บทที่ 6
อนุกรมฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์

ถ้าโดเมนของตัวแปรไม่มีขอบเขตจำกัด เช่น $0 < x < \infty$ หรือ $-\infty < x < \infty$ เรามีวิธีการหาคำตอบของปัญหาขอบเขตเหล่านี้ ในตอนแรกจะกล่าวถึงการหาคำตอบของสมการคลื่นโดยวิธีเฉพาะ และจะกล่าวถึงการหาคำตอบโดยวิธีทั่ว ๆ ไป คือใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) แก้ปัญหาขอบเขตต่าง ๆ นอกจากนั้นยังได้พิจารณาถึงปัญหาขอบเขตที่มีตัวแปรหลายตัวโดยอาศัยการหาคำตอบจากอนุกรมฟูเรียร์ หรือการใช้คุณสมบัติความเป็นออร์โทโกนัลของฟังก์ชันเจาะจง

6.1 ปัญหาค่าเริ่มต้น (The initial value problem)

สำหรับสมการคลื่นซึ่งมีปัญหาค่าเริ่มต้นเขียนได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$

I.C. $u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$

ดังได้ทราบจากการจำแนกสมการจะเห็นว่าสมการคลื่นจะเป็นสมการชนิดไฮเพอร์โบลิค ซึ่งมีคำตอบทั่วไปคือ

$$u(x, t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

หาอนุพันธ์ของ $u(x, t)$ เทียบกับ t

$$u_t(x, t) = -cF'(x-ct) + cG'(x+ct)$$

จาก I.C. จะได้

$$u(x, 0) = f(x) = F(x) + G(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = -cF'(x) + cG'(x) \qquad \text{..........(6.1.1)}$$

$$\therefore \quad F(x) + G(x) = f(x) \qquad \text{..........(6.1.2)}$$

อินทิเกรต (6.1.1) จะได้

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi \qquad \text{..........(6.1.3)}$$

(6.1.2) + (6.1.3) $$F(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

$$F(x-ct) = \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\xi)\, d\xi$$

(6.1.2) − (6.1.3) $$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

$$G(x+ct) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\xi)\, d\xi$$

แทนค่า $F(x-ct)$ และ $G(x+ct)$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2}\{ f(x-ct) + f(x+ct) \} + \frac{1}{2c}\left[-\int_0^{x-ct} g(\xi)\, d\xi + \int_0^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2}\{ f(x-ct) + f(x+ct) \} + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{0} g(\xi)\, d\xi + \int_0^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2}\{ f(x-ct) + f(x+ct) \} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของ

D.E. $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$

I.C. $u(x, 0) = \sin x$

$u_t(x, 0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$

วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = \sin x, \ g(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2}\{ f(x-ct) + f(x+ct) \} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{2}(\sin (x-ct) + \sin (x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos \xi\, d\xi \\
&= \sin x \cos ct + \frac{1}{2c}[\sin (x+ct) - \sin (x-ct)] \\
&= \sin x \cos ct + \frac{1}{c}\cos x \sin ct
\end{aligned}$$

สำหรับสมการคลื่นซึ่งมีโดเมน $0 < x < \infty$ จะมีปัญหาค่าเริ่มต้นดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \ 0 < x < \infty, \ t > 0$

B.C. $u(0, t) = h(t), \ t > 0$

I.C. $u(x, 0) = f(x), \ u_t(x, 0) = g(x), \ 0 < x < \infty$

วิธีหาคำตอบ เนื่องจากในที่นี้ $x > 0, \ t > 0$ และ $c > 0$ ดังนั้น

$$\therefore \quad x + ct > 0$$

จากคำตอบทั่วไปของสมการคลื่นจะได้

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \qquad \text{..........(6.1.4)}$$

ดังนั้นจะเห็นว่า $G(x+ct)$ หาค่าได้

ถ้า $x > ct$ จะได้ว่า $x - ct > 0$ ดังนั้น $F(x - ct)$ หาค่าได้

ซึ่งจะได้ว่า สำหรับ $x > ct$ จะหา $u(x, t)$ ได้โดยวิธีของ **ตัวอย่างที่ 1** ซึ่งได้คำตอบเป็น

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi$$

พิจารณา $x < ct$ หรือ $x - ct < 0$

จาก (6.1.4) ใช้ I.C. แล้วหา $F(x)$, $G(x)$ เหมือนตัวอย่าง 6.1.1

จะได้ $$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

และ $$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)\, d\xi$$

เปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้ $x = \eta$

$$F(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c}\int_0^\eta g(\xi)\, d\xi \qquad \text{..........(6.1.5)}$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) + \frac{1}{2c}\int_0^\eta g(\xi)\, d\xi \qquad \text{..........(6.1.6)}$$

F และ G หาค่าได้สำหรับ $\eta > 0$ (ในที่นี้ $x > 0$ เท่านั้น)

สำหรับ $\eta < 0$

จาก B.C. $u(0, t) = F(-ct)+G(ct) = h(t)$

ให้ $\eta = -ct$ ดังนั้น $\eta < 0$

$F(\eta)+G(-\eta) = h(\frac{\eta}{-c}),\ \eta < 0$

สำหรับ $\eta < 0$ จะได้ $-\eta > 0$ ดังนั้น $G(-\eta)$ หาค่าได้เท่ากับสมการ (6.1.6) ดังนั้น

$$F(\eta) = h(\frac{\eta}{-c})-G(\eta)$$

$$= h(\frac{\eta}{-c})-\frac{1}{2}f(\eta)-\frac{1}{2c}\int_0^\eta g(\xi)\,d\xi \quad \text{..........(6.1.7)}$$

แทนค่า $F(\eta)$ ด้วย (6.1.7) และ $G(\eta)$ ด้วย (6.1.6) ใน (6.1.4)

จะได้ $$u(x, t) = h(t-\frac{x}{c})+\frac{f(ct+x)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(\xi)\,d\xi,\ x < ct$$

ดังนั้น
$$u(x, t) = \begin{cases} h(t-\frac{x}{c})+\frac{f(ct+x)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(\xi)\,d\xi, & 0 < x < ct \\ \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi, & x > ct \end{cases}$$

แบบฝึกหัดที่ 6.1

1. จงหาคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยใช้คำตอบ $u(x, t)$ จากตัวอย่าง 6.1.1

   1.1 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \; u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = 2$

   1.2 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \; u(x, 0) = x, \; u_t(x, 0) = \sin x$

   1.3 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \; u(x, 0) = \cos x, \; u_t(x, 0) = x$

   1.4 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \; u(x, 0) = x^2, \; u_t(x, 0) = x$

   1.5 $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \; u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| < L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$

2. จงแก้ปัญหาขอบเขต โดยใช้วิธีในหัวข้อ 6.1

   D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \; 0 < x < \infty, \; t > 0$

   B.C. $u_x(0, t) = 0$

   I.C. $u(x, 0) = f(x), \; u_t(x, 0) = g(x), \; 0 < x > \infty$

3. จงแก้ปัญหาขอบเขตโดยใช้วิธีในหัวข้อ 6.1

   D.E. $u_{tt} = c^2u_{xx}, \; 0 < x < \infty, \; t > 0$

   B.C. $u_x(0, t) = h(t)$

   I.C. $u(x, 0) = 0, \; u_t(x, 0) = 0, \; 0 < x < \infty$

4. จงหาคำตอบของ $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

   $u(x, 0) = \sin x$

   $u_y(x, 0) = x$

6.2 อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series)

ในการแก้ปัญหาขอบเขตซึ่งมีโดเมนแบบไม่มีขอบเขตจำกัดจะใช้วิธีการแปลงของฟูเรียร์ ดังนั้นต้องอาศัยความรู้เรื่องอนุกรมฟูเรียร์ในการหาสูตร นอกจากนั้นอนุกรมฟูเรียร์ยังมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาฟิสิกส์ต่าง ๆ ด้วย จึงควรทราบเกี่ยวกับอนุกรมฟูเรียร์พอสังเขป

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งหาค่าได้ทุก ๆ x เรียกว่าเป็นฟังก์ชันมีคาบครบรอบ p (periodic function) ถ้า

$$f(x+p) = f(x) \text{ เมื่อ } p \neq 0 \text{ ทุก ๆ } x$$

ตัวอย่างที่ 1 $\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\therefore$ $\cos x$ เป็นฟังก์ชันมีคาบครบรอบ 2π

2. $\sin n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = \sin(nx+2\pi) = \sin nx$

$\therefore$ $\sin nx$ มีคาบครบรอบ $\frac{2\pi}{n}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 3 \\ -2, & -3 < x < 0 \end{cases}$ มีคาบครบรอบเท่ากับ 6

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งมีคาบครบรอบ 2π และอินทิเกรตได้บนทุก ๆ ช่วงจำกัด (finite interval) และเขียน $f(x)$ ได้ในรูปของ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \; -\pi < x < \pi \qquad \text{..........(6.2.1)}$$

ในที่นี้ต้องการหา a_n, b_n

การหา a_0

อินทิเกรต (6.2.1) จาก $-\pi$ ถึง π

$$\because \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$$

$$\text{และ} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$$

$$\therefore \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = a_0 \frac{x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

การหา a_n

คูณสมการ (6.2.1) ด้วย $\cos n x$ แล้วอินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\,x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos n\,x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos mx \cos n\,x dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin mx \cos nx\,dx + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

เนื่องจาก $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m \neq n \\ \pi & \text{ถ้า } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{ถ้า } m = n = 0 \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

และ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m \neq n \\ \pi & \text{ถ้า } m = n \neq 0 \end{cases}$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots (6.2.2)$$

ข้อสังเกต ถึงแม้ว่า a_0 และ a_n จะใช้สูตรเดียวกันได้คือ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ แต่เวลาหาค่า a_0 ต้องแยกพิจารณาต่างหาก เพราะ a_0 อาจจะไม่เท่ากับ a_n , $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ เช่น

$f(x) = 1 + x$ บน $[-\pi, \pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)_{-\pi}^{\pi} = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad , n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1+x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(1+x)\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

ดังนั้น $a_0 \neq a_n \quad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

การหา b_n

ทำในทำนองเดียวกับการหา a_n โดยคูณสมการ (6.2.1) ด้วย sin nx แล้วอินทิเกรตจาก $-\pi$ ถึง π จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots. (6.2.3)$$

นิยาม อนุกรมซึ่งอยู่ในรูป (6.2.1) ซึ่งสามารถหา a_n ได้จาก (6.2.2) และ b_n ได้จาก (6.2.3) เรียกว่าเป็น **อนุกรมฟูเรียร์** (Fourier series) ของ f(x) บน $[-\pi, \pi]$

โดยทั่วไปถ้าฟังก์ชัน f(x) นิยามได้และอินทิเกรตได้บน $[-L, L]$ เมื่อ L เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะนิยามอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) โดย

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad x \in [-L, L] \quad \ldots\ldots (6.2.4)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad \ldots\ldots. (6.2.5)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad n = 1, 2, \ldots.. \qquad \ldots\ldots. (6.2.6)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f(x) กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } -\pi < x \leqslant 0 \\ x & \text{เมื่อ } 0 < x < \pi \end{cases}$$

วิธีทำ อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad -\pi < x < \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{nx\sin nx + \cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{-nx\cos nx + \sin nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n}$$

ถ้า n เป็นเลขคู่ $a_n = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$

ถ้า n เป็นเลขคี่ $a_n = \frac{-2}{\pi n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$

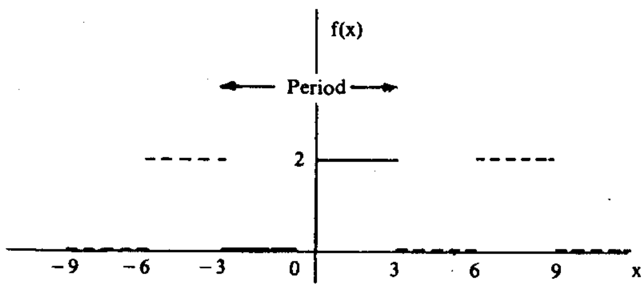
ดังนั้น $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx\right]$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) + \left(-\frac{\sin 2x}{2}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ f(x) ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

วิธีทำ ถ้าเขียนกราฟของ f(x) จะได้



ในที่นี้คาบครบรอบ = 2L = 6 ดังนั้น L = 3

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ , } n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0} 0 \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_{0}^{3} 2 \cos \frac{n\pi x}{3} dx\right]$$

$$= 0$$

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 2\,dx = 2$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} 2\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{0}^{3} 2\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)_0^3 = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$$

$$= 1 + \frac{4}{n\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{3} + \ldots\ldots\right)$$

ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and Odd function)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามได้บนช่วง $-L \leqslant x \leqslant L$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันคู่** ก็ต่อเมื่อ

$$f(-x) = f(x)$$

และเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันคี่** ก็ต่อเมื่อ

$$f(-x) = -f(x)$$

ตัวอย่าง 1. $f(x) = x^2$

$$\because f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

ดังนั้น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่

2. $\cos x$ ก็เป็นฟังก์ชันคู่

3. ฟังก์ชัน x, $\sin ax$ เป็นฟังก์ชันคี่

นอกจากนั้นจะเห็นว่า

1. ผลบวกของฟังก์ชันคู่เป็นฟังก์ชันคู่

2. ผลบวกของฟังก์ชันคี่เป็นฟังก์ชันคี่

3. ผลคูณของฟังก์ชันคู่ 2 ฟังก์ชัน หรือ ผลคูณของฟังก์ชันคี่ 2 ฟังก์ชันจะได้ฟังก์ชันคู่

4. ผลคูณของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ได้ฟังก์ชันคี่ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ง่าย ๆ โดยใช้นิยาม

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชัน บน $[-L, L]$ จะได้ว่า

1. $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$ ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่

และ 2. $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0$ ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่

พิสูจน์ $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \int_{-L}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{L} f(x)\, dx$

ให้ $x = -\xi,\ dx = -d\xi$

$$\int_{-L}^{0} f(x)\, dx = -\int_{L}^{0} f(-\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{0}^{L} f(-\xi)\, d\xi$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \int_{0}^{L} f(-\xi)\, d\xi + \int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ $\therefore f(-\xi) = f(\xi)$

นั่นคือ $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ $f(-\xi) = -f(5)$

ดังนั้น $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ เราสามารถนำไปหาอนุกรมฟูเรียร์ซายน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ได้ดังนี้

อนุกรมฟูเรียร์ซายน์ (Fourier sine series)

พิจารณา f(x) เมื่อ f(x) **เป็นฟังก์ชันคี่**

จากอนุกรมฟูเรียร์ (6.2.4) พิจารณา a_n และ b_n จาก (6.2.5) และ (6.2.6) จะได้

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

เนื่องจาก $\cos\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ = ฟังก์ชันคี่

และ $\sin\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ = ฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

และอนุกรมฟูเรียร์ จะมีแต่เทอมซายน์เท่านั้น ซึ่งเรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์ซายน์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leqslant x \leqslant L$$

เมื่อ $$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ (Fourier cosine series)

ถ้า f(x) **เป็นฟังก์ชันคู่** พิจารณา a_n และ b_n จาก (6.2.5) และ (6.2.6) เช่นเดียวกัน จะได้

$$f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} = \text{ฟังก์ชันคู่}$$

และ $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ = ฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$b_n = 0 \ \forall n$$

อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ $$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x,\ -\pi < x < \pi$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นจะได้อนุกรมฟูเรียร์ซายน์

ดังนั้น $a_n = 0\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$$

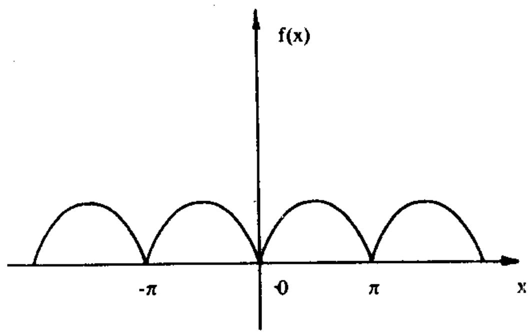
$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

ดังนั้น $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงกระจายฟังก์ชัน $|\sin x|$ เป็นอนุกรมฟูเรียร์

วิธีทำ กราฟของ $|\sin x|$



เนื่องจาก $|\sin x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $b_n = 0, n = 1, 2, \ldots\ldots$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x] \, dx$$

$$= \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi(1-n^2)}$$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

อนุกรมฟูเรียร์ $f(x) = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)}$

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งนิยามได้บน $0 \leq x \leq L$ เราสามารถกระจายฟังก์ชัน f(x) เป็นอนุกรมฟูเรียร์ซายน์ หรือ อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ ได้ทั้ง 2 แบบ ดังนี้

อนุกรมฟูเรียร์ซายน์แบบครึ่งช่วง (Half range Fourier sine series)

ให้ $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น g(x) เป็นฟังก์ชันคี่บน $-L < x < L$

ซึ่งจะได้อนุกรมฟูเรียร์ซายน์เป็น

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L$$

เมื่อ
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

แต่บน $0 < x < L$, $g(x) = f(x)$ ดังนั้นจะได้

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L$$

อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์แบบครึ่งช่วง (Half range Fourier cosine series)

ให้ $h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น h(x) เป็นฟังก์ชันคู่บน $-L < x < L$

ซึ่งจะได้
$$h(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L$$

แต่ $h(x) = f(x)$ บน $0 < x < L$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

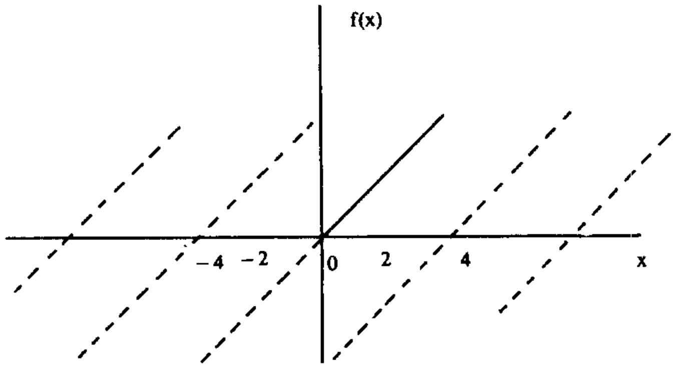
ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $f(x) = x, 0 < x < 2$ จงหาอนุกรมฟูเรียร์ซายน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์

วิธีทำ **อนุกรมฟูเรียร์ซายน์** มี $a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

กระจายฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่โดย $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ x, & -2 < x < 0 \end{cases}$ ซึ่งมีคาบครบรอบเท่ากับ 4

ดังนั้น $2L = 4$

$L = 2$



$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[x\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

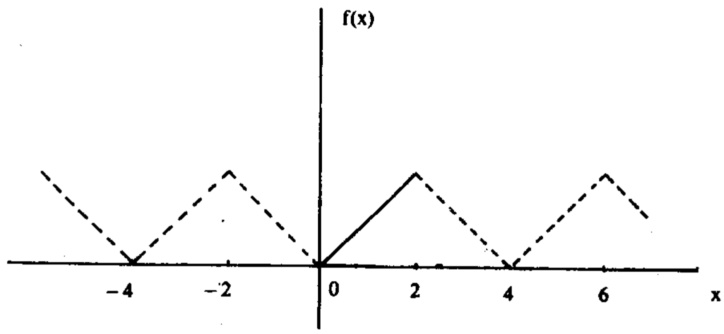
$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \ldots\ldots \right)$$

อนุกรมฟูเรียร์โคซายน์

กระจายฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่โดยให้

$$f(x) = \begin{cases} x , & 0 < x < 2 \\ -x , & -2 < x < 0 \end{cases}$$

ซึ่งเขียนกราฟได้



ดังนั้น $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \left[x\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{ถ้า } n \neq 0$$

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\ldots\right)$$

ข้อสังเกต การที่ขยายช่วงฟังก์ชัน $-2 < x < 0$ ด้วยเพียงเพื่อช่วยในการเขียนกราฟเท่านั้น แต่มิได้เอามาคำนวณหาค่า a_n หรือ b_n เลย

แบบฝึกหัดที่ 6.2

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

   1.1 $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 4 \\ -2, & -4 < x < 0 \end{cases}$

   ซึ่งมีคาบครบรอบ 8

   1.2 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

   ซึ่งมีคาบครบรอบ 2π

2. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

   2.1 $x^2 + 6x^4$

   2.2 $x + 3x^2 - x^3$

   2.3 e^x

   2.4 $x^2 \sin x$

   2.5 $\sin h\ x$

3. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = x^2$ บน $[-\pi, \pi]$

   3.2 $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$

   3.3 $f(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \end{cases}$

   3.4 $f(x) = 2x - 1$ บน $[-1, 1]$

   3.5 $f(x) = x + x^2, \ -\pi < x < \pi$

   3.6 $f(x) = |x|, \ -4 \leqslant x \leqslant 4$

4. จงกระจาย $f(x) = \sin x , 0 < x < \pi$ เป็นอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์

5. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ซายน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคซายน์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $f(x) = 2x+1$ บน $[0, 1]$

5.2 $f(x) = \cos x , 0 < x < \pi$

5.3 $f(x) = x^3 , 0 < x < \pi$

5.4 $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 , & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

6.3 อินทิกรัลฟูเรียร์ (Fourier integrals)

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติ piecewise smooth บางช่วง $-\infty < x < \infty$ ดังนั้นสามารถแทน f(x) ในช่วง $-L < x < L$ ได้ด้วยอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right). \qquad \text{.......(6.3.1)}$$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$, n = 0, 1, 2, ...

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt\ , \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

แทนค่า a_n , b_n ใน (6.3.1)

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dt\right)\right.$$

$$\left. + \left(\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dt\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)\,dt$$

ถ้า f(x) อินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บน $(-\infty,\infty)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| = \frac{1}{2L}\left|\int_{-L}^{L} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$$

เมื่อ $L \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt \to 0$

ดังนั้นเมื่อให้ $L \to \infty$

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi}{L} (t-x)\, dt$$

ให้ $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$.

$$\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$$

ให้ $I(\lambda\ ;\ L) = \int_{-L}^{L} f(t) \cos \lambda(t-x)\, dt$

ดังนั้น $f(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I(\lambda_n\ ;\ L)\, \Delta\lambda$

เมื่อ $L\to\infty$ และ $\Delta\lambda\to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(\lambda_n\ ;\ L)\, \Delta\lambda = \int_{0}^{\infty} I(\lambda\ ;\ L)\, d\lambda$$

จะได้ $f(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} I(\lambda\ ;\ L)\, d\lambda$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-L}^{L} f(t) \cos \lambda\, (t-x)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda\, (t-x)\, dt \right| d\lambda$$

ดังนั้นสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

6.3.1 ทฤษฎี (Fourier Integral Theorem)

ถ้า f(x) นิยามได้บน $-\infty < x < \infty$ และมีคุณสมบัติ piecewise smooth.

และอินทิเกรตได้อย่างสมบูรณ์บน $(-\infty, \infty)$ แล้ว

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt\,d\lambda \qquad \text{....... (6.3.2)}$$

เรียกสมการ (6.3.2) ว่าสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์

ถ้า f ต่อเนื่องที่ ทุก ๆ x บน $(-\infty, \infty)$

$$f(x+) = f(x-) = f(x)$$

จะได้

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt\right] d\lambda \qquad \text{....... (6.3.3)}$$

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ซายน์ (Fourier sine intergral formula)

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt = \int_0^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt + \int_{-\infty}^0 f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt - \int_0^{-\infty} f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt - \int_0^{-(-\infty)} f(-t)\cos\lambda\,(-t-x)\,d(-t)$$

$$= \int_0^\infty f(t)\cos\lambda\,(t-x)\,dt - \int_0^\infty f(t)\cos\lambda\,(t+x)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,[(\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x) -$$

$$\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x\,]\,dt$$

$$= 2 \sin \lambda x \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t \, dt$$

ดังนั้น สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ซายน์ คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \sin \lambda t \, dt\right] d\lambda \qquad \text{....... (6.3.4)}$$

หรือ $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \sin \lambda t \, dt\right] d\lambda$

ให้ $F_s(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t \, dt$ .... **(6.3.5)**

เรียก $F_s(\lambda)$ ว่า การแปลงฟูเรียร์ซายน์ของ f (Fourier sine transform of f.)

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคซายน์ (Fourier cosine integral formula)

ถ้า f(x) **เป็นฟังก์ชันคู่จะได้ในทำนองเดียวกัน คือ**

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคซายน์

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \cos \lambda t \, dt\right] d\lambda \qquad \text{....... (6.3.6)}$$

หรือ $\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \cos \lambda t \, dt\right] d\lambda$

และเรียก $F_c(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \cos \lambda t \, dt$ .... **(6.3.7)**

ว่า การแปลงฟูเรียร์โคซายน์ของ f

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ซายน์ของ e^{-x}

วิธีทำ $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \lambda x \left[\int_0^\infty f(t)\sin \lambda t\, dt\right] d\lambda$$

ในที่นี้ $f(t) = e^{-t}$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \lambda x \left[\int_0^\infty e^{-t}\sin \lambda t\right] d\lambda$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin \lambda t\, dt = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\sin \lambda x\, d\lambda$$

6.4 การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transforms)

จากสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ (6.3.3)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos \lambda (t-x)\, dt\right] d\lambda$$

$$\because \cos \lambda(t-x) = \frac{1}{2}\left[e^{i\lambda(t-x)} + e^{-i\lambda(t-x)}\right]$$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{i\lambda(t-x)} dt\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}\, dt\, d\lambda$$

พิจารณาเปลี่ยนตัวแปร ให้ $\lambda = -\alpha$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}dt\right] d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha(t-x)}dt\right) d\alpha$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\lambda(t-x)}dt\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha(t-x)}dt\, d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\lambda(t-x)}dt\right] d\lambda \qquad \text{....... (6.4.1)}$$

เรียก f(x) ในรูปสมการ (6.4.1) ว่า อินทิกรัลฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt\right] d\lambda$$

ให้ $$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt \qquad \text{....... (6.4.2)}$$

ดังนั้น $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda \qquad \text{....... (6.4.3)}$$

เรียก $F(\lambda)$ จาก (6.4.2) ว่า การแปลงฟูเรียร์ของ f(x) (Fourier transform of f(x)
และ เรียก f(x) จาก (6.4.3) ว่า การแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $F(\lambda)$ (Inverse Fourier transform of $F(\lambda)$))

ตัวอย่างที่ 1 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| \geqslant a \end{cases}$$

วิธีทำ $$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda t} f(t)\, dt + \int_{-a}^{a} e^{i\lambda t} f(t)\, dt + \int_{a}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-a}^{a} e^{i\lambda t}dt$$

$$= \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{i\lambda \alpha} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\sin \lambda a$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า $\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+1}\, d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, x \geqslant 0$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \cos \lambda t\, dt\right] d\lambda$

$$\because \int_0^\infty e^{-t}\cos \lambda t\, dt = \frac{1}{\lambda^2+1}$$

ดังนั้น ให้ $f(x) = e^{-x}$

$$\therefore \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \lambda x \left[\int_0^\infty f(t) \cos \lambda t\, dt\right] d\lambda = e^{-x}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+1}\, d\lambda = e^{-x}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+1}\, d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \ x \geqslant 0$$

6.5 ทฤษฎีผลการประสาน (The convolution theorem)

ในการใช้การแปลงฟูเรียร์ แก้ปัญหาขอบเขตซึ่งมีโดเมนเป็นช่วงอนันต์ เราจะต้องหาการแปลงฟูเรียร์ $U(\lambda, t)$ ของฟังก์ชันซึ่งต้องการหา $u(x, t)$ คือ

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, t)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

ถ้าฟังก์ชัน $U(\lambda, t)$ **เป็นแบบง่าย ๆ ก็อาจจะหา** $\tilde{\tilde{u}}(x, t)$ **ได้ทันที แต่บางฟังก์ชันจะต้องเปลี่ยนโดยการแปลงให้อยู่ในรูปอื่นก่อนจึงจะสามารถหาคำตอบได้ ดังนั้นอาจจะต้องอาศัยทฤษฎีผลการประสานช่วย**

6.5.1 ทฤษฎีบท ถ้า $F(A)$, $G(\lambda)$, $H(I)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$, $g(x)$ และ $h(x)$ **ตามลำดับ ถ้า** $H(A) = F(A)\, G(A)$ **แล้วจะได้ว่า**

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \qquad \text{....... (6.5.1)}$$

พิสูจน์ $\because$ $H(\lambda)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $h(x)$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(1)\, G(A)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

แต่ $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda y} d\xi\right) G(1)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

เพราะว่า $f(\xi)$ **อินทิเกรตได้บน** $-\infty < \xi < \infty$ **และ**

$G(\lambda)$ **อินทิเกรตได้บน** $-\infty < \lambda < \infty$ **ดังนั้นสามารถสลับที่การอินทิเกรตได้**

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, e^{-i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right) d\xi$$

แต่ $$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

ดังนั้น $$g(x-\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)\, e^{-i\lambda(x-\xi)} d\lambda$$

$$\therefore\ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

นิยาม $h(x)$ ซึ่งหาได้จากสมการ (6.5.1) เรียกว่าผลการประสานของ $f(x)$ และ $g(x)$ และเขียนแทนด้วย $f(x) * g(x)$

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

นอกจากนั้นจะพบว่า $h(x)$ มีคุณสมบัติสลับที่กันได้คือ

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

ตัวอย่าง จงหาผลการประสาน $h(x)$ ของ $f(x)$ และ $g(x)$ เมื่อ

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{เมื่อ } |x| > a \end{cases}$$

วิธีทำ

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi + \int_{-a}^{a} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi + \int_{a}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{-a}^{a} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

$$= \begin{cases} 2a - |x|. & \text{ถ้า } |x| < 2a \\ 0 & \text{ถ้า } |x| \geqslant 2a \end{cases}$$

6.6 การหาคำตอบของปัญหาขอบเขตโดยวิธีการแปลงฟูเรียร์

สมการความร้อน เมื่อ $-\infty < x < \infty$ **จะเขียนปัญหาค่าเริ่มต้นได้ดังนี้**

ตัวอย่างที่ 1 D.E $u_t = ku_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x), -\infty < x < \infty$

$|u(x, t)| < m$ ค่าคงตัว

วิธีทำ สมมุติให้คำตอบของสมการคือ $u(x, t)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|\, dx < \infty, t > 0$

โดยการแปลงฟูเรียร์

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, t)\, e^{-i\lambda x} d\lambda \qquad \text{....... (6.6.1)}$$

เมื่อ

$$U(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{i\lambda x} dx \qquad \text{....... (6.6.2)}$$

หาอนุพันธ์ของ $U(\lambda, t)$ เทียบกับ t

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{i\lambda x} dx$$

$$= k \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t)\, e^{i\lambda x} dx$$

โดยใช้สูตรของกรีน

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\, [u_x e^{i\lambda x} - i\lambda u\, e^{i\lambda x}]_{-\infty}^{\infty} - \lambda^2 k \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\lambda x} dx$$

ถ้า $u_x(\pm\alpha, t) = 0, u(\pm\infty, 0) = 0$

ถ้า $u_x(\pm\infty, t) = 0,\ u(\pm\infty, 0) = 0$

ดังนั้น $$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda^2 k U$$

$$U(\lambda, t) = A\, e^{-\lambda^2 kt}$$

จาก I.C $$U(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\, e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx = F(\lambda)$$

ดังนั้น $$A = F(\lambda)$$

$$\therefore U(\lambda, t) = F(\lambda)\, e^{-\lambda^2 kt}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, t)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} F(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

ถ้าให้ $$W(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 kt}$$

ดังนั้น $$U(\lambda, t) = F(\lambda)\, W(\lambda, t)$$

จากทฤษฎีผลการประสาน

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, w(x - \xi, t)\, d\xi$$

ในที่นี้ต้องการหา $w(x, t)$

จาก $$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, t)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} (\cos \lambda x + i \sin \lambda x)\, d\lambda$$

แต่ $e^{-\lambda^2 kt}\sin \lambda x$ เป็นฟังก์ชันคี่ และ $e^{-\lambda^2 kt}\cos \lambda x$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}\sin \lambda x\, d\lambda = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}\cos \lambda x\, d\lambda = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}\cos \lambda x\, d\lambda$$

ดังนั้น $\quad w(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}\cos \lambda x\, d\lambda$

ให้ $\lambda = \frac{z}{\sqrt{kt}}$

$$w(x, t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{kt}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos \frac{xz}{\sqrt{kt}}\, dz$$

ให้ $\mu = \frac{x}{\sqrt{kt}}$ และ $\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos \mu z\, dz = H(\mu)$

ดังนั้น $\quad w(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{kt}} H(\mu)$

ในที่นี้ต้องการหา $H(\mu)$

$$\frac{dH}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z\, dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} -ze^{-z^2} \sin \mu z\, dz$$

$$= -\left[-\frac{e^{-z^2}}{2} \sin \mu z\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{2}\, \mu \cos \mu z\, dz$$

$$= -\frac{\mu}{2} H(\mu)$$

$$\frac{dH}{d\mu} + \frac{\mu}{2} H(\mu) = 0$$

แก้สมการจะได้ $$H(\mu) = B e^{-\mu^2/4}$$

ถ้า $$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$H(0) = B = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ดังนั้นจะได้ $$H(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\mu^2/4}$$

ดังนั้น $$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-(x-\xi)^2/4kt} d\xi$$

ถ้าพิจารณาช่วงของ x บนครึ่งช่วงอนันต์ จะได้ปัญหาขอบเขตของสมการความร้อนดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 D.E $u_t = ku_{xx}$, $0 < x < \infty$, $0 < t$

B.C $u(0, t) = 0$, $t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < \infty$

ในการหาคำตอบให้ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการซึ่ง $\int_0^{\infty} |u(x, t)|\, dx < \infty$, $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_s(\lambda, t) \sin \lambda x \, d\lambda$$

เมื่อ $U_s(\lambda, t) = \int_0^{\infty} u(x, t) \sin \lambda x \, dx$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} = \int_0^{\infty} u_t(x, t) \sin \lambda x \, dx$$

$$= k \int_0^{\infty} u_{xx} (x, t) \sin \lambda x \, dx$$

$$= k \left[u_x \sin \lambda x - k \lambda u \cos \lambda x\right]_0^{\infty} - k\lambda^2 \int_0^{\infty} u \sin \lambda x \, dx$$

ถ้า $u(\infty, t) = u_x(\infty, t) = 0$

จะได้ $\dfrac{\partial U_s}{\partial t} = -\lambda^2 k \, U_s$

$$U_s(\lambda, t) = A e^{-\lambda^2 kt}$$

$$U_s(\lambda, 0) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = F_s(\lambda)$$

$$\therefore A = F_s(\lambda)$$

$$U_s(\lambda, t) = F_s(\lambda) e^{-\lambda^2 kt}$$

ดังนั้น $u(x, t) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} F_s(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda$

สมการคลื่น เมื่อ $-\infty < x < \infty$ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้นดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 D.E $\quad u_{tt} = c^2 u_{xx}\ ,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$

I.C $\quad u(x, 0) = f(x)\ ,\ -\infty < x < \infty$

$u_t(x, 0) = g(x)$

วิธีทำ วิธีทำเหมือนกับสมการความร้อน ให้ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการซึ่ง

$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx < \infty,\ t > 0$

โดยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, t)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

เมื่อ

$$U(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{i\lambda x} dx$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t)\, e^{i\lambda x} dx$$

$$= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t)\, e^{i\lambda x} dx$$

ถ้า $\quad u_x(\pm\infty, t) = 0,\ u(\pm\infty, t) = 0$ **จะได้**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -c^2 \lambda^2 U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c^2 \lambda^2 U = 0$$

จะได้ $\quad U(\lambda, t) = A \sin c\lambda t + B \cos c\lambda t$

$$U_t(\lambda, t) = c\lambda A \cos c\lambda t - c\lambda B \sin c\lambda t$$

$$U(\lambda, 0) = B = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\, e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}dx = F(\lambda)$$

$$U_t(\lambda, t) = c\lambda A = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, 0)\, e^{i\lambda x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{i\lambda x}dx = G(\lambda)$$

$$\therefore\ A = \frac{G(\lambda)}{c\lambda}$$

$$U(\lambda, t) = F(\lambda) \cos c\lambda t + G(\lambda) \frac{\sin c\lambda t}{c\lambda}$$

ดังนั้น $$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(\lambda) \cos c\lambda t + G(\lambda) \frac{\sin c\lambda t}{c\lambda}\right] e^{-i\lambda x}d\lambda$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาคำตอบของสมการลาปลาซ

D.E $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$

B.C $u(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < \infty$

$|u(x, y)| < M$, $-\infty < x < \infty, 0 < y < \infty$

ปัญหานี้มีชื่อว่า Dirichlet's problem สำหรับสมการของลาปลาซ

วิธีทำ ให้คำตอบของสมการคือ $u(x, y)$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|dx < \infty$

โดยการแปลงฟูเรียร์

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, y)\, e^{-i\lambda x}d\lambda$$

เมื่อ $U(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)\ e^{i\lambda x}dx$

หาอนุพันธ์ของ $U(\lambda, y)$ เทียบกับ y 2 ครั้งจะได้

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}\ e^{i\lambda x}dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}\ e^{i\lambda x}dx$$

โดยใช้สูตรของกรีน และให้

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x, y) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x, y) = 0,\ 0 < y < \infty$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -[u_x e^{i\lambda x} - i\lambda u e^{i\lambda x}]_{-\infty}^{\infty} + \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} u\ e^{i\lambda x}dx$$

$$= \lambda^2 U$$

หรือ $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda^2 U = 0$

$$U(\lambda, y) = A\ e^{-\lambda y} + B\ e^{\lambda y}$$

แต่เนื่องจาก $u(x, y)$ มีขอบเขต ดังนั้น $U(\lambda, y)$ มีขอบเขตเมื่อ $y\to\infty$ ดังนั้นให้ $B = 0$

$$U(\lambda, y) = A\ e^{-|\lambda|y},\ -\infty < \lambda < \infty$$

$$U(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)\ e^{i\lambda x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx = F(\lambda)$$

$$A = F(\lambda)$$

$$U(\lambda, y) = F(\lambda)\, e^{-|\lambda| y}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, y)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

หรือ $$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi\right) e^{-|\lambda| y}\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

เนื่องจาก $e^{-|\lambda| y}$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$

และ $F(\lambda)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ $f(x)$
โดยทฤษฎีผลการประสาน จะได้

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) . \frac{y}{\pi((x-\xi)^2 + y^2)} d\xi$$

หรือ $$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \qquad \text{....... (6.6.3)}$$

เรียกสมการ (6.6.3) ว่า Poisson's integral formula for the half plane.

สำหรับโดเมนซึ่งเป็นครึ่งช่วงอนันต์ ก็จะอาศัยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ซายน์หรือสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคซายน์

ตัวอย่างที่ 5 D.E $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$

B.C $u(0, t) = h(t)$, $t > 0$

I.C $u(x, 0) = 0$

$u_t(x, 0) = 0$, $0 < x < \infty$

วิธีทำ จะเห็นว่าตัวอย่างนี้เป็นสมการชนิดมี B.C ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

ให้ $u(x, t)$ เป็นคำตอบของสมการซึ่ง $\int_0^\infty |u(x, t)|\, dt < \infty$, $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(\lambda, t) \sin \lambda x \, d\lambda$$

เมื่อ $$U(\lambda, t) = \int_0^\infty u(x, t) \sin \lambda x \, dx$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \int_0^\infty u_{tt} \sin \lambda x \, dx$$

$$= \int_0^\infty u_{xx} \sin \lambda x \, dx$$

$$= [u_x \sin \lambda x - \lambda_u \cos \lambda_x]_0^\infty - \lambda^2 U$$

ถ้า $$u_x(\infty, t) = u(\infty, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \lambda u\,(0, t) - \lambda^2 U$$

$$= \lambda h(t) - \lambda^2 U$$

หรือ $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \lambda^2 U = \lambda h(t)$

โดยมี $U(\lambda, 0) = 0$

$U_t(\lambda, 0) = 0$

ซึ่งจะได้คำตอบเป็น $U(\lambda, t) = \int_0^t h(\tau) \sin \lambda(t-\tau)\, d\tau$

$$\therefore u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t h(\tau) \sin \lambda\,(t-\tau)\, d\tau\, d\lambda$$

ถ้าให้ $\xi = t - \tau$ จะได้

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t h(t-\xi) \sin \lambda\xi \sin \lambda x\, d\xi\, d\lambda$$

ให้
$$H(\xi) = \begin{cases} h(t-\xi), & 0 < \xi < t \\ 0, & t < \xi \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty H(\xi) \sin \lambda\xi \sin \lambda x\, d\xi\, d\lambda$$

โดยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ซายน์

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty H(\xi) \sin \lambda\xi \sin \lambda x\, d\lambda = H(x)$$

ดังนั้น

$$u(x, t) = \begin{cases} h(t-x), & 0 < x < t \\ 0, & t < x \end{cases}$$

ข้อสังเกต

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า เป็นกรณีเฉพาะของตัวอย่างที่ 3 หัวข้อ 6.1 ในที่นี้ $f(x) = g(x) = 0$ ซึ่งจะได้คำตอบเหมือนกัน

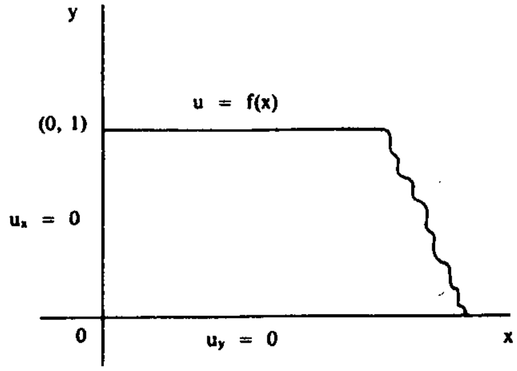
ตัวอย่างที่ 6 จงหา $u(x, y)$ ของปัญหา

D.E $u_{xx} + u_{yy} = 0 , 0 < x < \infty, 0 < y < 1$

B.C $u_x(0, y) = 0$

I.C $u_y(x, 0) = 0$

$u(x, 1) = f(x)$



วิธีทำ โดยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคซายน์

ให้ $$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_c(\lambda, y) \cos \lambda x \, d\lambda$$

เมื่อ $$U_c(\lambda, y) = \int_0^\infty u(x, y) \cos \lambda x \, dx$$

$$\frac{\partial^2 U_c}{\partial y^2} = \int_0^\infty u_{yy} \cos \lambda x \, dx$$

$$= -\int_0^\infty u_{xx} \cos \lambda x \, dx$$

$$= -[u_x \cos \lambda x + \lambda u \sin \lambda x]_0^\infty + \lambda^2 \int u \cos \lambda x \, dx$$

แต่ $u_x(\infty, y) = u(\infty, y) = 0$

และ $u_x(0, y) = 0$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 U_c}{\partial y^2} = \lambda^2 U_c$$

หรือ $$\frac{\partial^2 U_c}{\partial y^2} - \lambda^2 U_c = 0$$

คำตอบคือ $U_c(\lambda, y) = A \cos h\, \lambda y + B \sin h\, \lambda y$

$$\frac{\partial U_c}{\partial y}(\lambda, y) = \lambda A \sin h\, \lambda y + \lambda B \cos h\, \lambda y$$

จาก $u_y(x, 0) = 0$ จะได้ $\frac{\partial U_c}{\partial y}(\lambda, 0) = 0 = B$

ดังนั้น $U_c(\lambda, y) = A \cos h\, \lambda y$

$$U_c(\lambda, 1) = \int_0^\infty u(x, 1) \cos \lambda x\, dx$$

$$= \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x\, dx$$

$$\therefore\ A \cosh \lambda = \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x\, dx = F_c(\lambda)$$

$$A = \frac{F_c(\Lambda)}{\cosh \lambda}$$

$$U_c(\lambda, y) = \frac{F_c(\lambda) \cosh \lambda\ y}{\cosh \lambda}$$

ดังนั้น $$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U_c(\lambda, y) \cos \lambda x \, d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_c(\lambda) \cos h\, \lambda y \cos \lambda x}{\cos h\, \lambda} d\lambda$$

ถ้ากำหนดให้ $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

จะได้ $$F_c(\lambda) = \int_0^1 \cos \lambda x \, dx$$

$$= \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\Big|_0^1 = \frac{\sin \lambda}{\lambda}$$

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda \cos h\, \lambda y \cos \lambda x}{\lambda \cosh \lambda} d\lambda$$

แบบฝึกหัดที่ 6.3

1. จงหาการแปลงฟูเรียร์ซายน์ และ การแปลงฟูเรียร์โคซายน์ของ $f(x)$ ถ้า

   1.1 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & x \geqslant 1 \end{cases}$

   1.2 $f(x) = e^{-ax}$

2. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ จงแสดงว่า

   2.1 $F(A) = \int_0^{\infty} f(t) \cos At \, dt$

   2.2 $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos ix \, d\lambda$

3. ถ้า $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ จงหา $f(x)$ ของ

   3.1 $F(a\lambda)$

   3.2 $e^{i\lambda b} F(\lambda)$

   3.3 $\frac{a}{\lambda^2 + a^2}, \; a > 0$

4. จงแก้ปัญหาขอบเขตของ

   D.E $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$

   B.C $u_x(0, t) = f(t)$, $t > 0$

   I.C $u(x, 0) = 0$, $0 < x < \infty$

5. จงแก้ปัญหาขอบเขต

   D.E $u_t = ku_{xx}$; $0 < x < \infty, t > 0$

   B.C $u_x(0, t) = 0$

   I.C $u(x, 0) = e^{-\alpha x}$, $0 < x < \infty$, $\alpha > 0$

6. จงแก้ปัญหาขอบเขตโดยวิธีการแปลงฟูเรียร์

6.1 D.E $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < \infty, t > 0$

B.C $u_x(0, t) = 0$, $t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 < x < \infty$

6.2 จงแสดงว่าคำตอบใน (6.1) สามารถเขียนได้ในรูป

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+ct)+f(ct-x)}{2}, & 0 < x < ct \\ \dfrac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}, & x > ct \end{cases}$$

7. จงหาคำตอบของ

7.1 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < \infty$, $0 < y < 1$

$u_x(0, y) = 0$

$u_y(x, 0) = 0$

$u(x, 1) = e^{-x}$

7.2 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < 1$, $y > 0$

$u_y(x, 0) = 0$

$u(0, y) = 0$

$u_x(1, y) = f(y)$

6.7 ปัญหาขอบเขตซึ่งมีตัวแปรหลายตัว

ในการแก้ปัญหาขอบเขตของสมการซึ่งมีตัวแปรมากกว่าสองตัวขึ้นไปก็ใช้วิธีการคล้ายกับการแก้ปัญหาขอบเขตที่กล่าวมาแล้ว โดยอาศัยการแยกตัวแปรก่อนแล้วแก้สมการหาค่าเจาะจง และฟังก์ชันเจาะจง แล้วหาคำตอบในรูปอนุกรมอนันต์ดังตัวอย่าง

สมการความร้อน

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของปัญหาขอบเขต

D.E $u_t = k(u_{xx}+u_{yy}),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0$

B.C $\left.\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0 \\ u_x(a, y, t) &= 0 \end{aligned}\right\}\quad 0 < y < b,\ t > 0$

$\left.\begin{aligned} u_y(x, 0, t) &= 0 \\ u_y(x, b, t) &= 0 \end{aligned}\right\}\quad 0 < x < a,\ t > 0$

I.C $u(x, y, 0) = f(x, y),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b$

วิธีทำ ให้คำตอบของสมการคือ $u(x, y, t) = T(t)\,\varphi(x, y)$

จาก D.E จะได้ $T'(t)\,\varphi(x, y) = k\,(\varphi_{xx}(x, y)+\varphi_{yy}(x, y))\,T(t)$

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{1}{\varphi(x, y)}\,(\varphi_{xx}(x, y)+\varphi_{yy}(x, y)) = -\lambda$$

จะได้ $T'+\lambda kT = 0$ .... (6.7.1)

และ D.E $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\lambda\varphi = 0$ .... (6.7.2)

B.C $\varphi(0, y) = 0$

$\varphi_x(a, y) = 0$

$\varphi_y(x, 0) = 0$

$\varphi_y(x, b) = 0$

สำหรับสมการ (7.1.2) ใช้วิธีแยกตัวแปรอีกครั้งหนึ่ง โดยใช้

$$\varphi(x, y) = X(x)\,Y(y)$$

จะได้ $X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$

$$\frac{-1}{X}(X'' + \lambda X) = \frac{Y''}{Y} = -\mu$$

จะได้ $X'' + (\lambda - \mu)X = 0 \ , \ 0 < x < a$ .... (6.7.3)

เงื่อนไข $X(0) = 0$

$X'(a) = 0$

และ $Y'' + \mu Y = 0 \ , \ 0 < y < b$ .... (6.7.4)

เงื่อนไข $Y'(0) = 0$

$Y'(b) = 0$

จากสมการ (6.7.4) มีคำตอบทั่วไปคือ $Y(y) = A\cos\sqrt{\mu}\,y + B\sin\sqrt{\mu}\,y$

$$Y'(y) = -\sqrt{\mu}\,A\sin\sqrt{\mu}\,y + B\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,y$$

$$y'(0) = B = 0$$

$$y'(b) = -\sqrt{\mu}\,A\sin\sqrt{\mu}\,b = 0$$

ดังนั้น $\sin\sqrt{\mu}\,b = 0 = \sin n\pi$

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

ดังนั้น $Y_n(y) = A_n\cos\frac{n\pi y}{b} \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

จากสมการ (6.7.3) ; $X(x) = C\cos\sqrt{\lambda-\mu}\,x + D\sin\sqrt{\lambda-\mu}\,x$

$$X(0) = C = 0$$

$$X'(x) = D(\sqrt{\lambda-\mu})\cos\sqrt{\lambda-\mu}\,x$$

$$X'(a) = 0 = \cos\sqrt{\lambda-\mu}\,a$$

$$(\sqrt{\lambda-\mu})\,a = (m+\frac{1}{2})\,\pi \quad m = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\lambda-\mu = (m+\frac{1}{2})^2\frac{\pi^2}{a^2}$$

$$\lambda_{m,n} = (m+\frac{1}{2})^2\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots (6.7.5)$$

และ $\quad X_m(x) = D_m \sin(m+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \ldots$

ดังนั้นค่าเจาะจงคือ $\lambda_{m,n}$ และฟังก์ชันเจาะจงคือ

$$\varphi_{m,n}(x, y) = X_m(x)\,Y_n(y)$$

$$= E_{m,n}\sin(m+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

จากสมการ (6.7.1) ซึ่งมี $\lambda_{m,n}$ จาก (6.7.5) จะได้คำตอบ

$$T_{m,n}(t) = F_{m,n}\,e^{-\lambda_{m,n}kt}$$

ดังนั้น $u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{m,n}(t)\,\varphi_{m,n}(x, y)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,0}\,e^{-\lambda_{m,0}kt}\,\varphi_{m,0}(x, y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda_{m,n} kt} \varphi_{m,n}(x, y)$$

จาก $u(x, y, 0) = f(x, y)$

$$\therefore \quad f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,0} (x, y)\, \varphi_{m,0} (x, y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\, \varphi_{m,n} (x, y) \qquad \ldots\ldots (6.7.6)$$

เรียกอนุกรม (6.7.6) ว่า **อนุกรมฟูเรียร์สองชั้น** (Double Fourier Series)

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,0} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

ถ้าให้ $$C_m(y) = \frac{a_{m,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos \frac{n\pi y}{b} \qquad \ldots\ldots (6.7.7)$$

ดังนั้น $$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(y) \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a} \qquad \ldots\ldots (6.7.8)$$

ซึ่งจะเห็นว่า (6.7.8) เป็นอนุกรม Fourier sine ของ $f(x, y)$

$$\therefore \quad C_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a}\, dx$$

แต่ (6.7.7) เป็นอนุกรม Fourier cosine ของ $C_m(y)$

$$\therefore\ a_{m,0} = \frac{1}{b}\int_0^b C_m(y)\,dy\ ,\ m = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\text{และ } a_{m,n} = \frac{2}{b}\int_0^b C_m(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy\ ,\ m = 1, 2, \ldots\ldots -\ ,\ n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

ดังนั้นแทนค่า $C_m(y)$ จะได้

$$a_{m,0} = \frac{2}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x, y)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy\ ,\ m = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\text{และ } a_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x, y)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy,\ n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

สมการคลื่น

ตัวอย่าง D.E $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0$

B.C $u(0, y, t) = 0$

$u(a, y, t) = 0$ $\quad , 0 < y < b, t > 0$

$u(x, 0, t) = 0$

$u(x, b, t) = 0$ $\quad , 0 < x < a, t > 0$

I.C $u(x, y, 0) = f(x, y)$

$u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ $\quad , 0 < x < a,\ 0 < y < b$

วิธีทำ ให้คำตอบคือ $u(x, y, t) = T(t)\,\varphi(x, y)$

แทนค่าใน D.E $T''\varphi = c^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\,T(t)$

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{1}{\varphi}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}) = -\lambda$$

จะได้ $T''+\lambda c^2T = 0 \ , \ t > 0$ .... (6.7.9)

และ D.E $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\lambda\varphi = 0 \ , 0 < x < a \ , 0 < y < b$ .... (6.7.10)

$$\text{B.C} \quad \left.\begin{aligned} \varphi(0, y) &= 0 \\ \varphi(a, y) &= 0 \end{aligned}\right\} \ , 0 < y < b$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= 0 \\ \varphi(x, b) &= 0 \end{aligned}\right\} \ , 0 < x < a$$

สมการ (6.7.10) ใช้วิธีแยกตัวแปรอีกครั้งหนึ่ง

ให้ $\varphi(x, y) = X(x)\,Y(y)$

จะได้ $X''Y+XY''+\lambda XY = 0$

หรือ $-\frac{1}{X}(X''+\lambda X) = \frac{Y''}{Y} = -\mu$

ซึ่งจะได้ $X''+(\lambda-\mu)X = 0 \ , \ 0 < x < a$ .... (6.7.11)

เงื่อนไข $X(0) = 0$

$X(a) = 0$

และ $Y''+\mu Y = 0 \ , \ 0 < y < b$ .... (6.7.12)

เงื่อนไข $Y(0) = 0$

$Y(b) = 0$

สมการ (6.7.12) มีคำตอบ $Y(y) = A\cos\sqrt{\mu}\,y+B\sin\sqrt{\mu}\,y$

โดยใช้เงื่อนไข $Y(0) = 0$ และ $Y(b) = 0$

จะได้ $\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \ n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

และ $Y_n(y) = B_n \sin \frac{n\pi y}{b}$

และสมการ (6.7.11) จะได้ $X(x) = C \cos \sqrt{\lambda-\mu}\, x + D \sin \sqrt{\lambda-\mu}\, x$

โดยใช้เงื่อนไข $X(0) = X(a) = 0$

จะได้ $\lambda_{m,n} - \mu_n = \frac{m^2\pi^2}{a^2}$, $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

หรือ $\lambda_{m,n} = \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$, $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

และ $X_m(x) = D_m \sin \frac{m\pi x}{a}$

ดังนั้น ฟังก์ชันเจาะจงคือ

$$\varphi_{m,n}(x, y) = X_m(x)\, Y_n(y) = E_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

และสมการ (6.7.9) มีคำตอบเป็น

$$T_{m,n}(t) = a_{m,n} \cos ct \sqrt{\lambda_{m,n}} + b_{m,n} \sin ct \sqrt{\lambda_{m,n}}$$

ดังนั้นคำตอบ $u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{m,n}(t)\, \varphi_{m,n}(x, y)$

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m,n} \cos ct \sqrt{\lambda_{m,n}} + b_{m,n} \sin ct \sqrt{\lambda_{m,n}}]\, \varphi_{m,n}(x, y)$$

จาก I.C $u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\, \varphi_{m,n}(x, y)$

และ $u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n}\, \varphi_{m,n}(\varphi, y) \qquad (\varphi, y)$

การหา $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ นอกจากจะหาโดยใช้ความรู้เรื่องอนุกรมฟูเรียร์อาจจะหาได้โดยอาศัยความเป็นออร์โทโกนัลของ $\varphi_{m,n}$ เนื่องจาก

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{k\pi x}{a}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \frac{a}{2}, & m = k \end{cases}$$

และ

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{\ell\pi y}{b}\, dy = \begin{cases} 0, & n \neq \ell \\ \frac{b}{2}, & n = \ell \end{cases}$$

ดังนั้น $\int_D\int \varphi_{m,n}(x, y)\, \varphi_{k,\ell}(x, y)\, dx\, dy = \begin{cases} 0 \text{ ถ้า } m \neq k \text{ หรือ } n \neq \ell \\ \frac{ab}{4} \text{ ถ้า } m = k \text{ และ } n = \ell \end{cases}$

จะได้ $a_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x, y)\ \varphi_{m,n}(x, y)\, dxdy$

และ $b_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a g(x, y)\, \varphi_{m,n}(x, y)\, dx\, dy$

แบบฝึกหัดที่ 6.4

จงหาคำตอบของปัญหาขอบเขต

1. D.E $u_t = k(u_{xx}+u_{yy})$, $0 < x < a, 0 < y < b, t > 0$

   B.C $u(0, y, t) = 0$

   $u_x(a, y, t) = 0$ $\quad 0 < y < b , t > 0$

   $u_y(x, 0, t) = 0$

   $u_y(x, b, t) = 0$ $\quad 0 < x < a, t > 0$

   I.C $u(x, y, 0) = x+y, 0 < x < a, 0 < y < b$

2. D.E $c^2u_t = u_{xx}+u_{yy}$, $0 < x < a, 0 < y < b, t > 0$

   B.C $u_x(0, y, t) = 0$

   $u_x(a, y, t) = 0$ $\quad 0 < y < b, t > 0$

   $u(x, 0, t) = 0$

   $u(x, b, t) = 0$ $\quad 0 < x < a, t > 0$

   I.C $u(x, y, 0) = f(x, y)$

3. D.E $u_{tt} = c^2(u_{xx}t\ u_{yy})$, $0 < x < a, 0 < y < b, t > 0$

   B.C $u(x, 0, t) = 0$

   $u(x, b, t) = 0$

   $u_x(0, y, t) = 0$

   $u_x(a, y, t) = 0$

   I.C $u(x, y ,0) = f(x, y)$

   $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$