัว แล้วจะมีทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชันที่ต่าง ๆ กันทั้งสิ้น $2^4 = 16$ อัน และสำหรับตัวแปร 2 ตัว ตาราง *truth table* จะประกอบด้วย 4 แถว ดังนี้

A	*B*	
T	*T*	–
F	*T*	–
T	*F*	–
F	*F*	–

ทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชัน 1 อัน ในแต่ละแถวจะมีค่าเป็น *T* หรือมิฉนั้นก็ *F* อันใดอันหนึ่งเท่านั้น ด้วยเหตุนี้จะมีไบนารีทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชัน ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด 2.2.2.2 อัน

สำหรับแต่ละทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชัน ($\neg$, & , V , $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) เราสามารถจะสร้างสัญญลักษณ์เฉพาะเพื่อใช้เป็นตรรษนีบอกโอเปอเรชันนั้น ๆ สัญญลักษณ์เฉพาะนี้เราสร้างขึ้นมาให้สมนัยกับทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชันทั้ง 5 เรียกสัญญลักษณ์เฉพาะแต่ละทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชันว่า *connective*

ตัวอย่าง 1.2.1

เราสามารถกำหนด *connective* $+$ ให้สัมพันธ์กับทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชัน "หรือ" และจะมีตาราง *truth table* ดังนี้

A	B	$A + B$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

1.3 รูปแบบของประพจน์ *(Statement Forms)*

ในการจะศึกษาคุณสมบัติของทรูธฟังก์ชันนัลโอเปอเรชัน เราสร้างสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

รูปแบบของประพจน์ *(Statement forms)* หมายถึงประพจน์ที่เขียนแทนด้วยอักษร *(statement letter)* $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ รวมทั้งประพจน์ $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ ที่ประกอบด้วยคำเชื่อม $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ กล่าวคือ

ก. อักษร *(Statement letter)* $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ ที่ใช้เขียนแทนประพจน์แต่ละประพจน์เป็นรูปแบบของประพจน์

ข. ถ้า A และ B เป็นรูปแบบของประพจน์แล้ว $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ และ $(A \leftrightarrow B)$ ก็เป็นรูปแบบของประพจน์

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3

ตัวอย่างของรูปแบบของประพจน์

i) $(A \to (C \vee (B \& (B))))$

ii) $(\neg(A \leftrightarrow (\neg B_2)))$

iii) $(\neg(\neg A_1) \to (A_2 \to A_1))$

1.4 การเข้าวงเล็บ *(Parentheses)*

ในการเขียนรูปแบบของประพจน์แทนข้อความใด ๆ เราจำเป็นต้องใช้วงเล็บเข้าช่วยเพื่อไม่ให้เกิดการเข้าใจความหมายของประพจน์ผิดหรือเพื่อขจัดความคลุมเครือของความหมายของประพจน์

ข้อความ $A \vee B \& C$ อาจหมายถึง $((A \vee B) \& C)$ หรืออาจหมายถึง $(A \vee (B \& C))$ และทั้งสองข้อความนี้มีความหมายแตกต่างกัน

จากตัวอย่างที่ยกมาข้างต้นนี้จะเห็นว่าสำหรับข้อความที่เขียนแทนด้วยอักษรและตัวเชื่อมหลาย ๆ ตัวประกอบกันจำเป็นต้องใช้วงเล็บเข้าช่วย เรามีกฎเกณฑ์ในการเข้าวงเล็บรูปแบบของประพจน์ *(statement forms)* ดังต่อไปนี้

1. ทุก ๆ รูปแบบของประพจน์ *(statement form)* ที่มีตัวเชื่อมประกอบด้วยจะต้องมีวงเล็บ เราจะละวงเล็บเฉพาะกรณีที่จะไม่ทำให้เกิดความหมายคลุมเครือเท่านั้น ดังนั้นแทนที่จะเขียน $((A \vee B) \to (\neg C))$ เราก็เขียนเพียง $(A \vee B) \to (\neg C)$

2. เราจะละวงเล็บสำหรับรูปแบบของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม *demial* $(\neg A)$ ดังนั้นแทนที่จะเขียน $(\neg A) \vee B$ เราเขียนเพียง $\neg A \vee B$ ซึ่งมีความหมายต่างจาก $\neg(A \vee B)$ หรือแทนที่จะเขียน $(A \& B) \vee (\neg(\neg(\neg C)$ เราเขียนเพียง $(A \& B) \vee \neg\neg\neg C$

3. สำหรับไบนารีคอนเนคตีฟ นั่นคือในกรณีที่ใช้ตัวเชื่อมตัวเดียวกันในประพจน์ เราจะเรียงลำดับการโอเปอเรชันจากซ้ายไปขวา เช่น $A \vee B \vee C$ จะหมายถึง

$(A \vee B) \vee C$, $A \to B \to C$ หมายถึง $(A \to B) \to C$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4

โดยใช้กฎ (1) - (3) ข้างบนรูปแบบประพจน์ข้างล่างต่อไปนี้รูปแบบประพจน์ทางซ้ายจะเขียนได้ใหม่เป็นรูปแบบประพจน์ทางขวา

$(\neg(\neg(A \& B))) \vee (\neg A)$	$\neg\neg(A \& B) \vee \neg A$
$((A \vee (\neg B)) \& (C \& (\neg A)))$	$(A \vee \neg B) \& (C \& \neg A)$
$(((A \vee (\neg B)) \& C) \& (\neg A))$	$(A \vee \neg B) \;\& C \;\; \neg A$
$((\neg A) \to (B \to (\neg(A \vee C))))$	$\neg A \to (B \to \neg(A \vee C)$

1.5 ตารางค่าความจริง *(Truth Table)*

ดังได้กล่าวมาแล้วว่า ประพจน์ทุกประพจน์มีค่าความจริงหรือความเท็จ *(truth value)* อยู่ในตัวทุกประพจน์ ดังนั้นเมื่อนำประพจน์เหล่านี้มาเชื่อมด้วยคำเชื่อมต่าง ๆ ที่กล่าวมาจะเชื่อมกี่ครั้งก็ตามประโยคใหม่ที่ได้ก็ยังคงเป็นประพจน์แต่จะมี *truth value* เป็นจริงหรือเท็จขึ้นอยู่กับ *truth value* ของประพจน์เดิมซึ่งเราสามารถแสดงได้ด้วยตารางซึ่งเรียกว่า ตารางค่าความจริง

<u>ตัวอย่าง</u> 1.5.1

ประพจน์ $(\neg A \vee B) \leftrightarrow A$ มีตารางค่าความจริงดังนี้

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(\neg A \vee B) \leftrightarrow A$
T	T	F	T	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
F	F	T	T	F

ตัวอย่าง 1.5.2

ประพจน์ $(A \vee (B \& C)) \longrightarrow B$ มีตารางค่าความจริงดังนี้

A	B	C	$B \& C$	$A \vee (B \& C)$	$(A \vee (B \& C)) \to B$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T

ข้อสังเกต แต่ละประพจน์ A มีค่าความจริงที่อาจเป็นไปได้ 2 อย่าง คือ T หรือมิฉนั้นก็ F ดังนั้นถ้าประโยคใดประกอบด้วยทั้งหมด n ประพจน์ตารางค่าความจริงก็จะมีทั้งหมด 2^n แถว

1.6 ทอทโทโลยีและคอนตราดิคชัน *(Tautology and Contradiction)*

นิยาม

ประพจน์ใดจะกล่าวว่าเป็น *tautology* ก็ต่อเมื่อประพจน์นั้นมี *truth value* เป็นจริงเสมอทุกกรณีที่อาจเป็นไปได้

<u>**ตัวอย่าง**</u> 1.6.1

ประพจน์ $A \vee \neg A$ เป็น *tautology*

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
T	F	T
F	T	T

<u>**ตัวอย่าง**</u> 1.6.2

ประพจน์ $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ เป็น *tautology*

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	F	F	F	T

<u>ตัวอย่าง</u> 1.6.3

ประพจน์ $\underbrace{(A \ \& \ (B \vee C)) \longleftrightarrow ((A \ \& \ B) \vee (A \ \& \ C))}_{K}$ เป็น *tautology*

A	B	C	$B \vee C$	$A \& (B \vee C)$	$A \& B$	$A \& C$	$(A \& B) \vee (A \& C)$	K
T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

<u>นิยาม</u>

ประพจน์ใดจะกล่าวว่าเป็น *Contradiction* ก็ต่อเมื่อประพจน์นั้นมี *truth value* เป็นเท็จเสมอทุกกรณีที่อาจเป็นไปได้

ตัวอย่าง 1.6.4

ประพจน์ $A \& \neg A$ เป็น *contradiction*

A	A	$A \& \neg A$
T	F	F
F	T	F

ตัวอย่าง 1.6.5

ประพจน์ $(A \vee B) \& \neg A \& \neg B$ เป็น *contradiction*

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$(A \vee B) \& \neg A$	$(A \vee B) \& \neg A \& \neg B$
T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F

1.7 ลอกจิคอลอิมพลิเคชัน และลอกจิคอลอิควิวาเลนซ์

(Logical implication and equivalence)

นิยาม

> เราจะกล่าวว่าประพจน์ A *logically implies* ประพจน์ B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ กรณีที่ A มี *truth value* จริงนั้นจะทำให้ B มี *truth value* จริงด้วย

ตัวอย่าง 1.7.1

ประพจน์ A *logically implies* ประพจน์ $A \vee B$

(เพราะเมื่อไรก็ตามที่ A มี *truth value* เป็นจริง $A \vee B$ จะต้องมี *truth value* จริงด้วยเสมอ)

ตัวอย่าง 1.7.2

A & B *logically implies* A

ทฤษฎี 1.1

A *logically implies* B ก็ต่อเมื่อ $A \rightarrow B$

[I -

พิสูจน์ A *logically implies* B ก็ต่อเมื่อ เมื่อไรก็ตามที่ A มี *truth value* เป็นจริงแล้ว B ต้องมี *truth value* เป็นจริงด้วยดังนั้น

A *logically implies* B ก็ต่อเมื่อจะไม่เกิดกรณีที่ A มี *truth value* เป็นจริงแต่ B มี *truth value* เป็นเท็จ

$A \rightarrow B$ จะไม่เคยมี *truthvalue* เป็นเท็จเลย

$A \rightarrow B$ เป็น *tautology*

ช.ต.พ

จะเห็นว่าโดยทฤษฎีบทที่ 1.1 นี้ทำให้เราสามารถตรวจสอบว่า A เป็น *logically implies* B หรือไม่สะดวกขึ้น เพราะเพียงแต่ตรวจสอบว่า $A \rightarrow B$ เป็น *tautology* หรือไม่เท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> 1.7.3

จงแสดงว่า $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ *logically implies* A

<u>วิธีทำ</u> จะต้องแสดงให้เห็นว่า $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ เป็น *tautology* ดังตารางข้างล่างนี้

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
T	T	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
	F	T	F	T

<u>นิยาม</u>

> ประพจน์ A และ B จะเป็น *logically equivalent* ก็ต่อเมื่อ A และ B มี *truth value* เดียวกันเสมอทุกกรณี

ตัวอย่าง 1.7.4

$A \leftrightarrow B$ เป็น *logically equivalent* กับ $(A \to B)$ & $(B \to A)$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \& (B \to A)$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T

ทฤษฎี 1.2

> A เป็น *logically equivalent* กับ B ก็ต่อเมื่อ
> $A \leftrightarrow B$ เป็น *tautology*

พิสูจน์ $A \leftrightarrow B$ จะมี *truth value* เป็นจริงก็ต่อเมื่อทั้ง A และ B มี *truth value* เหมือนกันด้วยเหตุนี้ $A \leftrightarrow B$ เป็น *tautology* ก็ต่อเมื่อ A และ B มี *truth value* เหมือนกันเสมอ

ข.ต.พ.

ตัวอย่าง 1.7.5

จงแสดงว่า $A \to (B \to C)$ เป็น *logically equivalent* กับ $(A \,\&\, B) \to C$

วิธีทำ จะต้องแสดงให้เห็นว่า $\underbrace{(A \to (B \to C)) \longleftrightarrow ((A \,\&\, B) \to C)}_{K}$ เป็น *tautology*

A	B	C	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	$A \,\&\, B$	$(A \,\&\, B) \to C$	K
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้แทนด้วยสัญลักษณ์

   ก) เงื่อนไขที่จำเป็นที่ x จะเป็นจำนวนปฐมคือ x ต้องเป็นเลขคี่หรือ $x = 2$

   ข) เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องคือ ต้องสามารถหาอนุพันธ์ได้

   ค) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการที่นักศึกษา จะได้รับการเลือกให้ดำรงตำแหน่งคือนักศึกษาต้องได้รับคะแนนเสียงสนับสนุนอย่างน้อย 65 คะแนน

   ง) ฝนกำลังตกแต่ก็ยังมีแดด

   จ) ชวนชมจะต้องตายวันนี้นอกเสียจากว่าการรักษาจะได้ผลเต็ม 100%

   ฉ) ถ้าขึ้นภาษีหรือรัฐบาลใช้จ่ายน้อยลง แล้วภาวะเงินเฟ้อจะไม่เกิดขึ้นในปีนี้

2. จากประพจน์ต่าง ๆ ต่อไปนี้ จงถอดวงเล็บออกไปให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

   ก) $\{ [(A \vee B) \rightarrow (\neg C)] \vee [(((\neg B) \& C) \& B)]\}$

   ข) $\{[A \& \neg(\neg B))] \longleftrightarrow [B \leftrightarrow (C \vee B)]\}$

   ค) $[(B \leftrightarrow (C \vee B)) \longleftrightarrow (A \& (\neg(\neg B)))]$

3. จงเขียนตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   ก) $(A \vee \neg B) \rightarrow (C \& A)$

   ข) $(A \longleftrightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow A)$

   ค) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \vee \neg A$

   ง) $(\neg A \& \neg B) \rightarrow (B \leftrightarrow C)$

4. จงแสดงว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็น *tautology*

ก) $(A \leftrightarrow (A \,\&\, \neg A)) \leftrightarrow \neg A$

ข) $((A \to B) \to C) \to ((C \to A) \to (D \to A))$

ค) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)$

5. จงแสดงว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็น Contradiction

ก) $(A \vee B) \,\&\, (A \vee \neg B) \,\&\, (\neg A \vee B) \,\&\, (\neg A \vee \neg B)$

ข) $[(A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, \neg C)] \leftrightarrow [(\neg A \,\&\, C) \vee (\neg B \,\&\, \neg C)]$

6. สำหรับประพจน์ต่อไปนี้ จงหาประพจน์ที่ *logically equivalent*

ก) $(A \vee B) \,\&\, (\neg B \vee C)$

ข) $\neg A \vee (B \to \neg C)$

ค) $(A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, C)$

ง) $(A \vee B) \leftrightarrow \neg C$

จ) $B \to (A \vee \neg C)$

ฉ) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

7 [illegible] $\neg$, $\&$, $\vee$ ซึ่งกำหนดทรูธฟังก์ชัน $f(A,B,C)$ ดังตารางข้างล่างนี้

A	B	C	f(A,B,C)
T	T	T	T
F	T	T	F
T	F	T	F
F	F	T	F
T	T	F	F
F	T	F	F
T	F	F	T
F	F	F	F