บทที่ 2
สมการอันดับสอง

ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์-ฟิสิกส์ ส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ดังนั้นในบทนี้ตอนแรกเราจะศึกษาถึงการจำแนกชนิดของสมการเอกพันธ์อันดับสอง ซึ่งเป็นรูปทั่ว ๆ ไปของสมการอันดับสองที่สำคัญ ๆ คือสมการคลื่น สมการความร้อน และสมการลาปลาซ ส่วนการสร้างสมการดังกล่าวจากปัญหาทางฟิสิกส์จะกล่าวถึงในตอนหลัง

2.1 การจำแนกชนิดของสมการ (Classification of Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั่วไปอันดับสองที่จะศึกษาถึงการจำแนกชนิดของสมการในที่นี้จะเป็นสมการเอกพันธ์ในรูปของ

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

เมื่อ A, B, C, ..., F เป็นค่าคงตัวเท่านั้น

จากสมการทั่วไปกำลังสองของตัวแปรอิสระ x, y ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

การจำแนกชนิดของสมการ จะพิจารณาจากค่าของ $b^2 - 4ac$ ซึ่งเราทราบว่า

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการนี้เรียกว่า พาราโบลิก

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ สมการนี้เรียกว่า เชิงวงรี

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ สมการนี้เรียกว่า ไฮเพอร์โบลิก

สำหรับการจำแนกชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองก็เช่นเดียวกัน จะพิจารณาจาก $B^2 - 4AC$

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสอง

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \qquad \text{..........(2.1.1)}$$

เมื่อ A, B, C, ..., F เป็นค่าคงตัว จะเรียกว่าเป็นสมการชนิด

1) ไฮเพอร์โบลิก เมื่อ $B^2 - 4AC > 0$
2) พาราโบลิก เมื่อ $B^2 - 4AC = 0$

3) เชิงวงรี เมื่อ $B^2 - 4AC < 0$

โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ จะสามารถเปลี่ยนสมการ (2.1.1) เป็นสมการใหม่ซึ่งสามารถหาคำตอบทั่วไปได้

ให้ตัวแปรใหม่คือ ξ, η เมื่อ $\xi = \xi(x, y)$

$$\eta = \eta(x, y)$$

เมื่อ ξ, η หาอนุพันธ์อันดับสองได้และมีความต่อเนื่อง

ให้ x, y เป็นฟังก์ชันของ ξ, η ซึ่งหาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนั้น

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}$$

แทนค่า $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ ในสมการ (2.1.1) จะได้

$$A_1u_{\xi\xi} + B_1u_{\xi\eta} + C_1u_{\eta\eta} + D_1u_\xi + E_1u_\eta + F_1u = 0 \qquad \text{..........(2.1.2)}$$

เมื่อ

$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$B_1 = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y$$

$$C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$D_1 = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y$$

$$E_1 = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$

และ $F_1 = F$

สมการ (2.1.1) เขียนใหม่ได้สมการ

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = G \qquad \text{..........(2.1.3)}$$

เมื่อ $G = G(x, y, u, u_x, u_y)$

และสมการ (2.1.2) เขียนใหม่ได้สมการ

$$A_1u_{\xi\xi} + B_1u_{\xi\eta} + C_1u_{\eta\eta} = G_1 \qquad \text{..........(2.1.4)}$$

เมื่อ $G_1 = G_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

ถ้า $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ ให้ ξ, η เป็นตัวแปรซึ่งทำให้ A_1 และ C_1 เป็นศูนย์

นั่นคือ
$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$
$$C_1 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

จะเขียนว่า A_1 และ C_1 มีรูปสมการคล้ายกัน จึงเขียนใหม่ได้

$$A\gamma_x^2 + B\gamma_x\gamma_y + C\gamma_y^2 = 0 \qquad \text{..........(2.1.5)}$$

เมื่อ γ แทนได้ด้วย ξ หรือ η

หารสมการ (2.1.5) ด้วย γ_y^2

$$A\left(\frac{\gamma_x}{\gamma_y}\right)^2 + B\left(\frac{\gamma_x}{\gamma_y}\right) + C = 0$$

ถ้า γ เป็นค่าคงตัว

$$d\gamma = \gamma_x d_x + \gamma_y d_y = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\gamma_x}{\gamma_y}$$

แทนค่า $\frac{\gamma_x}{\gamma_y}$ จะได้สมการ

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \qquad \text{..........(2.1.6)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

เนื่องจาก A, B, C เป็นค่าคงตัวดังนั้น อินทิเกรตหาค่า y จะได้

$$y = \left(\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x + c_1$$

และ
$$y = \left(\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x + c_2$$

แต่ ξ, η เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น
$$\xi = y - \left(\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x$$
$$\eta = y - \left(\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right)x$$

หรือ

$$\xi = y+\lambda_1 x$$

$$\eta = y+\lambda_2 x \qquad ....(2.1.7)$$

เมื่อ λ_1, λ_2 เป็นรากของสมการ

$$A\lambda^2+B\lambda+C = 0$$

2.2 การหาคำตอบทั่วไป

จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสอง (2.1.1) และการพิจารณาค่าของ B^2-4AC ทั้งสามกรณี จะสามารถเปลี่ยนสมการ (2.1.1) โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ไปสู่สมการอีกรูปหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าเป็นแบบง่ายที่สุด (canonical forms) ของสมการ (2.1.1)

สมการไฮเพอร์โบลิก (The Hyperbolic Equaton)

โดยการเปลี่ยนตัวแปร

กรณีที่ 1 ถ้า $A \neq 0$ จากสมการ (2.1.7)

ให้

$$\xi = \lambda_1 x+y$$

$$\eta = \lambda_2 x+y$$

เมื่อ λ_1, λ_2 เป็นรากของสมการ

$$A\lambda^2+B\lambda+C = 0$$

ดังนั้นสมการ (2.1.2) จะมีสัมประสิทธิ์ $A_1, \ldots, F_1$ เป็น

$$A_1 = A\lambda_1^2+B\lambda_1+C$$

$$B_1 = 2A\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+2C$$

แต่

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{C}{A} \text{ และ } \lambda_1+\lambda_2 = -\frac{B}{A}$$

$$\therefore \quad B_1 = \frac{B^2-4AC}{-A}$$

$$C_1 = A\lambda_2^2+B\lambda_2+C$$

$$D_1 = D\lambda_1+E$$

$$E_1 = D\lambda_2+E \text{ และ } F_1 = F$$

แต่ λ_1 และ λ_2 เป็นรากของสมการ $A\lambda^2+B\lambda+C = 0$ ดังนั้น $A_1 = 0$ และ $C_1 = 0$ สมการ (2.1.2) จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{(B^2-4AC)}{-A}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(D\lambda_1+E)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(D\lambda_2+E)\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu = 0 \qquad \text{..........(2.2.1)}$$

∵ $B^2-4AC > 0$ ดังนั้น λ_1, λ_2 เป็นจำนวนจริง และสมการ (2.2.1) เขียนได้อยู่ในรูปของ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+fu \qquad \text{..........(2.2.2)}$$

เมื่อ $d = \frac{A(D\lambda_1+E)}{B^2-4AC}$, $e = \frac{A(D\lambda_2+E)}{B^2-4AC}$, $f = \frac{AF}{B^2-4AC}$

สมการ (2.2.2) คือ แบบง่ายที่สุดของสมการ (2.1.1)

กรณีที่ 2 ถ้า $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$

จากสมการ (2.1.6) $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{C}{B}$

หรือ $\quad dx = \frac{B}{C}dy$

$$x = \frac{B}{C}y+C_1$$

ให้ $\quad \xi = x$

$$\eta = x-\frac{B}{C}y$$

ดังนั้น $\quad A_1 = 0$

$$B_1 = -\frac{B^2}{C} \neq 0$$

$$C_1 = B\left(-\frac{B}{C}\right)+C\left(-\frac{B}{C}\right)^2 = 0$$

$D_1 = D$, $E_1 = D-\frac{EB}{C}$ และ $F_1 = F$

และจะได้สมการ

$$\left(-\frac{B^2}{C}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+D\frac{\partial u}{\partial\xi}+\left(\frac{DC-EB}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu = 0$$

แต่ $-\frac{B^2}{C} \neq 0$ ดังนั้นจะได้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+fu$$

เป็นสมการแบบง่ายที่สุดของสมการ (2.1.1) เมื่อ

$$d = \frac{CD}{B^2},\ e = \frac{DC-EB}{B^2}\ \text{และ}\ f = \frac{CF}{B^2}$$

กรณีที่ 3 ถ้า $A = 0, B \neq 0, C = 0$

ให้

$$\xi = x$$

$$\eta = y$$

จากสมการ (2.1.1) จะได้

$$Bu_{xy}+Du_x+Eu_y+Fu = 0$$

และจากตัวแปร ξ, η จะได้

$$Bu_{\xi\eta}+Du_\xi+Eu_\eta+Fu = 0$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = du_\xi+eu_\eta+fu$$

เมื่อ

$$d = -\frac{D}{B},\ e = -\frac{E}{B},\ f = -\frac{F}{B}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด และหาคำตอบของสมการ

$$u_{xx}+5u_{xy}-6u_{yy} = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 1,\ B = 5, C = -6, D = E = F = 0$

$$B^2-4AC = 49 > 0$$

เป็นสมการชนิดไฮเพอร์โบลิก

ในที่นี้ $A \neq 0$ ดังนั้น

$$\xi = \lambda_1 x+y$$

$$\eta = \lambda_2 x+y$$

เมื่อ λ_1, λ_2 เป็นรากของสมการ $\lambda^2+5\lambda-6 = 0$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -6$$

$$\xi = x+y$$

$$\eta = -6x+y$$

จากสมการ (2.2.2) จะได้สมการแบบง่ายที่สุด

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

คำตอบคือ $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$

หรือ $u(x, y) = f(x+y) + g(-6x+y)$

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} - 3u_x - 6u_y + 9u = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 1, B = 4, C = -5, D = -3, E = -6, F = 9$

$B^2 - 4AC = 36 > 0$ $\therefore$ เป็นสมการชนิดไฮเพอร์โบลิก

ให้ $\xi = \lambda_1 x + y$

$\eta = \lambda_2 x + y$

จาก $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$\lambda = 1, -5$

ดังนั้น $\xi = x + y$

$\eta = -5x + y$

จากสมการ (2.2.1)

$$-36u_{\xi\eta} - 9u_\xi + 9u_\eta + 9u = 0$$

หรือ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{1}{4}(-u_\xi + u_\eta + u)$

สมการพาราโบลิก (The Parabolic Equation)

ในที่นี้ $B^2 - 4AC = 0$ โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรเหมือนสมการไฮเพอร์โบลิก

กรณีที่ 1 ถ้า $A \neq 0, C \neq 0$

สมการ $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

มีรากซ้ำกันคือ $\lambda = -\dfrac{B}{2A}$

ดังนั้นให้ $\xi = \lambda x + y$

$\eta = y$

สัมประสิทธิ์ $A_1, \ldots, F_1$ ของสมการ (2.1.2) คือ

$$A_1 = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$B_1 = B\lambda + 2C = B\left(\frac{-B}{2A}\right) + 2C = \frac{4AC - B^2}{2A} = 0$$

$$C_1 = C$$

$$D_1 = D\lambda + E,\ E_1 = E \text{ และ } F_1 = F$$

จะได้สมการ

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (D\lambda + E)\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = 0 \qquad \ldots\ldots\ (2.2.3)$$

ในกรณีนี้ $C \neq 0$ หารตลอดด้วย C

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = d\frac{\partial u}{\partial \xi} + e\frac{\partial u}{\partial \eta} + fu \qquad \ldots\ldots\ (2.2.4)$$

เมื่อ $d = -\frac{(D\lambda + E)}{C},\ e = -\frac{E}{C},\ f = -\frac{F}{C}$

กรณีที่ 2 ถ้า $A \neq 0, C = 0$

ดังนั้น $B = 0$ ($\because B^2 - 4AC = 0$)

ให้ $\xi = y$

$\eta = x$

จะได้ $A_1 = C = 0$

$B_1 = B = 0$

$C_1 = A \neq 0$

$D_1 = E,\ E_1 = D$ และ $F_1 = F$

และได้สมการ

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+E\frac{\partial u}{\partial \xi}+D\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu = 0$$

หรือ $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = d\frac{\partial u}{\partial \xi}+e\frac{\partial u}{\partial \eta}+fu$$

เมื่อ $d = -\frac{E}{A}, e = -\frac{D}{A}, f = -\frac{F}{A}$.

กรณีที่ 3 ถ้า $A = 0, C \neq 0$ ดังนั้น $B = 0$ ด้วย

ให้ $\xi = x$

$\eta = y$

สมการ (2.1.1) คือ

$$Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu = 0$$

และเมื่อเปลี่ยนตัวแปรจะได้สมการ

$$C\,u_{\eta\eta}+Du_\xi+Eu_\eta+Fu = 0$$

หรือ $u_{\eta\eta} = du_\xi+eu_\eta+fu$

เมื่อ $d = -\frac{D}{C}, e = -\frac{E}{C}, f = -\frac{F}{C}$

ตัวอย่างที่ 4 จงเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด และหาคำตอบของ

$$4u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy} = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 4, B = -4, C = 1, D = E = F = 0$

$$B^2-4AC = 0$$

สมการนี้เป็นสมการพาราโบลิก

จากกรณีที่ 1 $\xi = \lambda x+y$

$\eta = y$

λ หาจาก $4\lambda^2-4\lambda+1 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

จากสมการ (2.2.3) จะได้แบบง่ายที่สุดของสมการคือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

และได้คำตอบ $u(\xi, \eta) = \eta f(\xi) + g(\xi)$

หรือ $$u(x, y) = yf\left(\frac{x}{2}+y\right) + g\left(\frac{x}{2}+y\right)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x + 3u_y - u = 0$$

วิธีทำ **ในที่นี้** $A = 1, B = -6, C = 9, D = 2, E = 3, F = -1$

$B^2 - 4AC = 0$ **เป็นสมการชนิดพาราโบลิก**

$\because A \neq 0, C \neq 0$ **ให้** $\xi = \lambda x + y$

$\eta = y$

λ หาได้จาก $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

หรือ $\lambda = 3$

จากสมการ (2.2.3) จะได้รูปแบบง่ายที่สุด

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 9\frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta} - u = 0$$

หรือ $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{9}u$$

สมการเชิงวงรี (The Elliptic Equation)

ในที่นี้ $B^2 - 4AC < 0$ โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรเช่นเดียวกันจะสามารถเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุดได้ สำหรับสมการเชิงวงรีจะไม่เกิดกรณี $A = 0$ ดังนั้น

ให้ $\alpha = \lambda_1 x + y$

$\beta = \lambda_2 x + y$

เมื่อ λ_1, λ_2 เป็นรากของสมการ $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

จะเห็นว่า λ_2, λ_2 มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $\lambda_1 = a + bi$

$\lambda_2 = a - bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $\alpha = ax + bix + y$

$\beta = ax - bix + y$

ให้ตัวแปรใหม่ $\xi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = ax + y$

$\eta = \frac{1}{2i}(\alpha - \beta) = bx$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของสมการ (2.1.2)

$A_1 = Aa + Ba + C$

$B_1 = 2Aab + Bb = b(2Aa + B)$

$C_i = Ab^2 \neq 0$

$D_i = Da + E,\ E_1 = Db$ และ $F_1 = F$

$\because$ (a + bi) เป็นรากของสมการ $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

ดังนั้น $A(a + bi)^2 + B(a + bi) + C = 0$

หรือ $[A(a^2 - b^2) + Ba + C] + [b(2Aa + B)]i = 0$

$\therefore\ A(a^2 - b^2) + Ba + C = 0$

และ $b(2Aa + B) = 0$

$\therefore\ A_1 = Aa^2 + Ba + C = Ab^2$

$B_1 = 0$

ดังนั้นสมการ (2.1.2) จะเปลี่ยนเป็น

$$Ab^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + (Da + E)\frac{\partial u}{\partial \xi} + Db\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = 0 \qquad \ldots\ldots. (2.2.4)$$

หรือ $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = d\frac{\partial u}{\partial \xi} + e\frac{\partial u}{\partial \eta} + fu$$

เมื่อ $d = -\frac{Da + E}{Ab^2},\ e = -\frac{D}{Ab},\ f = -\frac{F}{Ab^2}$ และ d, e, f เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง จงเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x - 3u_y - 2u = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 1, B = 2, C = 5, D = 1, E = -3, F = -2$

$$B^2 - 4AC = -16 < 0$$

สมการเป็นชนิดเชิงวงรี

ให้ $\xi = ax + y$

$\eta = bx$

จาก $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = -1 \pm 2i$

$\therefore a = -1, b = 2$

ดังนั้น $\xi = -x + y$

$\eta = 2x$

จากสมการ (2.2.4) จะได้สมการแบบง่ายที่สุด

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 4\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta} - 2u = 0$$

หรือ $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2}u$$

สรุป จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสอง

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

เมื่อ A, B, C, D, E และ F เป็นจำนวนจริง เมื่อเปลี่ยนรูปแบบง่ายที่สุดจะเห็นว่า

ชนิดของสมการ	แบบง่ายที่สุด
1. ไฮเพอร์โบลิก $B^2-4AC > 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+fu$
2. พาราโบลิก $B^2-4AC = 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+fu$
3. เชิงวงรี $B^2-4AC < 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = d\frac{\partial u}{\partial\xi}+e\frac{\partial u}{\partial\eta}+fu$

2.3 สมการอันดับสองที่สำคัญ

สมการอันดับสองซึ่งมีรูปแบบง่าย ๆ ซึ่งมีประโยชน์มากในทางฟิสิกส์-คณิตศาสตร์คือ

1. สมการคลื่น (The wave equation)

$$u_{tt}-c^2u_{xx} = 0$$

2. สมการความร้อน (The heat equation)

$$u_t-ku_{xx} = 0$$

3. สมการลาปลาซ (The Laplace equation)

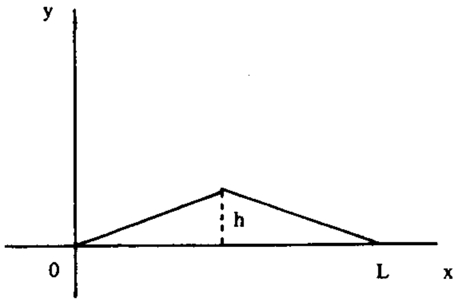
$$u_{xx}+u_{yy} = 0$$

ปัญหาหลายปัญหาในทางฟิสิกส์-คณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการทั้งสาม ดังนั้นในหัวข้อต่อไปจะแสดงถึงการสร้างสมการเหล่านี้จากปัญหาฟิสิกส์

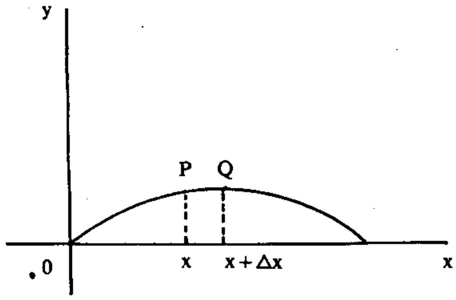
2.4 สมการคลื่น

การสั่นของเส้นลวด (The Vibrating String) เส้นลวดเส้นหนึ่งขึงให้ตึงปลายข้างหนึ่งอยู่ที่ 0 และอีกข้างหนึ่งอยู่ที่ L เมื่อดึงเส้นลวดที่จุดกึ่งกลางให้สูงเป็นระยะ h แล้วปล่อย

เส้นลวดจะสั่นขึ้นลง ในที่นี้จะถือว่าเส้นลวดมีความยืดหยุ่นเล็กน้อย และระยะ h มีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับ L(ดังรูปที่ 1) ถ้า ณ.เวลา t เส้นลวดอยู่ในลักษณะดังรูปที่ 2



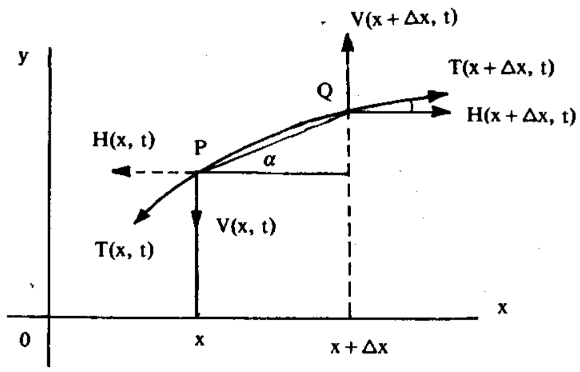
รูปที่ 1



รูปที่ 2

ให้ $y(x, t)$ เป็นการเคลื่อนที่ของจุด x บนเส้นลวดเมื่อเวลา t และ $y(x+\Delta x, t)$ เป็นการเคลื่อนที่ของจุด $x+\Delta x$ เมื่อเวลา t

ส่วน PQ จะมีแรงดึง 2 แรง คือ $T(x, t)$ และ $T(x+\Delta x, t)$ ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

ให้ $V(x, t)$ เป็นแรงตามแนวดิ่งที่จุด x และ $H(x, t)$ เป็นแรงตามแนวระดับที่จุด x

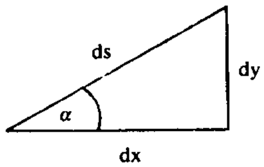
แรงรวมตามแนวดิ่ง (vertical direction) $= V(x+\Delta x, t) - V(x, t)$ ในที่นี้เส้นลวดไม่มีการเคลื่อนที่ไปทางซ้ายหรือทางขวาเลย

$\therefore$ แรงรวมตามแนวระดับ $= H(x+\Delta x, t) - H(x, t) = 0$

$$\therefore \quad \frac{H(x+\Delta x, t) - H(x, t)}{\Delta x} = 0$$

เมื่อ $\Delta x \to 0$; $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ หรือ $H_x(x, t) = 0$

ดังนั้น $H(x, t)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x ให้ $H(x, t) = T_0$



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$\because$ y เป็นฟังก์ชันของ x, t $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$

$$H(x, t) = T(x, t)\cos\alpha$$

$$= \frac{T(x, t)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = T_0$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

$$V(x, t) = T(x, t) \sin \alpha$$

$$= T(x, t) \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{....... (2.4.1)}$$

ให้ ρ เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยของความยาวลวด

มวลของ PQ $= \rho.\Delta x$

ความเร่งในแนวดิ่ง $= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน (Newton's second law)

แรง = มวล × ความเร่ง

$$\therefore V(x + \Delta x, t) - V(x, t) = \rho.\Delta x.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

เมื่อ $\Delta x \to 0$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .... (2.4.2)

จาก (2.4.1) และ (2.4.2)

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

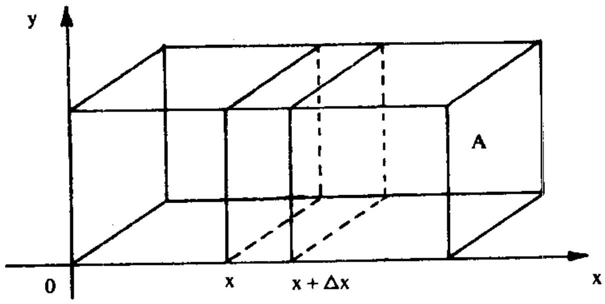
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots. (2.4.3)$$

เมื่อ $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$

เรียกสมการ (2.4.3) ว่าสมการคลื่น (one-dimensional wave equation)

2.5 สมการความร้อน

พิจารณาแท่งโลหะซึ่งมีความยาวสม่ำเสมอ L (uniform metal bar) และมีพื้นที่หน้าตัด A ผิวของแท่งโลหะมีฉนวนหุ้ม (insulate)



ดังนั้นอุณหภูมิในแท่งโลหะขณะใดขณะหนึ่งจะเปลี่ยนจากพื้นที่หนึ่งไปยังอีกพื้นที่หนึ่ง การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทำให้เกิดพลังงานความร้อน (heat energy) ขึ้นตามความยาวของแท่งโลหะ ซึ่งปริมาณความร้อนจะไหลจากส่วนที่ร้อนกว่าไปยังส่วนที่เย็นกว่า การเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนไปตามทิศ (ความยาว) เรียกว่าการไหลของความร้อนใน 1 มิติ (one dimensional heat flow)

ให้ x เป็นระยะจากปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะ

$u(x, t)$ เป็นอุณหภูมิขณะใดขณะหนึ่งเมื่อเวลา t

ρ เป็นความหนาแน่น (มวล/หน่วยปริมาตร)

s เป็นความร้อนจำเพาะ (specific heat) ของวัตถุ

ดังนั้นมวลของแท่งโลหะระหว่าง x และ $x + \Delta x$ คือ

$$m = \rho . A\, dx$$

จากกฎการเคลื่อนที่ของความร้อน

พลังงานความร้อนที่จำเป็นในการทำให้วัตถุมวล m มีอุณหภูมิเปลี่ยนไป Δu คือ $ms\Delta u$

ดังนั้นเมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนจาก 0^0 เป็น $u(x, t)$ พลังงานความร้อนซึ่งเกิดกับแท่งโลหะส่วนระหว่าง x และ $x + \Delta x = \rho A.dx.s.u(x, t)$

พลังงานความร้อนซึ่งสะสมในส่วนของแท่งโลหะระหว่าง $x = a$ และ $x = b$ เมื่อเวลา t คือ Q(t) ซึ่ง

$$Q(t) = \int_a^b u(x, t)\, s.\rho.Adx \qquad \text{....... (2.5.1)}$$

Q(t) จะเพิ่มขึ้นโดยการไหลของความร้อนในบริเวณ $a < x < b$ ผ่าน $x = a$ และ $x = b$ และจากกฎของความร้อน (conservative law)

$$\frac{dQ}{dt} = \text{flux term} + \text{source term} \qquad \text{....... (2.5.2)}$$

เมื่อ flux term คือตัวที่ช่วยทำให้เกิดการไหลของความร้อนผ่านหน้าตัด
และ source term คือตัวที่ช่วยทำให้เกิดต้นกำเนิดความร้อนภายในวัตถุ

ให้ F(x, t) แทน flux function ดังนั้น F(x, t) จะเป็นพลังงานความร้อน ซึ่งผ่านพื้นที่ 1 หน่วยของ x ตามขวาง ต่อ 1 หน่วยเวลา ในทิศทางบวกตามแกน x

อัตราการไหลของความร้อนผ่านพื้นที่ภาคตัด $x = a$ ไปยัง $x > a = AF(a, t)$
และ อัตราการไหลของความร้อนผ่านพื้นที่ภาคตัด $x = b$ ไปยัง $x > b = -AF(b, t)$

$$\therefore \text{flux term} = AF(a, t) - AF(b, t)$$
$$= -A\,[F(b, t) - F(a, t)]$$

จากกฎของฟิสิกส์ (physical law) จะได้ว่า อัตราการไหลของความร้อนที่จุดใด ๆ จะเป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์ (gradient) ของอุณหภูมิ

$$\therefore\ F(x, t) = -K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t),\ K > 0$$

เมื่อ K คือความนำความร้อน (Heat conductivity)

เครื่องหมายลบแสดงว่าความร้อนไหลในทิศทางเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น (จากซ้ายไปขวา)

$$\text{flux term} = A\,[K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,|_{x=b} - K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,|_{x=a}]$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t))\,Adx \qquad \text{....... (2.5.3)}$$

$$\text{source term} = \frac{dQ}{dt} - \text{flux term}$$

$$= \frac{d}{dt}\,[\int_a^b u(x, t)\,s\,\rho A\,dx] - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\ )\,Adx$$

$$= \int_a^b [\,s\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,]\,A\,dx \qquad \text{....... (2.5.4)}$$

ให้ $[a, b] \subseteq [0, L]$ และตัวถูกอินทิเกรตของ (2.5.4) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$\therefore\ s\rho\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial u}{\partial u}(x, t)) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{s\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x}\ \text{เมื่อ}\ k = \frac{K}{s\rho} \qquad \text{....... (2.5.5)}$$

ซึ่งเรียกสมการ (2.5.5) ว่าสมการความร้อน (Heat equation)

2.6 สมการลาปลาซ (Laplace's Equation)

เมื่ออุณหภูมิที่จุด ๆ หนึ่งในแท่งโลหะไม่ขึ้นอยู่กับเวลา จะกล่าวว่าอุณหภูมิในแท่งโลหะอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) และการไหลของความร้อนในวัตถุจะเรียกว่าอยู่ในสภาวะสม่ำเสมอ (steady state flow)

ถ้า u (x, y, t) เป็นอุณหภูมิภายในแท่งโลหะตันในระบบพิกัดฉากที่จุด (x, y) และเวลา t สมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติคือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial y^2}\right)$$

ถ้าการไหลของความร้อนอยู่ในสภาวะสม่ำเสมอ $\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

นั่นคือ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .... (2.6.1)

ซึ่งเป็นสมการลาปลาซใน 2 มิติ

2.7 เงื่อนไขเริ่มแรกและเงื่อนไขขอบเขต (Initial and Boundary conditions)

ในการหาคำตอบของสมการ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขขึ้น ก็สามารถหาคำตอบเฉพาะของสมการได้ ในที่นี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขทั้ง 2 ชนิดของสมการ ส่วนปัญหาที่กำหนดเงื่อนไขทั้งสองให้ เรียกว่า **ปัญหาขอบเขต** (Boundary- value problem)

ตัวอย่าง

1. **สมการความร้อน** $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$

เงื่อนไขเริ่มแรกของสมการความร้อน คือการกำหนดอุณหภูมิในเส้นวัตถุเมื่อเวลา t = 0 นั่นคือ u(x, 0) = f(x) ส่วนเงื่อนไขขอบเขตคือการกำหนดอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของเส้นวัตถุ คือที่ x = 0 และ x = 1 เป็นศูนย์ ดังนั้นปัญหาขอบเขตจะเขียนได้เป็น

D.E. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l, t > 0$

B.C. $u(0, t) = 0 \qquad t > 0,$

$u(l, t) = 0$

I.C. $u(x, 0) = f(x) = f(x), 0 < x < l$

สำหรับสมการความร้อนอาจจะเกิดเงื่อนไขขอบเขตแบบอื่น ๆ ได้ เช่น ถ้าปลายทั้ง 2 ของเส้นวัตถุถูกหุ้มฉนวน ทำให้ความร้อนไหลผ่านพื้นที่ภาคตัดไม่ได้ นั่นคือ

B.C. $u_x(0, t) = 0$

$u_x(l, t) = 0$

และเงื่อนไขขอบเขตที่กล่าวถึงนี้มีคุณสมบัติเชิงเส้นทั้งสิ้น จากเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 2 แบบมีคุณสมบัติเป็นเอกพันธ์ (Homogeneous) แต่ถ้ากำหนดให้ B.C. เป็น $u(0, t) = 2$ หรือ $u_x(0, t) = e^{-t}$ จะกล่าวว่าเงื่อนไขขอบเขตชนิดไม่เป็นเอกพันธ์ (Nonhomogeneous boundary condition)

2. สมการคลื่น $u_{tt} = c^2u_{xx}$

เมื่อ $t = 0$ เส้นลวดเคลื่อนจากตำแหน่งสมดุลเป็นฟังก์ชันของ x และเคลื่อนด้วยความเร็วเป็นฟังก์ชันของ x เช่นกัน ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มแรกคือ

I.C. $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x), 0 < x < l$

ส่วนปลายทั้งสองถูกตรึงอยู่กับที่ ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตคือ

B.C. $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t > 0$

ส่วนการแก้ปัญหาขอบเขต จะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงบอกชนิดของสมการ และเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุดพร้อมทั้งหาคำตอบของ

   1.1 $u_{xx} + u_{yy}$ 0

   1.2 $u_{xx} - 7u_{xy} + u_{yy} = 0$

   1.3 $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$

   1.4 $u_{xx} - 2u_{xy} = 0$

   1.5 $2u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$

   1.6 $8u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

2. จงเปลี่ยนสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด

   2.1 $u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} + 9u_x = 0$

   2.2 $u_{xx} - 4u_{xy} + 13u_{yy} - 9u_y = 0$

   2.3 $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_x - u_y - 4u = 0$

   2.4 $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0$

   2.5 $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 4u_y + 25u = 0$

3. จงแสดงว่า ถ้ากำหนด

$$\xi = y - \frac{x^2}{2}$$

$$\eta = x$$

สามารถเปลี่ยนสมการ

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$$

เป็น $$u_{\eta\eta} = u_{\xi}$$