MA 317

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

บทที่ 1
สมการอันดับหนึ่ง

ดังได้ทราบแล้วว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary differential equation) เป็นสมการซึ่งประกอบด้วย อนุพันธ์ของ **ตัวแปรตาม** (dependent variable) เทียบกับ **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) เพียงตัวเดียว สำหรับ **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial differential equation) จะเกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระหลายตัว แต่นิยามและทฤษฎีบางบทของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยก็ยังมีส่วนคล้ายคลึงกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ในบทนี้จะกล่าวถึงความหมายต่าง ๆ และชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตลอดจนการแก้สมการหาคำตอบของสมการอันดับหนึ่งแบบต่าง ๆ

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ สมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวขึ้นไป

รูปทั่ว ๆ ไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งมีตัวแปรอิสระ $x, y, \ldots$ และตัวแปรตาม $u(x, y, \ldots)$ คือ

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0$$

ในที่นี้

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$u_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

และ
$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ตัวอย่าง
1. $u_x - 3u_y = \cos x$
2. $xu_x - yu_y = 5u$
3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$
4. $(u_x)^3 - xu_{yy} = x - y$
5. $(u_{xxx}) + u_{yy} + u_z = 4z$

นิยาม อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏในสมการนั้น เช่น สมการในตัวอย่างที่ 1 และ 2 มีอันดับหนึ่ง ตัวอย่างที่ 3 และ 4 มีอันดับสอง ตัวอย่างที่ 5 เป็นสมการอันดับสาม

นิยาม กำลัง (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ย่อยซึ่งมีอันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการนั้น ซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็มบวก จะเห็นว่า ตัวอย่างที่ 1, 2, 3 และ 4 มีกำลังหนึ่ง และตัวอย่างที่ 5 สมการมีกำลังสอง

นิยาม คำตอบ (Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ ฟังก์ชัน $u(x, y, \ldots)$ ใด ๆ ซึ่งคล้องตามสมการนั้น สมการหนึ่งอาจจะมีคำตอบได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ เช่น

สมการ $u_{xx} - u_{yy} = 0$

จะเห็นว่า $u_1(x, y) = (x+y)^2$

และ $u_2(x, y) = \cos(x-y)$ ต่างก็เป็นคำตอบของสมการนี้

1.2 คำตอบทั่วไปและคำตอบเฉพาะ (General solutions and Particular solutions)

ในการหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อนุพันธ์สามัญอันดับที่ n คำตอบจะเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับ **ค่าคงตัวไม่เจาะจง** (arbitrary constants) n ตัวซึ่งไม่ขึ้นแก่กัน

และจำนวนค่าคงตัวจะเท่ากับอันดับของสมการด้วย สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยการหาคำตอบทั่วไปจะเกี่ยวข้องกับ **ฟังก์ชันไม่เจาะจง** (arbitrary functions) มากกว่าดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบทั่วไปของ $u_x = x^2 + y$

วิธีทำ ในที่นี้สามารถอินทิเกรตสมการเทียบกับ x โดยถือว่า y เป็นค่าคงตัวจะได้คำตอบทั่วไปคือ

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy + f(y)$$

เมื่อ f(y) เป็นฟังก์ชันไม่เจาะจงของ y

เมื่อกำหนด **เงื่อนไขช่วย** (auxilary conditions) จะสามารถหาคำตอบเฉพาะได้ซึ่งจะไม่มีฟังก์ชันไม่เจาะจงอยู่เลย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบเฉพาะของ $u_{xy} = x$

เมื่อ $u(0, y) = y$

$u_x(x, 1) = 0$

วิธีทำ

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x$$

อินทิเกรตเทียบกับ y ; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = xy + f(x)$

เมื่อ f(x) เป็นฟังก์ชันไม่เจาะจงของ x

อินทิเกรตเทียบกับ x อีกครั้ง ; $u(x, y) = \dfrac{x^2 y}{2} + F(x) + g(y)$

โดยที่ $F(x) = \int f(x)\,dx$ และ g(y) เป็นฟังก์ชันไม่เจาะจงของ y

จาก $u(0, y) = y$ จะได้

$$g(y) = y - F(0)$$

และ $u_x(x, 1) = 0$ จะได้ว่า

$$u_x(x, 1) = x + f(x) = 0$$

$$\therefore f(x) = -x$$

แต่ $F(x) = \int(-x)dx = -\frac{x^2}{2}$

ดังนั้น $u(x, y) = \frac{x^2y}{2} - \frac{x^2}{2} + y$

1.3 ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operators)

ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (Linear differential equation) ทราบว่า ถ้า $u_1, u_2, \ldots, u_n$ เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์แล้ว $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ จะเป็นคำตอบของสมการด้วย สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยก็ใช้คุณสมบัตินี้ในการหาคำตอบเช่นกัน การกล่าวถึงการเขียนคำตอบลักษณะนี้ จะศึกษาถึงสมการเชิงเส้นซึ่งนิยามได้ในรูปของตัวดำเนินการเชิงเส้น

นิยาม ตัวดำเนินการ L (Operator) นิยามได้ถ้ามีกฎซึ่งกระทำกับฟังก์ชัน u แล้วได้ฟังก์ชัน v ซึ่ง v = Lu เช่น

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Mu = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - 4y\frac{\partial u}{\partial y} + xu$$

L และ M เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ตัวดำเนินการคือ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots$ เมื่อ x, y, ... เป็นตัวแปรอิสระ

นิยาม ถ้า u_1, u_2 เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว ตัวดำเนินการ L เรียกว่า **ตัวดำเนินการเชิงเส้น** ถ้า

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2$$

ตัวอย่าง 1. $Lu = u_x + u_y$

L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นเพราะ

$$
\begin{aligned}
L(c_1u_1 + c_2u_2) &= \frac{\partial}{\partial x}(c_1u_1 + c_2u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(c_1u_1 + c_2u_2) \\
&= c_1\frac{\partial}{\partial x}u_1 + c_2\frac{\partial}{\partial x}u_2 + c_1\frac{\partial}{\partial y}u_1 + c_2\frac{\partial}{\partial y}u_2 \\
&= c_1\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1 + \frac{\partial}{\partial y}u_1\right) + c_2\left(\frac{\partial}{\partial x}u_2 + \frac{\partial}{\partial y}u_2\right) \\
&= c_1 L u_1 + c_2 L u_2
\end{aligned}
$$

2. $Mu = (u_x)^2 + u_y$

M ไม่เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

นิยาม ถ้า L และ M เป็นตัวดำเนินการ จะนิยามผลบวก $L + M$ โดย

$$(L+M)u = Lu + Mu$$

สำหรับทุก ๆ ฟังก์ชัน u ซึ่งนิยาม Lu และ Mu ได้

ตัวอย่างเช่น ถ้า $Lu = u_x + u_y$

$Mu = x u_x - 5y u_y + x^2 u$

ดังนั้น $(L+M)u = (1+x)u_x + (1-5y)u_y + x^2u$

ข้อสังเกต ถ้า L และ M เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนั้น $L + M$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วย

พิสูจน์
$$
\begin{aligned}
(L+M)(c_1u_1 + c_2u_2) &= L(c_1u_1 + c_2u_2) + M(c_1u_1 + c_2u_2) \\
&= (c_1 L u_1 + c_2 L u_2) + (c_1 M u_1 + C_2 M u_2) \\
&= c_1(Lu_1 + Mu_1) + c_2(Lu_2 + Mu_2) \\
&= c_1(L+M)u_1 + c_2(L+M)u_2
\end{aligned}
$$

1.4 สมการเชิงเส้น (Linear Equations)

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันใด ๆ L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น สมการซึ่งอยู่ในรูปของ

$$Lu = f$$

เรียกว่าเป็น**สมการเชิงเส้น** (1.4.1)

ถ้า $f = 0$ สมการ (1.4.1) เรียกว่า **สมการเอกพันธ์** (Homogeneous equation)

ถ้า $f \neq 0$ สมการ (1.4.1) เรียกว่า **สมการไม่เป็นเอกพันธ์** (Nonhomogeneous equation)

สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งแบบทั่วไปของ 2 ตัวแปร x, y จะอยู่ในรูป

$$a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = d(x, y)$$

สมการเชิงเส้นอันดับสอง

ถ้าให้ $D_1, D_2, \ldots$ แทนตัวดำเนินการของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots$

ดังนั้น $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad D_2 u = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$D_1^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad D_2^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(1.4.2)$$

และ $D_1 D_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$

จะเห็นว่าตัวดำเนินการใน (1.4.2) เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นทั้งสิ้น

ถ้า $a_{11}, a_{12}, \ldots$ เป็นฟังก์ชันของ $x, y, \ldots$ และ

$$L = a_{11} D_1^2 + a_{12} D_1 D_2 + a_{22} D_2^2 + a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_0$$

ดังนั้น L จะเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วย จากสมการ (1.4.1) จะได้ว่า

$$a_{11} D_1^2 u + a_{12} D_1 D_2 u + a_{22} D_2^2 u + a_1 D_1 u + a_2 D_2 u + a_0 u = f$$

หรือ

$$a_{11} u_{xx} + a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u = f \qquad \ldots\ldots\ldots(1.4.3)$$

สมการ (1.4.3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสองแบบทั่ว ๆ ไป ถ้า $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_0$ เป็นค่าคงตัว จะกล่าวว่าเป็นสมการชนิดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งจะได้ศึกษาในบทต่อไปถึงการจำแนกชนิดของสมการดังกล่าว

นิยาม สมการซึ่งไม่ใช่สมการเชิงเส้นจะเรียกว่า**สมการไม่เป็นแบบเชิงเส้น** (Nonlinear equation) เช่น $u_{xx} + x(u_y)^2 = u$ ซึ่งจะเป็นสมการซึ่งอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามมีกำลังสูงกว่าหนึ่ง

คุณสมบัติที่สำคัญของสมการเชิงเส้นอย่างหนึ่งคือ Principle of superposition ซึ่งจากคุณสมบัติของตัวดำเนินการเชิงเส้นจะได้

Principle of Superposition

กำหนดให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัว ถ้า L เป็นตัวดำเนินเชิงเส้น และ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ เป็นคำตอบของสมการ $Lu_1 = f_1$, $Lu_2 = f_2$, ..., $Lu_n = f_n$ ตามลำดับ ดังนั้น $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ จะเป็นคำตอบของสมการ $Lu = c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$ ด้วย

จะเห็นว่า ถ้า $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ และ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ เป็นคำตอบของสมการ $Lu = 0$ แล้วจะได้ว่า $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ เป็นคำตอบของสมการ $Lu = 0$ นั่นเอง

สมการเชิงเส้นเอกพันธ์อาจจะมีคำตอบได้หลายคำตอบ บางสมการอาจจะสามารถหาได้ถึงจำนวนอนันต์

ตัวอย่างที่ 1 $u_x + u_y = 0$

จะเห็นว่า $u_1(x, y) = x - y$

$u_2(x, y) = (x - y)^2$

$u_3(x, y) = (x - y)^3$ ต่างก็เป็นคำตอบของสมการทั้งสิ้น

ดังนั้น $u(x, y) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$ ก็เป็นคำตอบของสมการด้วย นอกจากนั้นคำตอบของสมการนี้ในรูปทั่วไปคือ

$$u_n(x, y) = (x - y)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ซึ่งเมื่อ n มีค่ามากเข้าใกล้อนันต์

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nu_n(x, y)$$

ก็ยังคงเป็นคำตอบของสมการ ซึ่งจะกล่าวว่า $u(x, y)$ สามารถเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นอนันต์ (infinite linear combinations) ได้

ดังนั้นถ้า $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ เป็นคำตอบซึ่งมีจำนวนอนันต์ของสมการ $Lu = 0$ จะกล่าวว่าทุก ๆ ผลบวกเชิงเส้นอนันต์ $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k$ ก็เป็นคำตอบของสมการ $Lu = 0$ ด้วย แต่อนุกรม $\sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k$ จะต้องหาค่าได้

การหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

การหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีวิธีหาได้หลายวิธี ในที่นี้จะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร และวิธีของลากรองจ์ (Lagrange's Methods) ในการหาคำตอบของสมการชนิดต่าง ๆ

1.5 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$Au_x + Bu_y + Cu = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1.5.1)$$

กรณีที่ 1 ถ้า A, B, C เป็นค่าคงตัว

โดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรให้ตัวแปรใหม่คือ (ξ, η)

$$\xi = ax + by$$

$$\eta = cx + dy$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว

และ $$u(x, y) = w(\xi, \eta)$$

จะได้ $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

หรือ $$u_x = a\,w_\xi + c\,w_\eta$$

ในทำนองเดียวกัน $$u_y = b\,w_\xi + d\,w_\eta$$

แทนค่า u_x, u_y ใน (1.5.1) จะได้

$$(Aa + Bb)\,w_\xi + (Ac + Bd)\,w_\eta + Cw = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1.5.2)$$

ถ้า $A \neq 0$ จะเลือก a, b, c, d ซึ่งทำให้สมการ (1.5.2) หาคำตอบได้ และ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

ในที่นี้เลือก c, d เพื่อให้สัมประสิทธิ์ของ w_η เป็นศูนย์ และเพื่อความสะดวก
ในการคำนวณให้ $a = 1, b = 0, c = B$ และ $d = -A$

ดังนั้น $\xi = x$

$\eta = Bx - Ay$

สมการ (1.5.2) คือ

$$w_\xi + \frac{C}{A} w = 0$$

ซึ่งมีคำตอบเป็น $w(\xi, \eta) = e^{-C/A} f(\eta)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ

หรือ $u(x, y) = e^{-C/A} f(Bx \quad Ay)$

ถ้า $A = 0$ B จะต้องไม่เท่ากับศูนย์

ในการเลือก a, b, c, d ให้ $a = 0, b = 1, c = B$ และ $d = -A$

สมการ (1.5.2) คือ $w_\xi + \frac{C}{B} w = 0$

$$w(\xi, \eta) = e^{-C/B} f(q)$$

หรือ $u(x, y) = e^{-C/B} f(Bx)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของ $2u_x + 3u_y - u = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 2, B = 3, C = -1$

ให้ $\xi = ax + by$

$\eta = cx + dy$

$u(x, y) = w(\xi, \eta)$

ดังนั้น $u_x = a w_\xi + c w_\eta$

$u_y = b w_\xi + d w_\eta$

แทนในสมการที่กำหนดให้

$$(2a + 3b) w_\xi + (2c + 3d) w_\eta - w = 0$$

ให้ $a = 1, b = 0, c = 3, d = -2$

$\xi = x$

$\eta = 3x - 2y$

และได้สมการ

$$w_\xi - \frac{w}{2} = 0$$

$$\therefore \quad w(\xi, \eta) = e^{\xi/2} f(\eta)$$

หรือ $$u(x, y) = e^{x/2} f(3x - 2y)$$

กรณีที่ 2 ถ้า A, B, C เป็นฟังก์ชันของ x, y

$$A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y + C(x, y)\, u = 0 \qquad \text{..........(1.5.3)}$$

โดยวิธีเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

และ $$u(x, y) = w(\xi, \eta)$$

ซึ่งมี Jacobian $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$

และ $$u_x = w_\xi \cdot \xi_x + w_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = w_\xi \cdot \xi_y + w_\eta \cdot \eta_y$$

แทนค่า u_x, u_y ในสมการ (1.5.3) แล้วจัดสมการใหม่

$$(A\xi_x + B\xi_y)\, w_\xi + (A\eta_x + B\eta_y)\, w_\eta + Cw = 0 \qquad \text{..........(1.5.4)}$$

เพื่อจะหาคำตอบของสมการ (1.5.4) จึงเลือกให้

$$A\eta_x + B\eta_y = 0 \qquad \text{..........(1.5.5)}$$

ดังนั้น $$\eta_x = -\frac{B}{A}\eta_y$$

ถ้า $A(x, y) \neq 0$ พิจารณา $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B(x, y)}{A(x, y)}$

ถ้า $\eta_y \neq 0$ $$\therefore \quad \eta_x = -\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

หรือ $$\partial \eta = 0$$

$$\therefore \quad \eta(x, y) = k$$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

สมการ (1.5.5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\eta_x \, dx + \eta_y \, d_y = 0$$

หรือ $$\frac{B}{A} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$$

เลือกให้ $\xi(x, y) = x$ $\quad\therefore\quad \xi_y = 1$ และเนื่องจาก $\eta_y \neq 0$

ดังนั้น $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$

สมการ (1.5.4) เขียนได้เป็น

$$Aw_\xi + Cw = 0$$

ซึ่งหาคำตอบได้ $\quad w(\xi, \eta) = \exp\left[-\int \frac{C}{A} d\xi \right] f(\eta)$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ

ให้ $$\psi(\xi, \eta) = \exp\left[-\int \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} d\xi \right]$$

แต่ $\xi = x$ ดังนั้น

$v(x, y) = \psi(x, \eta(x, y))$ เป็นคำตอบเฉพาะ

คำตอบทั่วไปคือ $u(x, y) = v(x, y) f[\eta(x, y)]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของ $x^2u_x - xyu_y + yu = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $A(x, y) = x^2$, $B(x, y) = -xy$ และ $C(x, y) = y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = -\frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad xdy + ydx = 0$$

$$d(xy) = 0$$

$$\therefore \quad xy = c = \eta(x, y)$$

ให้ $$\xi(x, y) = x$$

ดังนั้น $A(\xi, \eta) = \xi^2$ และ $C(\xi, \eta) = \dfrac{\eta}{\xi}$

สมการจะเปลี่ยนอยู่ในรูปของ

$$Aw_\xi + Cw = 0$$

หรือ $\xi^2 w_\xi + \frac{\eta}{\xi} w = 0$

$$w_\xi + \frac{\eta}{\xi^3} w = 0$$

$$\int \frac{c}{A} d\xi = \int \frac{\eta}{\xi^3} d\xi = -\frac{\eta}{2\xi^2}$$

และ $\psi(\xi, \eta) = e^{\eta/2\xi^2}$

คำตอบเฉพาะคือ $v(x, y) = e^{y/2x}$

คำตอบทั่วไปคือ $u(x, y) = e^{y/2x} f(xy)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ

1.6 สมการเชิงเส้นซึ่งไม่เป็นเอกพันธ์

รูปทั่วไปของสมการคือ

$$Au_x + Bu_y + cu = D \qquad ....(1.6.1)$$

เมื่อ A, B, C, D เป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x, y

ในการหาคำตอบของสมการใช้วิธีเดียวกับสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของ $u_x - 4u_y + 2 = 1$

วิธีทำ ให้ $\xi = ax + by$

$$\eta = cx + dy$$

$$u(x, y) = w(\xi, \eta)$$

จะได้สมการ

$$(a-4b)\ w_\xi + (c-4d)\ w_\eta + 2w = 1$$

ให้ $a = 1, b = 0, c = -4, d = -1$

$$\therefore \quad \xi = x$$

$$\eta = -4x - y$$

และ $w_\xi + 2w = 1$

ซึ่งมีตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $e^{\int 2d\xi} = e^{2\xi}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{2\xi} w) = e^{2\xi}$$

$$e^{2\xi}w = \frac{1}{2}\ e^{2\xi} + f(\eta)$$

$$w = \frac{1}{2} + f(\eta)\ e^{-2\xi}$$

$$\therefore \qquad u(x,\ y) = \frac{1}{2} + f(-4x - y)\ e^{-2x}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของ $u_x - u_y + u = e^{x+2y}$

เมื่อ $u(x,\ 0) = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ D = e^{x+2y}$

ให้ $\xi = ax + by$

$$\eta = cx + dy$$

$$u(x,\ y) = w(\xi,\ \eta)$$

ให้ $a = 1,\ b = 0,\ c = -1,\ d = -1$

$$\therefore \qquad \xi = x$$

$$\eta = -x - y$$

จะได้สมการ $\quad w_\xi + \frac{C}{A}\ w = e^{x-2y} = e^{2\eta - \xi}$

หรือ $\quad w_\xi + w = e^{2\eta} \cdot e^{-\xi}$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int d\xi} = e^{\xi}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{\xi}\,w) = e^{2\eta} \cdot e^{-\xi} \cdot e^{\xi} = e^{2\eta}$$

$$e^{\xi}\ w = \xi e^{2\eta} + f(\eta)$$

$$w = \xi e^{2\eta}\ e^{-\xi} + f(\eta)\ e^{-\xi}$$

$$u(x,\ y) = xe^{x+2y} + f(\quad x - y)\ e^{-x}$$

จากเงื่อนไข $\quad u(x,\ 0) = 0$

$$u(x,\ 0) = xe^{x} + f(\quad x)\ e^{-x}$$

$$\therefore \qquad f(-x) = -xe^{2x}$$

ดังนั้น $\quad f(-(x + y)) = -(x + y)\ e^{2(x+y)}$

$$\therefore \qquad u(x,\ y) = xe^{x+2y} + [\quad (x + y)\ e^{2(x+y)}\ e^{-x}]$$

$$= xe^{x+2y} - xe^{x+2y} \qquad ye^{x+2y}$$

$$= -ye^{x+2y}$$

1.7 สมการกึ่งเชิงเส้น (Quasilinear Equations)

สมการกึ่งเชิงเส้นมีรูปทั่ว ๆ ไปคือ

$$A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = C(x, y, u) \qquad \ldots\ldots (1.7.1)$$

ในการหาคำตอบของสมการกึ่งเชิงเส้นนี้จะใช้วิธีของลากรองจ์ (Lagrange's Methods) ซึ่งวิธีนี้สามารถนำไปใช้หาคำตอบทั่วไปของสมการในหัวข้อ 1.5 และ 1.6 ได้ด้วย

การหาคำตอบ

พิจารณา
$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C} \qquad \ldots\ldots (1.7.2)$$

เรียกสมการ (1.7.2) ว่า **สมการช่วยเสริม** (Subsidiary equations)

จากสมการ (1.7.2) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \quad \text{และ} \quad \frac{du}{dx} = \frac{C}{A}$$

ซึ่งจะได้คำตอบในรูปของ $y = y(x, c_1, c_2)$

และ $u = u(x, c_1, c_2)$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถหา c_1, c_2 จากทั้ง 2 สมการได้

ดังนั้น $c_1 = v(x, y, u)$

และ $c_2 = w(x, y, u)$

โดยที่ v, w เป็นฟังก์ชันอิสระ และค่า Jacobian

$$\frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, u)}, \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, u)} \quad \text{ต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์}$$

และจะได้ว่าคำตอบทั่วไปของสมการ (1.7.1) คือ $F(v, w) = 0$

เมื่อ F เป็นฟังก์ชันใด ๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

1.7.1 ทฤษฎีบท ถ้า $v(x, y, u) = c_1$ และ $w(x, y, u) = c_2$ เป็นคำตอบของ

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}$$ เมื่อ A, B, C เป็นฟังก์ชันของ x, y, u แล้ว $F(v, w)$

$= 0$ เมื่อ F เป็นฟังก์ชันใด ๆ จะเป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

$$Au_x + Bu_y = C$$

พิสูจน์ จาก $v(x, y, u) = c_1$ และ $w(x, y, u) = c_2$ จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial u}du = 0 \qquad \text{.......} \ \mathbf{(1.7.3)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial u}du = 0 \qquad \text{.......} \ \mathbf{(1.7.4)}$$

จะหา dx, dy, du ได้ดังนี้

$$\text{Jacobian } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial v}{\partial u}du & \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial u}du & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}}{J}$$

$$= \frac{du}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

และ $$dy = \frac{du}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)$$

$$dx : dy : du = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$= A : B : C \qquad \ldots\ldots\ (1.73)$$

ในที่นี้ต้องการแสดงว่า $F(v, w) = 0$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ $Au_x + Bu_y = C$

จาก $F(v, w) = 0$ หาอนุพันธ์เทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}\right) + \frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ (1.7.6)$$

และ
$$\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}\right) + \frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ (1.7.7)$$

แต่ $\frac{\partial F}{\partial v}$ และ $\frac{\partial F}{\partial w}$ หาค่าได้จาก (1.7.6) และ (1.7.7) เมื่อ

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + u_x\frac{\partial v}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + u_x\frac{\partial w}{\partial u}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} + u_y.\frac{\partial v}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + u_y.\frac{\partial w}{\partial u}\right) \end{vmatrix} = 0$$

หรือ $u_x\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) + u_y\left(\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ (1.7.8)$$

แต่จาก (1.7.5)
$$\lambda A = \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\lambda B = \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}$$

และ
$$\lambda C = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการ (1.7.8) คือ $Au_x + Bu_y = C$ นั่นเอง

ดังนั้น $F(v, w) = 0$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบทั่วไปของ $y^2uu_x - x^2uu_y = x^2y$

วิธีทำ สมการช่วยเสริมคือ $\frac{dx}{y^2u} = \frac{dy}{-x^2u} = \frac{du}{x^2y}$

จากสมการ $\frac{dx}{y^2u} = \frac{dy}{-x^2u}$

จะได้ $x^2dx + y^2dy = 0$

หรือ $x^3 + y^3 = c_1$

จาก $\frac{dy}{-x^2u} = \frac{du}{x^2y}$

จะได้ $ydy + udu = 0$

$y^2 + u^2 = c_2$

คำตอบทั่วไปของสมการคือ $F(x^3 + y^3, y^2 + u^2) = 0$

ข้อสังเกต ถ้ามีอัตราส่วน $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้วจะได้ว่า $\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบทั่วไปของ $u(xu_x - yu_y) = y^2 - x^2$

วิธีทำ ในที่นี้สมการช่วยเสริมคือ

$$\frac{dx}{ux} = \frac{dy}{-uy} = \frac{du}{y^2 - x^2}$$

จากสมการ $\dfrac{dx}{ux} = \dfrac{dy}{-uy}$

จะได้ $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y} = 0$

หรือ $\ln x+\ln y = \ln c_1$

$$xy = c_1$$

จากข้อสังเกตข้างต้นจะเห็นว่า

$$\frac{du}{Y^2-x^2} = \frac{xdx + ydy}{u(x^2-y^2)}$$

หรือ $\dfrac{-du}{X^2-Y^2} = \dfrac{xdx + ydy}{u(x^2-y^2)}$

$\therefore -udu = xdx+ydy$

หรือ $x^2+y^2+u^2 = c_2$

คำตอบทั่วไปของสมการคือ $F(xy,\ x^2+y^2+u^2) = 0$

สำหรับสมการในหัวข้อ 1.5 และ 1.6 ก็สามารถหาคำตอบโดยวิธีของลากรองจ์ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ $au_x+bu_y+cu = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว

ṅṅï จัดสมการให้อยู่ในรูปของสมการ (1.7.1) จะได้

$$au_x+bu_y = -cu$$

สมการช่วยเสริมคือ $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{du}{-cu}$

จาก $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$ จะได้

$$ay - bx = c_1$$

ถ้า $a \neq 0$ จาก $\frac{du}{-cu} = \frac{dx}{a}$

$$\ln u = -\frac{cx}{a} + \ln c_2$$

$$u = c_2 e^{-\frac{cx}{a}}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ $u(x, y) = e^{-\frac{cx}{a}} f(ay-bx)$
เมื่อ f เป็นฟังก์ชั่นใด ๆ

ถ้า $b \neq 0$ จาก $\frac{du}{-cu} = \frac{dy}{b}$

$$\ln u = -\frac{cy}{b} + \ln c_3$$

$$u = c_3 e^{-cy/b}$$

คำตอบทั่วไป คือ $u(x, y) = e^{-cy/b} g(ay - bx)$
เมื่อ g เป็นฟังก์ชั่นใด ๆ

ถ้าสมการที่ต้องการหาคำตอบในที่นี่คือ $u_x - 3u_y + 2u = 0$
ในที่นี้ $a = 1, b = -3, c = 2$
ดังนั้นคำตอบทั่วไป คือ $u = e^{-2x}f(y + 3x)$
หรือ $u = e^{2y/3}f(y + 3x)$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาคำตอบของ $u_x + u_y = 1$ เมื่อ $u = \phi(x)$ บน $y = 2x$

วิธีทำ สมการช่วยเสริม คือ $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{1}$

$$\therefore\ x-y = c_1 \qquad \text{..... (1.7.9)}$$

$$y-u = c_2 \qquad \text{....... (1.7.10)}$$

คำตอบทั่วไป คือ $F(x-y,\ y-u) = 0$

เมื่อ $y = 2x$, $u = \phi(x)$ แทนค่าในทั้ง 2 สมการ

$$c_1 = -x$$

$$c_2 = = 2x-\phi(x)$$

$$= -2c_1-\phi(-c_1)$$

ดังนั้นได้ความสัมพันธ์ของ c_1, c_2 แล้วแทนค่า c_1, c_2 กลับด้วย (1.7.9) และ (1.7.10)

$$y-u = -2(x-y)-\phi(y-x)$$

คำตอบคือ $u(x,\ y) = 2x-y+\phi(y-x)$

ปัญหาโคชีสำหรับสมการกึ่งเชิงเส้น (Cauchy problem for quasilinear first-order equations)

ในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญก็เพื่อจะหาคำตอบของสมการอันดับหนึ่ง $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ซึ่งผ่านจุดที่กำหนดให้ในระนาบ xy สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งใน 2 ตัวแปร x และ y ปัญหาก็คือเราจะหาบริเวณคำตอบที่เรียกว่า **ผิวอินทิกรัล** (integral surface) ซึ่งผิวผ่านกราฟที่กำหนดให้ในปริภูมิ xyu ปัญหาอย่างนี้เรียกว่า **ปัญหาโคชี** (Cauchy problem)

วิธีหาคำตอบ

ให้ $x = f(t)$

$y = g(t)$

$u = h(t)$ เมื่อ $a < t < b$

ให้คำตอบของสมการช่วยเสริมคือ

$$v(f(t), g(t), h(t)) = c_1$$

และ $w(f(t), g(t), h(t)) = c_2$

โดยการกำจัด t จากสมการทั้งสอง แล้วหาความสัมพันธ์ของ c_1 และ c_2

$$\therefore F(c_1, c_2) = 0$$

ดังนั้นคำตอบของปัญหาโคชี คือ

$F[v(x, y, u), w(x, y, u)] = 0$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผิวอินทิกรัลของสมการ

$$x^2u_x + y^2u_y = u^2$$

ซึ่งผ่านเส้นโค้ง $x = t, y = 2t$ และ $u = 1$

วิธีทำ สมการช่วยเสริมคือ $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{u^2}$

จากสมการ $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

$$\therefore \frac{1}{Y} - \frac{1}{X} = c_1$$

หรือ $c_1 = \frac{x-y}{xy}$

จากสมการ $\frac{dy}{y^2} = \frac{du}{u^2}$

$$\therefore \frac{1}{u} - \frac{1}{Y} = c_2$$

หรือ $c_2 = \frac{y-u}{uy}$

เมื่อ $x = t, y = 2t$

$$c_1 = -\frac{t}{2t^2} = -\frac{1}{2t}$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2c_1}$$

เมื่อ $y = 2t,\ u = I$

$$c_2 = \frac{2t-1}{2t}$$

แทนค่า t จะได้ความสัมพันธ์ของ $c_2,\ c_2$

$$c_2 = \frac{-\frac{1}{c_1}-1}{-1/c_1} = c_1+1$$

ดังนั้นผิวอินทิกรัลมีสมการเป็น

$$\frac{Y-U}{uy} = \frac{x-y}{xy}+1$$

$$\frac{1}{Y}-\frac{1}{u} = \frac{x-y+xy}{xy}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{y}+\frac{x-y+xy}{xy}$$

$$u = \frac{xy}{2x-y+xy}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผิวอินทิกรัลของ

$$(y+xu)u_x+(x+yu)u_y = u^2-1$$

เมื่อเส้นโค้งผ่าน $x = t,\ y = 1$ และ $u = t^2$

วิธีทำ สมการช่วยเสริมคือ $\frac{dx}{y+xu} = \frac{dy}{x+yu} = \frac{du}{u^2-1}$

ให้ $A = y+xu, \quad B = x+yu$

$$A+B = (x+y)(u+1)$$

$$A-B = (x-y)(u-1)$$

ดังนั้น $\dfrac{dx+dy}{x+y} = \dfrac{du}{u-1}$ .... (1.7.11)

และ $\dfrac{dx-dy}{x-y} = \dfrac{du}{u+1}$ .... (1.7.12)

สมการ (1.7.11) แก้สมการได้ $\dfrac{u-1}{x+y} = c_1$ .... (1.7.13)

สมการ (1.7.12) แก้สมการได้ $\dfrac{u+1}{x-y} = c_2$ .... (1.7.14)

เมื่อ $x = t, \ y = 1, \ u = t^2$

จะได้ $\dfrac{t^2-1}{t+1} = c_1$ หรือ $t = c_1+1$

และ $\dfrac{t^2+1}{t-1} = c_2$

แทนค่า t จะได้ความสัมพันธ์ c_1, c_2 คือ

$$(c_1+1)^2 = c_1c_2$$

แทนค่า c_1, c_2 กลับด้วย (1.7.13) และ (1.7.14)

ผิวอินทิกรัลมีสมการเป็น

$$\left(\frac{u-1+x+y}{x+y}\right)^2+1 = \frac{u^2-1}{x^2-y^2}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

   1.1 $u_{xy} = 2$

   1.2 $u_{xx} - u_x = 3$

   1.3 $u_{yx} = x^2 - 3y$

2. จงหาคำตอบของ

   2.1 $u_{xx} = ye^x$, $u(0, y) = 0$, $u(2, y) = \sin y$

   2.2 $u_{xy} = 2xy + e^{-x}$, $u_y(0, y) = 0$, $u(x, 0) = 5$

   2.3 $u_{yx} = u_x + 5$, $u(0, y) = 0$, $u_x(x, 0) = x$

3. จงบอกชนิดของสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการชนิดเชิงเส้น หรือกึ่งเชิงเส้น หรือไม่เป็นแบบเชิงเส้น ถ้าเป็นสมการเชิงเส้น จงบอกด้วยว่าเป็นสมการชนิดเอกพันธ์ หรือไม่เป็นแบบเอกพันธ์

   3.1 $u_x u_y - 2u = y$

   3.2 $u_{xx} - xu_y = 3$

   3.3 $u_x + (u_y)^2 = 1$

   3.4 $uu_x - 2xu_y = 0$

   3.5 $yu_{xy} - e^x u_x + 5 = 0$

4. จงแสดงว่า (4.1) $u = f(x^2 + y^2)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งมีอนุพันธ์ต่อเนื่องเป็นคำตอบของสมการ $yu_x - xu_y = 0$

   (4.2) $u(x, y) = -\frac{1}{2} + e^{y/2} g(x - \frac{3}{4}y)$ เป็นคำตอบของสมการ $3u_x + 4u_y - 2u = 1$

   (4.3) จงแสดงว่า $u_1(x, y) = x^2 - u^2$ และ $u_2(x, y) = e^x \sin y$ เป็นคำตอบของ

   $u_{xx} + u_{yy} = 0$

5. จงหาคำตอบทั่วไปของ

5.1 $3u_x + 4u_y = 2$

5.2 $u_x - 2u_y + u = 0$

5.3 $u_x - u_y + u \quad 1$

5.4 $xu_x - yu_y \quad 0$

5.5 $xu_x + yu_y = u$

5.6 $2u_x + 3u_y + 5u = 0$

5.7 $xyu_x - x^2u_y + yu = 0$

6. จงหาคำตอบของ

6.1 $u_x - u_y + u = 1$ เมื่อ $u(x, 0) = \sin x$

6.2 $u_x + u_y - u = 0$ เมื่อ $u(x, 0) = \cos x$

6.3 $(x+2)u_x + 2yu_y = 2u$ เมื่อ $u(-1, y) = \sqrt{y}$

6.4 $y^2uu_x - x^2uu_y = x^2y$

6.5 $(y-u)u_x + (x-y)u_y = u - x$

6.6 $(x^2 - y^2 - u^2)u_x + 2xyu_y = 2xu$

7. จงหาผิวอินทิกรัลของสมการ

7.1 $xu_x - yu_y = 0$ เมื่อ $x = y = u = t$

7.2 $(x+u)u_x + (y+u)u_y = 0$ เมื่อ $x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = t$

7.3 $(y-u)u_x + (u-x)u_y = x - y$ เมื่อ $x = t,\ y = 2t,\ u = 0$