บทที่ 4
การหาคำตอบของปัญหาขอบเขตชนิดไม่เป็นเอกพันธ์

สำหรับบทนี้จะศึกษาถึงการหาคำตอบของปัญหาขอบเขตชนิดไม่เป็นเอกพันธ์ เช่น สมการความร้อน ซึ่งปลายทั้งสองของแท่งโลหะมีอุณหภูมิคงที่ตลอดเวลา สมการคือ

D.E $u_t = ku_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0$

B.C $u(0, t) = a$

$u(L, t) = b$

I.C $u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว

ปัญหาขอบเขตที่กล่าวถึงในที่นี้อาจจะมีสมการเชิงอนุพันธ์ หรือเงื่อนไขขอบเขตซึ่งไม่เป็นเอกพันธ์เท่านั้น ซึ่งเรียกปัญหาขอบเขตนี้ว่า inhomogeneous initial-boundary value problem ในที่นี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบ 2 วิธีคือ

4.1 การหาคำตอบโดยการเปลี่ยนตัวแปร

โดยวิธีนี้เราจะพยายามเปลี่ยนสมการและเงื่อนไขขอบเขตให้เป็นแบบเอกพันธ์ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ปัญหาขอบเขต

D.E $u_t = ku_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0$

B.C $\left.\begin{aligned} u(0, t) &= a \\ u(L, t) &= b \end{aligned}\right\},\ t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ ให้ตัวแปรใหม่คือ $v(x, t)$ เมื่อ

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x)$$

เมื่อ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

แทนค่า $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ ในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(v(x, t) + w(x)) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(x, t) + w(x))$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{d^2 w}{dx^2}$$

จาก B.C $u(0, t) = v(0, t) + w(0) = a$

$$u(L, t) = v(L, t) + w(L) = b$$

ถ้าให้ $\dfrac{d^2 w}{dx^2} = 0$ .... (4.1.1)

และเงื่อนไข $w(0) = a$

$$w(L) = b$$

จะได้สมการความร้อนเอกพันธ์คือ

D.E $\dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ .... (4.1.2)

B.C $V(0, t) = 0$

$v(L, t) = 0$

และ I.C $v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = f(x) - w(x)$

สมการ (4.1.1) ได้คำตอบทั่วไปคือ

$$w(x) = c_1 x + c_2$$

$$w(0) = c_2 = a$$

$$w(L) = c_1 L + a = b$$

$$c_1 = \frac{b-a}{L}$$

$$\therefore \quad w(x) = \frac{(b-a)}{L}x + a$$

สมการ (4.1.2) ซึ่งสอดคล้องกับ B.C และ I.C จะได้คำตอบดังตัวอย่างที่ 1 หัวข้อ 3.4

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$$

เมื่อ $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - w(x)] \sin\frac{n\pi x}{L}dx$

ดังนั้นคำตอบ $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$

$$= \frac{(b-a)}{L}x + a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาขอบเขต

D.E $u_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt} + k,\ 0 < x < L,\ t > 0$, k เป็นค่าคงตัว

B.C $u(0, t) = 0$

$u(L, t) = 0$

I.C $u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x)$

วิธีทำ ให้ $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$

หรือ $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$

แทนค่าใน D.E จะได้

$$v_{xx} + \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{c}v_{tt} + k \qquad \text{....... (4.1.3)}$$

ให้ $\dfrac{d^2w}{dx^2} = k$

และ $w(0) = 0$

$w(L) = 0$

จะได้คำตอบทั่วไปคือ $w(x) = k\dfrac{x^2}{2}+ax+b$, a, b เป็นค่าคงตัว

$$w(0) = b = 0$$

$$w(L) = k\frac{L^2}{2}+aL = 0$$

$$a = -\frac{k}{2}L$$

$$\therefore \quad w(x) = k\frac{x^2}{2}-\frac{k}{2}Lx = \frac{k}{2}(x^2-Lx)$$

ดังนั้นสมการ (4.1.3) จะเป็นสมการคลื่น

D.E $\quad v_{xx} = \dfrac{1}{c}v_{tt},\ 0 < x < L,\ t > 0$

B.C $\quad v(0, t) = 0$

$\quad v(L, t) = 0$

I.C $\quad v(x, 0) = u(u, 0)-w(x)$

$\quad = f(x)-w(x)$

$\quad v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = g(x)$

ซึ่งเป็นสมการคลื่นมีคำตอบดังตัวอย่างที่ 3 หัวข้อ 3.4 คือ

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+D_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ $\quad C_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L (f(x)-w(x))\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$$D_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ปัญหาของเขต

$$\text{D.E} \quad u_t = u_{xx} - 2,\ 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$\text{B.C} \quad \left.\begin{aligned} u(0, t) &= 3 \\ u(1, t) &= 5 \end{aligned}\right\} ,\ t > 0$$

$$\text{I.C} \quad u(x, 0) = x^2 + 1 \qquad ,\ 0 < x < 1$$

วิธีทำ ให้ $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$

ดังนั้นจะได้สมการ $v_t = v_{xx} + w''(x) - 2$

ให้ $w''(x) = 2$

$w(0) = 3$

$w(1) = 5$

คำตอบทั่วไปคือ $w(x) = x^2 + c_1 x + c_2$

$w(0) = c_2 = 3$

$w(1) = 1 + c_1 + c_2 = 5$

$c_1 = 1$

$w(x) = x^2 + x + 3$

และจะได้สมการความร้อน

$$\text{D.E} \quad v_t = v_{xx}$$

$$\text{B.C} \quad v(0, t) = 0$$

$$v(1, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{I.C} \quad v(x, 0) &= u(x, 0) - w(x) \\ &= x^2 + 1 - (x^2 + x + 3) \\ &= -x - 2 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้คำตอบ $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x\, e^{-n^2\pi^2 t}$

เมื่อ $b_n = 2\int_0^1 (-x-2)\sin n\pi x dx$

$$= -2\int_0^1 x\sin n\pi x dx - 4\int_0^1 \sin n\pi x\, dx$$

$$= -2\left(\frac{-x\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right)_0^1 - 4\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n\pi}$$

$$= \frac{6}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(3\cos n\pi - 2)$$

$$= \frac{2}{n\pi}(3(-1)^n - 2)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{, n เป็นเลขคู่} \\ \dfrac{-10}{n\pi} & \text{, n เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$u(x, t) = x^2 + x + 3 - \frac{10}{\pi}\sin\pi x\, e^{-\pi^2 t} + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x\, e^{-4\pi^2 t} - \ldots\ldots$$

4.2 การหาคำตอบโดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์

พิจารณาปัญหาขอบเขตซึ่งมี D.E. และ B.C. ไม่เป็นเอกพันธ์ ถ้าโดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ที่เหมาะสม จะสามารถเปลี่ยน D.E. หรือเงื่อนไข B.C. เป็นแบบเอกพันธ์ได้ เช่น

(1) D.E. $u_t - 3u_{xx} = t\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ t > 0$

B.C. $u_x(0, t) = \sin t$

$u(1, t) = 5 \qquad t > 0$

I.C. $u(x, 0) = x\ ,\ 0 < x < 1$

ถ้าให้ $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$

แทนค่า $v(x, t)$ ในสมการ D.E. จะได้

(2) D.E. $(v_t - 3v_{xx}) + (w_t - 3w_{xx}) = t$

หรือ $v_t - 3v_{xx} = t - (w_t - 3w_{xx}), \; 0 < x < 1, t > 0$

B.C. $v_x(0, t) = \sin t - w_x(0, t)$

$v(1, t) = 5 - w(1, t), \; t > 0$

I.C. $v(x, 0) = x - w(x, 0), \; 0 < x < 1$

เมื่อ $w(x, t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเราต้องการหา

ดังนั้นถ้าเราเลือก $w(x, t)$ ให้เหมาะสม อาจจะทำให้ปัญหาขอบเขตซึ่งมี $v(x, t)$ เป็นตัวแปรใหม่ มี D.E. เป็นเอกพันธ์ หรือ B.C. เป็นเอกพันธ์ เช่น ในที่นี้ถ้าต้องการให้ B.C. เป็นเอกพันธ์ ดังนั้นควรให้ $w_x(0, t) = \sin t$ และ $w(1, t) = 5$

จาก $w_x(0, t) = \sin t$

ซึ่งจะได้ $w(x, t) = x \sin t$

และจาก $w(1, t) = 5$

จะได้ $w(x, t) = 5$

ดังนั้นถ้าต้องการให้คล้องตาม B.C. ทั้ง 2 ควรเลือก $w(x, t)$ เป็น

$$w(x, t) = x \sin t - \sin t + 5$$

ซึ่งจะได้ปัญหาขอบเขต (3) ซึ่งมี B.C. เป็นเอกพันธ์ดังนี้

(3) D.E. $v_1 - 3v_{xx} = t - x \cos t + \cos t, \; 0 < x < 1, \; t > 0$

B.C. $v_x(0, t) = 0$

$v(1, t) = 0 \quad , t > 0$

I.C. $v(x, 0) = x - 5, \; 0 < x < 1$

ถ้าเราต้องการให้ปัญหาขอบเขต (2) มี D.E. เป็นเอกพันธ์ ในที่นี้จะให้

$$w_t - 3w_{xx} = t$$

วิธีที่ง่ายที่สุดคือให้ $w(x, t)$ เป็นฟังก์ชันของ t อย่างเดียว ดังนั้นในที่นี้

ให้ $w(x, t) = \frac{t^2}{2}$

ซึ่งจะได้ปัญหาขอบเขต (4)

(4) D.E. $v_t - 3v_{xx} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0$

B.C. $v_x(0, t) = \sin t$

$v(1, t) = 5 - \frac{t^2}{2},\ t > 0$

I.C. $v(x, 0) = x,\ 0 < x < 1$

ดังนั้นถ้ามีปัญหาขอบเขตไม่เป็นเอกพันธ์รูปทั่ว ๆ ไปเช่น

ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาขอบเขต (5) มี

D.E. $u_t - ku_{xx} = q(x, t),\ 0 < x < L,\ 0 < t$

B.C. $u(0, t) = A(t),\ t > 0$

$u(L, t) = B(t)$

I.C. $u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < L$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ จะเปลี่ยนปัญหาขอบเขตนี้เป็นปัญหาขอบเขตซึ่งมี B.C. เป็นเอกพันธ์ได้คือ

(6) D.E. $v_t - kv_{xx} = h(x, t),\ 0 < x < L,\ 0 < t$

B.C. $v(0, t) = 0$

$v(L, t) = 0,\ t > 0$

I.C. $v(x, 0) = g(x),\ 0 < x < L$

ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะหาคำตอบของปัญหาขอบเขต (6) แทน (5) ถ้าพิจารณาปัญหาขอบเขตชนิดเอกพันธ์

(7) D.E. $v_t - kv_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0$

B.C. $v(0, t) = 0$

$v(L, t) = 0,\ t > 0$

I.C. $v(x, 0) = g(x),\ 0 < x < L$

โดยวิธีหาคำตอบในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง จะได้ว่า

ค่าเจาะจง คือ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots$

และ ฟังก์ชันเจาะจง คือ $\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \ldots$

คำตอบ $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n kt} \varphi_n(x)$ ....(4.2.1)

ซึ่ง b_n หาได้จาก I.C. $v(x, 0)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x

แต่ในที่นี้ต้องหาคำตอบของปัญหาขอบเขต (6) ดังนั้นโดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ จะหาคำตอบ $v(x, t)$ ในรูปอนุกรมคล้าย ๆ กับ (4.2.1) แต่สัมประสิทธิ์ b_n เป็นฟังก์ชันของ t ดังนั้น $b_n e^{-\lambda_n kt}$ จะเป็นฟังก์ชันของ t ในที่นี้ให้เป็น $T_n(t)$ ดังนั้นจะสมมุติให้คำตอบคือ

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x) \quad \text{..........(4.2.2)}$$

เมื่อ $\varphi_n(x)$ เป็นฟังก์ชันเจาะจง ในที่นี้ต้องการหา $T_n(t)$

และจากความเป็นออร์โทโกนัลของ $\varphi_n(x)$ จะได้ว่า

$$T_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v(x, t) \varphi_n(x)\, dx \quad \text{..........(4.2.3)}$$

เมื่อ $T_n(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้

$$T_n'(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v_t(x, t) \varphi_n(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L [\, kv_{xx}(x, t) + h(x, t)\,]\, \varphi_n(x)\, dx$$

$$= \frac{2k}{L} \int_0^L (x, t) \varphi_n(x)\, dx + \frac{2}{L} \int_0^L h(x, t) \varphi_n(x)\, dx \quad \text{..........(4.2.4)}$$

ให้ $$h_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, t) \varphi_n(x)\, dx \quad \text{..........(4.2.5)}$$

แต่ $\frac{2k}{L} \int_0^L v_{xx} \varphi_n\, dx = \frac{2k}{L} [\, v_x\varphi_n - v\varphi_n' \,]_0^L + \frac{2k}{L} \int_0^L v\varphi_n''\, dx$

$\because \quad \varphi_n(0) = 0, \quad \varphi_n(L) = 0$

และ $\quad v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0$

$\therefore \quad \frac{2k}{L} \int_0^L v_{xx}\varphi_n dx = \frac{2k}{L} \int_0^L v\varphi_n'' dx$

แต่ $\quad \varphi_n'' = -\lambda_n\varphi_n$

$$\frac{2k}{L}\int_0^l v_{xx}\varphi_n dx = -\lambda_n k \frac{2}{L}\int_0^L v\varphi_n dx$$

$$= -\lambda_n k T_n(t)$$

แทนค่าในสมการ (4.2.4)

$$T_n'(t) = -\lambda_n k T_n(t) + h_n(t)$$

$$T_n'(t) + \lambda_n k T_n(t) = h_n(t)$$

หรือ $$\frac{dT_n(t)}{dt} + \lambda_n k T_n(t) = h_n(t) \qquad \text{..........(4.2.6)}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น ตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $e^{\int \lambda_n k dt} = e^{\lambda_n k t}$

คูณสมการ (4.2.6) ด้วย $e^{\lambda_n k t}$

$$\frac{d}{dt}(T_n(t)\, e^{\lambda_n k t}) = h_n(t)\, e^{\lambda_n k t}$$

$$T_n(t)\, e^{\lambda_n k t} = \int_0^t h_n(\tau)\, e^{\lambda_n k \tau}\, d\tau + c$$

$$T_n(t) = ce^{-\lambda_n k t} + e^{-\lambda_n k t}\int_0^t h_n(\tau)\, e^{\lambda_n k \tau}\, d\tau$$

$$= ce^{-\lambda_n k t} + \int_0^t h_n(\tau)\, e^{-\lambda_n k (t-\tau)}\, d\tau$$

แต่จาก (4.2.3) $T_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L v(x, 0)\, \varphi_n(x)\, dx = c$

ให้ $$c = c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\, \varphi_n(x)\, dx \qquad \text{..........(4.2.7)}$$

$\therefore$ $$T_n(t) = c_n e^{-\lambda_n k t} + \int_0^t h_n(\tau)\, e^{-\lambda_n k (t-\tau)}\, d\tau$$

ดังนั้นจะได้คำตอบ

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-\lambda_n k t} + \int_0^t h_n(\tau) e^{-\lambda_n k (t-\tau)}\, d\tau \right] \varphi_n(x)$$

เมื่อ c_n และ $h_n(\tau)$ มีค่าเท่ากับสมการ (4.2.7) และ (4.2.5) ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาขอบเขตของสมการคลื่น

$$
\begin{aligned}
\text{d.E.} \qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x, t), 0 < x < L,\ t > 0 \\
\text{B.C.} \qquad u(0, t) &= 0 \quad , t > 0 \\
u(L, t) &= 0 \\
\text{I.C.} \qquad u(x, 0) &= f(x) \\
u_t(x, 0) &= g(x)\ ,\ 0 < x < L
\end{aligned}
$$

วิธีทำ จากตัวอย่างปัญหาขอบเขตของสมการคลื่นชนิดเอกพันธ์จะเห็นว่า

สมการ
$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\ ,\ 0 < x < L,\ t > 0 \\
u(0, t) &= 0 \\
u(L, t) &= 0
\end{aligned}
$$

มีค่าเจาะจงเท่ากับ $\lambda_n = \dfrac{n\pi x}{L}$

และ $\varphi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์จะหาคำตอบของปัญหาขอบเขต

ให้
$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}
\end{aligned}
$$

เมื่อ
$$T_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x, t) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \qquad T_n''(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L u_{tt} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L [\, c^2 u_{xx} + h(x, t)\,] \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \\
&= \frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{2}{L}\int_0^L h(x, t) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx
\end{aligned}
$$

ให้
$$h_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x, t) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

และโดยการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2c^2}{L}\left[u_x\sin\frac{n\pi x}{L} - u\cdot\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L$$
$$+\frac{2c^2}{L}\int_0^L u\cdot\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

แต่ $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ ดังนั้นเทอมแรกทางขวามือเป็นศูนย์

ดังนั้น $\frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{2}{L}\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$$= -\lambda_n^2c^2T_n(t)$$

$$\therefore \quad T_n''(t) = -\lambda_n^2c^2T_n(t) + h_n(t)$$

$$T_n''(t) + \lambda_n^2c^2T_n(t) = h_n(t)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองชนิดไม่เป็นเอกพันธ์ จะได้คำตอบเป็น

$$T_n(t) = a_n\cos\lambda_nct + b_n\sin\lambda_nct + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau$$

แทนค่า $T_n(t)$ จะได้

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\lambda_nct + b_n\sin\lambda_nct + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\lambda_nc\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n\lambda_nc = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{L\lambda_nc}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ปัญหาขอบเขตของ

D.E. $\quad u_{tt} - u_{xx} = 3, \; 0 < x < 1, \; t > 0$

B.C. $\quad u(0,t) = 0$

$\quad u(1,t) = 0 \qquad , \; t > 0$

I.C. $\quad u(x, 0) = x(1-x)$

$\quad u_t(x, 0) = 0 \quad , 0 < x < 1$

วิธีทำ ในที่นี้ $\quad f(x) = x(1-x)$

$\quad g(x) = 0$

จากตัวอย่างที่แล้ว ดังนั้น $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]$$

และ $$h_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x, t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ในที่นี้ $\quad h(x, t) = 2$

$$h_n(t) = 2\int_0^1 3\sin n\pi x\,dx$$

$$= \frac{6}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$T_n(t) = a_n\cos\lambda_n ct + b_n\sin\lambda_n ct + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n]\cos n\pi t + \frac{6}{n\pi\lambda_n}[1-(-1)^n]\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{4}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]\cos n\pi t + \frac{6}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n](1-\cos n\pi t)$$

$$T_n(t) = \frac{2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n](3-\cos n\pi t)$$

ดังนั้น $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin n\pi x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n](3-\cos n\pi t\}\sin n\pi x$$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงหาคำตอบของปัญหาขอบเขตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

1.1 D.E. $u_t - ku_{xx} = a$, $0 < x < L$, $t > 0$

B.C. $u(0, t) = b$

$u(L, t) = c$, $t > 0$

$u(x, 0) = 0$, $0 < x < L$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว

1.2 D.E. $u_t = ku_{xx}$, $0 < x < 10$, $t > 0$

B.C. $u(0, t) = 20$, $u(10, t) = 30$

I.C. $u(x, 0) = 2x+1$

1.3 D.E. $u_t = u_{xx} - 4$, $0 < x < 1$, $t > 0$

B.C. $u(0, t) = 8$

$u(1, t) = 5$, $t > 0$

I.C. $u(x, 0) = x^2 - 2x + 5$, $0 < x < 1$

1.4 D.E. $u_{tt} = u_{xx} - 2$, $0 < x < 20, t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u(20, t) = 0$, $t > 0$

I.C. $u(x, 0) = x$, $u_t(x, 0) = 2x - 1$, $0 < x < L$

2. จงเปลี่ยนปัญหาเซตต่อไปนี้ ให้เป็นปัญหาขอบเขตซึ่งมี D.E. เป็นเอกพันธ์

2.1 D.E. $u_t - 5u_{xx} = t^2$, $0 < x < 1, t > 0$

B.C. $u_x(0, t) = \sin t$, $t > 0$

$u(1, t) = 2$

I.C. $u(x, 0) = e^x$, $0 < x < 1$

2.2 D.E. $u_t - ku_{xx} = 2x^3 - 5 \sin t$, $0 < x < L, t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u(L, t) = 0 \ , \ t > 0$

I.C. $u(x, 0) = 7, 0 < x < L$

3. จงเปลี่ยนปัญหาขอบเขตต่อไปนี้ให้เป็นปัญหาขอบเขตซึ่งมี B.C. เป็นเอกพันธ์

3.1 D.E. $u_t - ku_{xx} = q(x, t), \ 0 > x > L, t > 0$

B.C. $u_x(0, t) = A(t) \ , \ t > 0$

$u(L, t) = B(t)$

I.c. $u(x, 0) = f(x), 0 > x > L$

3.2 D.E. $u_t - 3u_{xx} = t, \ 0 > x > t, t > 0$

B.C. $u_x(0, t) = \cos t \ \ t > 0$

$u(1, t) = 5$

I.C. $u(x, 0) = \sin x, 0 > x < 1$

4. จงหาคำตอบของปัญหาขอบเขตโดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์

4.1 D.E. $u_t = u_{xx}, \ 0 < x < 2, \ t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u_x(2, t) = 1, \ t > 0$

I.C. $u(x, 0) = x, \ 0 > x < 2$

4.2 D.E. $u_{tt} - u_{xx} = 5, \ 0 < x < 1, t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0$

$u(1, t) = 0, t > 0$

I.C. $u(x, 0) = \sin \pi x$

$u_t(x, 0) = 0 \quad , 0 < x < 1$