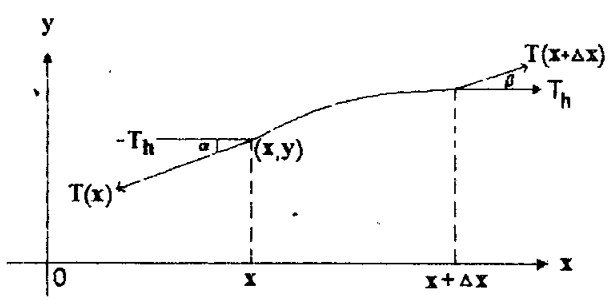
บทที่ 6
ปัญหาทางฟิสิกส์

ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาทางฟิสิกส์ ซึ่งจะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สำคัญ คือ สมการคลื่น สมการความร้อน สมการลาปลาซ เป็นต้น จากนั้นจะเป็นการแก้ปัญหาของสมการดังกล่าวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น

6.1 การสั่นในเส้นลวด

ปัญหาของเราคือพิจารณาการสั่นของเส้นลวดที่นำมาขึงให้ตึงระหว่างจุดสองจุด โดยสมมติว่า

1. ตำแหน่งสมดุลย์อยู่บนแกน x ในระนาบ xy
2. เส้นลวดยืดหยุ่นได้ และมีแรงตึง $T(x)$
3. การเคลื่อนที่อยู่ในแนวดิ่งเท่านั้น และระยะขจัด $y(x,t)$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวของลวด
4. แรงตึงในแนวระดับ (T_h) มีขนาดเท่ากัน และความชัน $y_x(x,t)$ มีค่าน้อย
5. ลวดมีความหนาแน่นสม่ำเสมอและคงที่ (ρ คงที่) พิจารณาส่วนของเส้นลวดเล็ก ๆ ยาว Δx ดังรูป



รูปที่ 1

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน สำหรับการเคลื่อนที่แนวดิ่ง

$$F=ma$$

$$-T(x)\sin\alpha + T(x+\Delta x)\sin\beta - mg = my_{tt}(x,t) \quad \ldots\ldots(l)$$

จากสมมติฐานข้อ 4

$$-T(x)\cos\alpha + T(x + \text{Axkos}\ \beta = 0$$

และ $$T(x)\cos\alpha = T(x + \text{Axkos}\ \beta = T_h$$

นั่นคือ $$T(x) = \frac{T_h}{\cos\ a!} \quad , \quad T(x+\Delta x) = \frac{T_h}{\cos\beta}$$

แทนค่า $T(x)$, $T(x + \Delta x)$ และ m ▫ $\rho\Delta x$ ในสมการ (1)

$$-T_h\tan\alpha + T_h\tan\beta - \rho\Delta g = \rho\Delta x y_{tt}(x,t) \quad \ldots\ldots(2)$$

แต่ความชันที่จุดปลาย (x,y) และ $(x + Ax,\ y + \Delta y)$ คือ

$$y_x(x,t)\ ▫\ \ldots\ \alpha\ ▫\ y_x(x+\Delta x,t)\ ▫\ \tan\beta$$

ดังนั้น จากสมการ (2) จะได้

$$-T_h y_x(x,t) + T_h y_x(x + Ax,\ t) - \rho g\Delta x = \rho y_{tt}(x,t)\Delta x$$

หารตลอดด้วย Ax

$$T_h\left[\frac{y_x(x+\Delta x,t) - y_x(x,t)}{Ax}\right] - \rho g\ ▫\ \rho y_{tt}$$

ให้ $Ax \to 0$ ดังนั้น

$$T_h y_{xx}(x,t) - \rho g\ ▫\ \rho y_{tt}$$

หรือ、 $$y_{tt}\ ▫\ \frac{T_h}{\rho} y_{tt} - g \quad \ldots\ldots(3)$$

ถ้าไม่คิดน้ำหนักของเส้นลวด จะได้

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} \quad \ldots\ldots(4)$$

โดยที่ $a^2 = T_h/\rho$ และเรียกสมการ (4) ว่า สมการคลื่น แต่ถ้ามีแรงแดมพ์ โดยแรงนี้ต่อหนึ่งหนึ่งหน่วยความยาวเป็นสัดส่วนกับความเร็ว y_t แล้ว สมการที่ได้คือ

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} - ky_t \quad \ldots\ldots(5)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวที่ได้จากค่าคงตัวจากการเป็นสัดส่วนหารด้วย ρ

การกำหนดเงื่อนไข

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ จะต้องมีข้อมูลเพิ่มเติมกำหนดมาให้ ซึ่งเรียกว่าเงื่อนไขของสมการ โดยปกติจะอยู่ในรูปเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น เช่น

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \qquad .....(6)$$

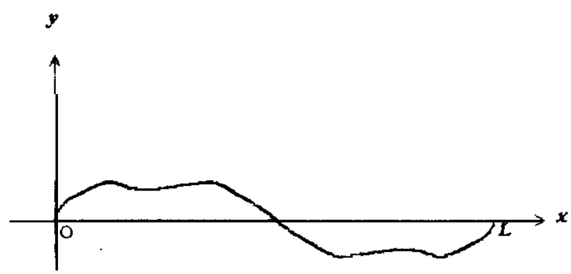
เงื่อนไขตามสมการ (6) หมายถึง ระยะขจัดของเส้นลวดเป็นศูนย์ที่ที่ $x = 0$ และ $x = L$ ซึ่งอาจทำได้โดยตรึงเส้นลวดไว้ที่จุดปลายดังกล่าว เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขขอบเขต

$$y_t(x,0) = 0 \qquad .....(7)$$

เงื่อนไขตามสมการ (7) หมายถึงความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ นั่นคือเริ่มการทดลองขณะที่ลวดอยู่ในสภาพนิ่ง

$$y(x,0) = f(x) \qquad .....(8)$$

เงื่อนไขตามสมการ (8) หมายถึงเริ่มต้นลวดอยู่ในสภาพตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ ดังรูป ซึ่งเงื่อนไขตามสมการ (7) และ (8) เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น



รูปที่ 2

และ $|y(x,t)| < M$

หมายถึงระยะขจัดมีขอบเขตจำกัดสำหรับทุกค่า x และ t ซึ่งโดยทั่วไปเราต้องการผลเฉลยที่มีขอบเขตจำกัด

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ปัญหาของสมการคลื่นต่อไปนี้

$$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t)\ , \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad , \ t \geq 0 \qquad .....(9)$$

$$y_t(x,0) = 0 \ , \ y(x,0) = f(x) \ , \ 0 \le x \le L$$
$$|y(x,t)| < M \ , \ 0 \le x \le L, \quad t \ge 0$$

วิธีทำ เราจะแก้ปัญหาตามสมการ (9) โดยการแยกตัวแปร ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. แยกตัวแปร

ให้ $y(x,t) = X(x)T(t)$

แทนในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของสมการ (9) จะได้

$$XT'' = a^2X''T$$

หารตลอดด้วย a^2XT

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} \qquad .....(10)$$

เนื่องจากเราต้องการผลเฉลยมีขอบเขต ดังนั้น อัตราส่วนตามสมการ (10) จึงเป็นค่าลบ นั่นคือ

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

จากสมการข้างต้น ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการคือ

$$X'' + \alpha^2X = 0$$
$$T'' + \alpha^2a^2T = 0$$

3. เงื่อนไขที่เป็นเอกพันธ์

จากเงื่อนไข $y(0,t) = 0$ แทนในรูปแบบของการแยกตัวแปร จะได้

$$y(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) = 0$ จะได้ผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อยดังนั้นให้

$$X(0) = 0$$

ทำนองเดียวกัน จาก $y(L,t) = 0$ จะได้

$$y(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) \neq$ แล้ว

$$X(L) = 0$$

สำหรับเงื่อนไข $y_t(x,0) = 0$ จะได้

$$y_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0$$

ถ้า $X(x) \neq 0$ แล้ว

$$T'(0) = 0 \qquad \text{.....(11)}$$

4. ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

จากสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขที่ได้ทำให้ได้ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \; ; \; X(0) = X(L) = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปคือ

$$X = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

ใช้เงื่อนไข $X(0) = 0$ จะได้ $C_1 = 0$

ใช้เงื่อนไข $X(L) = 0$ จะได้

$$C_2 \sin \alpha L = 0$$

ถ้า $C_2 = 0$ จะได้ $x = 0$ เป็นผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย

ทำให้ $y(x,t) = 0$

ดังนั้น ถ้า $C_2 \neq 0$ แล้ว

$$\sin \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n\pi$$

หรือ $$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \; n \in N \qquad \text{.....(12)}$$

เป็นค่าเฉพาะของปัญหา (เนื่องจาก $\alpha = 0$ จะได้ผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย)

ดังนั้นฟังก์ชันค่าเฉพาะที่สมนัยกัน คือ

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \; n \in N \qquad \text{....(13)}$$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ T

แทนค่า $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ และจากเงื่อนไข (11) จะได้

$$T'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} T = 0 \; ; \; T'(0) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$T = B_1\cos\frac{n\pi at}{L} + B_2\sin\frac{n\pi at}{L}$$

แต่เงื่อนไขเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์

$$T' = \frac{n\pi a}{L}\left[-B_1\sin\frac{n\pi at}{L} + B_2\cos\frac{n\pi at}{L}\right]$$

$$T'(0) = 0 + \frac{n\pi a}{L}B_2 = 0$$

ดังนั้น $B_2 = 0$

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L} \qquad \text{.....(14)}$$

6. หลักการรวมผลเฉลย

จาก $y(x,t) = X(x)T(t)$ ทำให้ได้ผลเฉลย คือ

$$y_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \quad n \in N \qquad \text{.....(15)}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ โดยหลักการรวมผลเฉลยจะได้

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} \qquad \text{.....(16)}$$

7. เงื่อนไขที่ไม่เอกพันธ์

จากเงื่อนไข $y(x,0) = f(x)$ จะพบว่า

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L \qquad \text{.....(17)}$$

อยู่ในรูปอนุกรมฟูริเยร์ชายน์ของ f ส.ป.ส. คือ

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

8. ผลเฉลยสุดท้าย

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} \qquad \ldots\ldots(18)$$

โดยที่ $\quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$

หมายเหตุ

เนื่องจาก $\quad \cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2}[\sin\frac{n\pi}{L}(x-at) + \sin\frac{n\pi}{L}(x+at)$

ดังนั้นจากสมการ (18) เขียนใหม่ได้เป็น

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}(x-at) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{L}(x+at)$$

กำหนดให้ $\qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

และ $\quad F(x) = f(x)\ ,\ 0 \le x < L$

$F(-x) = -F(x)\ ,$ ทุกค่า x

$F(x+2L) = F(x)$

เพราะฉะนั้นสมการข้างต้นสามารถเขียนได้เป็น

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[F(x-at) + F(x+at)]$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t)\ ,\quad 0 < x < L\ ,\ t > 0$$
$$y(0,t) = y(L,t) = 0\ ,\ t \ge 0 \qquad \ldots\ldots(19)$$
$$y_t(x,0) = g(x)\ ,\ y(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$|y(x,t)| < M\ ,\ 0 \le x \le L\ ,\ t \ge 0$$

วิธีทำ ปัญหานี้มีเงื่อนไขขอบเขตเหมือนกับตัวอย่างที่ 1 แต่เงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันตรงที่ความเร็วเริ่มต้นเป็น $g(x)$ แทนที่จะเป็นศูนย์ ฉะนั้นการแก้สมการจึงเหมือนกันตั้งแต่ขั้นตอนที่ 1- 4 โดย $T'(0) \neq 0$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ T

$$T'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} T = 0$$

มีผลเฉลยทั่วไป

$$T_n(t) = B_1\cos\frac{n\pi at}{L} + B_2\sin\frac{n\pi at}{L} \qquad \text{.....(20)}$$

6. หลักการรวมผลเฉลย

จากสมการ (1 3) และ (20) จะได้

$$y_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\ [B_1\cos\frac{n\pi at}{L} + B_2\sin\frac{n\pi at}{L}],\ n \in N \qquad \text{.....(21)}$$

โดยหลักการรวมผลเฉลย

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\ [E_n\cos\frac{n\pi at}{L} + F_n\sin\frac{n\pi at}{L}]$$

7. เงื่อนไขที่ไม่เอกพันธ์

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x,0) = f(x)$

ทำให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\sin\frac{n\pi x}{L}$

ซึ่งเป็นอนุกรมฟูริเยร์ชายน์

$$E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

สมมติว่าอนุกรมสามารถหาอนุพันธ์ทีละพจน์ได้

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\ [\frac{n\pi a}{L}(-E_n\sin\frac{n\pi at}{L} + F_n\cos\frac{n\pi at}{L})]$$

จากเงื่อนไข $y_t(x,0) = g(x)$

ทำให้

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} F_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมฟูริเยร์ซายน์ มี ส.ป.ส.

$$F_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

a. ผลเฉลยสุดท้าย

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[E_n\cos\frac{n\pi at}{L} + F_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right]$$

โดยที่

$$E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$F_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&y_{tt}(x,t) = a^2y_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < L\ ,\ t > 0\\
&y_x(0,t) = y_x(L,t) = 0\ ,\ t > 0 \qquad \ldots\ldots(22)\\
&y_t(x,0) = 0 \qquad ,\ 0 < x < t\\
&y(x,0) = f(x) \qquad ,\ 0 < x < L
\end{aligned}$$

วิธีทำ 1. แยกตัวแปร

ให้ $y(x,t) = X(x)T(t)$

จะได้ $XT'' = a^2X''T$

หรือ $\dfrac{T''}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} = -\alpha^2$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$X'' + \alpha^2X = 0$$

$$T'' + \alpha^2a^2T = 0$$

3. เงื่อนไขที่เป็นเอกพันธ์

$$y_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) \neq 0$ แล้ว $X'(0) = 0$

$$y_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) \neq 0$ แล้ว $X'(t) = 0$

$$y_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0$$

ถ้า $X(x) \neq 0$ แล้ว $T'(0) = 0$

4. ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \; ; \; X'(0) = X'(L) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$X = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

หาอนุพันธ์ จะได้

$$X' = -\alpha C_1 \sin \alpha x + \alpha C_2 \cos \alpha x$$

$$X'(0) = 0 + \alpha C_2 \; □ \; □$$

ถ้า $\alpha \neq$ □ ♦※⊕≙ C_2 ◨ □

$$X'(L) = -\alpha C_1 \sin \alpha L = 0$$

ถ้า $\alpha \neq 0$, $C_1 \neq 0$ แล้ว $\sin \alpha L = 0$

$$\alpha L = n\pi$$

$$\alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

ถ้า $n = 0$, $\alpha = 0$ ดังนั้น

$$X'' = 0$$

$$X' = E1$$

$$X = E_1 x + E_2$$

จากเงื่อนไข $X'(0) = 0$ จะได้ $E_1 = 0$ แต่ E_2 เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ ดังนั้น

$$X_0(x) \; □ \; □$$

และ $$X_n(x) = \cos \frac{n\pi X}{L} \, , \; n \,\&\, N_0 \qquad \text{.....(23)}$$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ T

$$T'' + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T = 0 \; ; \; T'(0) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$T = B1\cos\frac{n\pi at}{L} + B_2\sin\frac{n\pi at}{L}$$

หาอนุพันธ์

$$T' = \frac{-n\pi a}{L} B1\sin\frac{n\pi at}{L} + \frac{n\pi a}{L} + B_2\cos\frac{n\pi at}{L}$$

$$T'(0) = \frac{n\pi a}{L} B_2 = 0.$$

$$B_2 = 0$$

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L}, \quad n \in N_0 \qquad .....(24)$$

6. หลักการรวมผลเฉลย

จากสมการ (23) และ (24) จะได้

$$y_n(x, t) = \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \quad n \in N_0$$

ดังนั้น $$y(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} \qquad .....(25)$$

7. เงื่อนไขที่ไม่เป็นเอกพันธ์

$$y(x,0) = f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,; \quad n \in N_0$$

8. ผลเฉลยสุดท้าย

$$y(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}$$

โดยที่

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

แบบฝึกหัดที่ 6.1

1. ลวดเส้นหนึ่ง ปลายทั้งสองข้างยึดติดแน่นที่จุด (0,0) และ (2,0) ถ้าเริ่มต้นมีความเร็ว $g(x)$ ตำแหน่งสมดุลย์คือ $y = 0$ จงหาการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้

2. จงแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$y_{tt} = a^2 y_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , t > 0$$
$$y_x(0,t) = y_x(\pi,t) = 0 \quad , \ t > 0$$
$$y_t(x,0) = 0 \ , \ y(x,0) = kx \ , \ 0 < x < \pi \ , \ k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

3. เส้นลวดยาว L หน่วยตรึงจุดปลายทั้งสองไว้บนแกน x โดยให้จุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด ณ จุดกึ่งกลางของเส้นลวดดึงลวดขึ้นสูง h หน่วย แล้วปล่อยจากสภาพนิ่ง จงกำหนดรูปแบบของปัญหานี้พร้อมด้วยเงื่อนไข

4. ลวดเส้นหนึ่งตรึงจุดปลายไว้ที่จุด (0,0) แล (L,0) กำหนดว่าเริ่มต้นเส้นลวดอยู่ในรูป

$$y(x,0) = \begin{cases} 0.02x & , \ 0 < x < L/2 \\ \\ 0.02(L-x) & , \ L/2 < x < L \end{cases}$$

และลวดถูกปล่อยจากสภาพนิ่ง จงหาการเคลื่อนที่ของลวด

5. จงแก้ปัญหา

$$y_{tt} = 4y_{xx} \quad , \ 0 < x < 5, \ t > 0$$
$$y(0,t) = y(5,t) = 0, \ t \geq 0$$
$$y(x,0) = 0 \ \text{ ▭ } y_t(x,0) \ \text{▫} \sin 2\pi x \ , \ 0 < x < 5$$

6. จากสมการคลื่น

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} \qquad \ldots\ldots(*)$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ v ▫ $x + at$, $w = x - at$ จะได้สมการใหม่คือ

$$y_{vw} = 0$$

จงแสดงว่า ผลเฉลยของสมการ (*) คือ

$$y(x,t) = \phi(x + at) + \psi(x - at) \qquad \ldots\ldots(**)$$

เรียกผลเฉลย (**) ว่า ผลเฉลยของดาลองแบต์ (d' Alembert's solution)

และถ้ากำหนดเงื่อนไข b ริ่มต้น $y(x, 0)$ ▫ $f(x)$ ▭ $y_t(x,0)$ ▫ ▭

จงแสดงว่าผลเฉลยของสมการ (*) คือ

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$$

คำตอบ

1. $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{2} \sin\frac{n\pi at}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^2 g(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

2. $$y(x,t) = \frac{k\pi}{2} - \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x\,\cos(2n-1)at}{(2n-1)^2}$$

3. $$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \; t > 0$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$y(x,0) = \begin{cases} 2hx/L, & 0 \leq x \leq L/2 \\ 2h(L-x)/L, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$y_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L$$

4. $$y(x,t) = \frac{0.08L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{L}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{L}$$

5. $$y(x,t) = \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x \sin 4\pi t$$

6.2 การนำความร้อน

จากการทดลอง เกี่ยวกับการนำความร้อน เราทราบว่า

1. ความร้อนไหลจากที่ที่มีอุณหภูมิสูงไปยังที่ที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า
2. อัตราการไหลของความร้อนผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่เป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์ของอุณหภูมิที่ตั้งฉากกับพื้นที่
3. ปริมาณความร้อนที่สูญเสียหรือได้รับเป็นสัดส่วนกับมวลของวัตถุและการเปลี่ยนของอุณหภูมิ

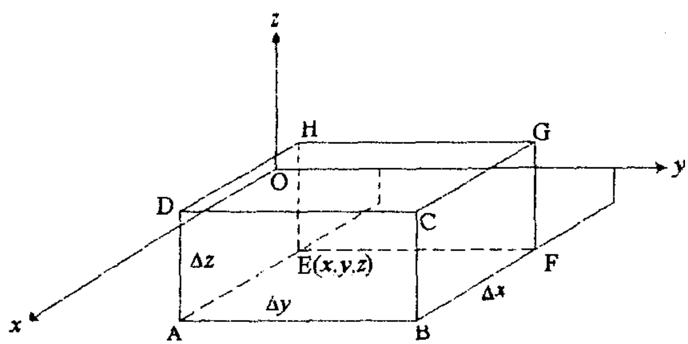
ให้ K เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนในข้อ 2. เรียกว่า ค่าสภาพนำความร้อน และ C เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนในข้อ 3. เรียกว่าค่าความร้อนจำเพาะ

พิจารณาวัตถุนำความร้อนชิ้นเล็ก ๆ เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านยาว Δx, Δy, Δz ดังรูป... น้ำหนักของวัตถุชิ้นนี้คือ

$$\Delta w = \rho \Delta x \Delta y \Delta z = g \Delta m \qquad .....(1)$$

เมื่อ ρ เป็นความหนาแน่น , Δm เป็นมวลของวัตถุชิ้นเล็ก ๆ นี้ และ g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ดังนั้น

$$\Delta m = \frac{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}{g} \qquad .....(2)$$



รูปที่ 3

ถ้าให้อุณหภูมิเปลี่ยนไป Δu สำหรับช่วงเวลา Δt ปริมาณความร้อนของวัตถุ ΔQ ตามข้อ 3. คือ

$$\Delta Q = C\,\Delta m\,\Delta u \qquad \ldots\ldots(3)$$

แทนค่า สมการ (2) ในสมการ (3) จะได้

$$\Delta Q = \frac{C\rho}{g}\,\Delta x\Delta y\Delta z\Delta u$$

หารตลอดด้วย Δt

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{C\rho}{g}\,\Delta x\Delta y\Delta z\,\frac{\Delta u}{\Delta t} \qquad \ldots\ldots(4)$$

จากข้อ 2. ความร้อนที่ไหลเข้าไปในวัตถุชิ้นดังกล่าวมีอัตราการไหลคือ

$$-K\Delta A u_x \qquad \ldots\ldots(5)$$

โดย ΔA เป็นพื้นที่หน้าตัด และ u_x เป็นเกรเดียนต์

ทำนองเดียวกันความร้อนที่ไหลออกจากวัตถุชิ้นดังกล่าวก็จะเป็นไปตามสมการ (5) แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม

สำหรับพื้นที่หน้าตัด ABCD และ EFGH $\Delta A = \Delta y\Delta z$

สำหรับพื้นที่หน้าตัด BCGF และ ADHE $\Delta A = \Delta x\Delta z$

สำหรับพื้นที่หน้าตัด ABFE และ CDHG $\Delta A = \Delta x\Delta y$

ให้ $q(x,y,z,t)$ เป็นปริมาณความร้อนภายในต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

ปริมาตรความร้อนลัพธ์ที่เกิดจากความร้อนไหลเข้า-ออกพื้นที่หน้าตัด EFGH และ ABCD คือ

$$K\Delta y\Delta z[u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x]$$

โดย $u_x|_{x+\Delta x}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x คำนวณที่ $x + \Delta x$ ณ จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่หน้าตัด

รวมปริมาณความร้อนลัพธ์ทั้งหกหน้าของพื้นที่หน้าตัด แล้วจะเท่ากับ $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ นั่นคือ

$$\frac{C\rho}{g}\,\Delta x\Delta y\Delta z\,\frac{\Delta u}{\Delta t} = K[\Delta y\Delta z(u_x|_{x+\Delta x} - u_x|_x) + \Delta x\Delta z(u_y|_{y+\Delta y} - u_y|_y)$$
$$+ \Delta x\Delta y(u_z|_{z+\Delta z} - u_z|_z] + \Delta x\Delta y\Delta z\, q(x,y,z,t)$$

หารตลอดด้วย $(Cp/g)\Delta x\Delta y\Delta z$ และให้ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ เข้าใกล้ศูนย์ จะได้

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{g}{Cp} q(x,y,z,t) \qquad \ldots(6)$$

โดยที่ $a^2 = Kg/Cp$ เรียกสมการ (6) ว่าสมการความร้อนใน 3 มิติ
ถ้าไม่มีความร้อนภายใน $q(x,y,z,t) = 0$ สมการ (6) จะกลายเป็น

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \qquad \ldots\ldots(7)$$

ถ้า $u_t = 0$ อุณหภูมิจะไม่ขึ้นกับเวลา การไหลของความร้อนจะเป็นการไหลอย่างสม่ำเสมอ ทำให้ได้สมการ

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad \ldots\ldots(8)$$

สำหรับสมการความร้อนใน 1 - มิติ คือ

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad \ldots\ldots(9)$$

กรณีนี้เป็นการพิจารณาการไหลตามแกน x อย่างเดียว เช่นแท่งโลหะเล็ก ๆ ยาว L หน่วย ถ้าที่ปลายแท่งโลหะทั้งสองทำให้มีอุณหภูมิศูนย์ และอุณหภูมิเริ่มต้นคือ $f(x)$ โดยที่ผิวของแท่งโลหะหุ้มฉนวน สามารถเขียนเงื่อนไขได้เป็น

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)\ , \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0\ , \quad t \geq 0 \qquad \ldots\ldots(10) \\ &u(x,0) = f(x) \qquad\quad , \quad 0 < x < L \end{aligned}$$

วิธีทำ 1. แยกตัวแปร

ให้ $u(x,t) = X(x)T(t)$

ดังนั้น $XT' = a^2X''T$

หารตลอดด้วย a^2XT จะได้

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$X'' + \alpha^2X = 0$$

$$T' + \alpha^2a^2T = 0$$

3. เงื่อนไขที่เป็นเอกพันธ์

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) \neq 0$ แล้ว $X(0) = 0$

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

ถ้า $T(t) \neq 0$ แล้ว $X(L) = 0$

4. ปัญหาของสตูร์ม-ลิอูวิลล์

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \ ; \ X(0) = X(L) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$X = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

จาก $X(0) = 0$ จะได้ $C_1 = 0$

จาก $X(L) = 0$ จะได้ $C_2 \sin \alpha L = 0$

ถ้า $C_2 \neq 0$ $\sin \alpha L = 0$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

$$\alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad , n \in N$$

ถ้า $n = 0$, $\alpha = 0$ จะได้ผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย ดังนั้น

$$x_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \ , n \in N \qquad \text{.....(11)}$$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ T

$$T' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} T = 0$$

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right) \qquad \text{.....(12)}$$

6. หลักการรวมผลเฉลย

จากสมการ (11) และ (12)

$$u_n(x,t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right) \text{kin} \frac{n\pi x}{L} \ , \ n \in N \qquad \text{.....(13)}$$

ดังนั้น

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Anexp} \left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2} \right) \text{kin} \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{.....(14)}$$

7. เงื่อนไขที่ไม่เอกพันธ์

จากเงื่อนไขสุดท้ายคือ $u(x,0) = f(x)$ ทำให้ได้

$$f(x) \,\square\, \sum_{n-l}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \;,\quad 0 < x < L$$

ซึ่งเป็นอนุกรมฟูริเยร์ซายน์

$$A_n \,\square\, \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad \text{.....(15)}$$

8. ผลเฉลยสุดท้าย

$$u(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L f(\xi)\sin \frac{n\pi\xi}{L}\, d\xi \right] \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L}\right) \text{kin} \frac{n\pi x}{L^2}$$

หรือ

$$u(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L f(\xi)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2} \right)\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L}\, d\xi \qquad \text{.....(16)}$$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาการนำความร้อนในเส้นลวดซึ่งยาว 2L หน่วย ที่นำมาขดเป็นวงกลม ดังนี้

$$u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)\,,\quad 0 < x < L\,,\; t > 0$$
$$u(-L,t) = u(L,t)$$
$$u_x(-L,t) = u_x(L,t) \;,\quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$

วิธีทำ 1. แยกตัวแปร

ให้ $u(x,t)$, $X(x)T(t)$

ดังนั้น $XT' = a^2X''T$

หารตลอดด้วย a^2XT จะได้

$$\frac{T'}{a^2T} \square \frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$X'' + \alpha^2X = 0$$

$$T' + \alpha^2a^2T = 0$$

3. เงื่อนไขนี้เป็นเอกพันธ์

$$X(-L)T(t) = X(L)T(t)$$

$$X(-L) = X(L)$$

และ $X'(-L)T(t) = X'(L)T(t)$

$$X'(-L) = X'(L)$$

4. ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

$$X'' + \alpha^2X = 0 \ , \ X(-L) = X(L) \ , \ X'(-L) = X'(L)$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$X = c_1\cos \alpha x + c_2\sin \alpha x$$

จากเงื่อนไข $X(-L) = X(L)$

$$c_1\cos \alpha L - c_2\sin \alpha L \square c_1\cos \alpha L + c_2\sin \alpha L$$

$$c_2\sin \alpha L = 0 \qquad \ldots..(17)$$

จากเงื่อนไข $X^4(-L) \square X'(L)$

$$\alpha c_1\sin \alpha L + \alpha c_2\cos \alpha L = -\alpha c_1\sin \alpha L + \alpha c_2\cos \alpha L$$

$$\alpha c_1\sin \alpha L = 0$$

ถ้า $\alpha = 0$ จะได้ผลเฉลย

$$X(x) = c_1$$

ถ้า $\alpha \neq 0$

$$c_1\sin \alpha L \square 0 \qquad \ldots..(18)$$

เพื่อที่จะได้ผลเฉลยที่มีคุณค่าจากสมการ (17) และ (18) จะพบว่า

$c_1 \neq 0$ และ $c_2 \neq 0$

นั่นคือ $\sin \alpha L = 0$

$$\alpha L = n\pi$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

$$\alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n \in N$$

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L}, \; n \in N$$

จากผลเฉลย $X(x) = c_1$ และ $X_n(x)$ ทำให้ได้ผลเฉลย

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} + \sin \frac{nrx}{L}, \; n \in N_0 \qquad .....(19)$$

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ T

$$T' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} T = 0$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2w^2a^2t}{L^2}\right), \; n \text{ ผ } N_0 \qquad .....(20)$$

6. หลักการรวมผลเฉลย

จากสมการ (19) และ (20)

$$u_n(x,t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right)\left(\cos \frac{n\pi x}{L} + \sin \frac{n\pi x}{L}\right), \; n \in N_0$$

ดังนั้น
$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right) \qquad .....(21)$$

7. เงื่อนไขที่ไม่เป็นเอกพันธ์

จากเงื่อนไขสุดท้าย $u(x,0) = f(x)$ จะพบว่า

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right), -L < x < L$$

ซึ่งเป็นอนุพันธ์ฟูริเยร์

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$A_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$B_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

8. ผลเฉลยสุดท้ายคือ

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}\right)$$

โดยที่

$$A_n \quad \int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n \in N_0$$

$$B_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x\ \mathrm{kin} \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ n \in N$$

แบบฝึกหัดที่ 6.2

1. แท่งโลหะยาว L หน่วย เอาฉนวนหุ้มปลายทั้งสองไว้เพื่อป้องกันไม่ให้ความร้อนไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดที่ปลายทั้งสอง อุณหภูมิเริ่มต้นเป็น $\cos(3\pi x/L)$ จงหาอุณหภูมิภายในแท่งโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ

2. แท่งโลหะยาว L หน่วย ที่ปลาย $x = 0$ ทำให้มีอุณหภูมิศูนย์ และที่ปลาย $x = L$ มีฉนวนหุ้มอยู่ อุณหภูมิเริ่มต้นเป็น $f(x)$ จงหา $u(x,t)$

3. จงแก้ปัญหา

$$u_t = 2u_{xx}, \quad 0 < x < 4,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(4,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2 \\ 4-x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

4. จงแก้ปัญหา

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = u(2,t) \;\square\; 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) \;\square\; \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \text{[illegible]}, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

คำตอบ

1. รูปแบบปัญหาคือ

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \quad ; \quad 0 < x < L \; , \; t > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \; , \; t \geq 0$$

$$u(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{L} \quad , \quad 0 < x < L$$

$$u(x,t) = \exp\left[-\frac{9\pi^2 a^2 t}{L^2}\right] \cos\frac{3\pi x}{L}$$

2. รูปแบบปัญหาคือ

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < L \; , \; t > 0$$

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \; , \; t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \; 0 < x < L$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2 a^2 t}{4L^2}\right] \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx$$

3. $$u(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{8}\right] \sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}$$

4. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{16}\right] \cos\frac{(2n-1)\pi x}{4}$$

$$B_n = \frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}\left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{4} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\right],$$

6.3 พลังงานศักย์ในการโน้มถ่วง

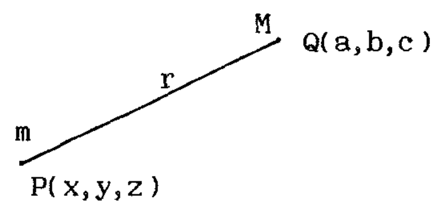
พิจารณาอนุภาคสองอนุภาคซึ่งมีมวล m และ M วางอยู่ที่จุด P(x,y,z) และ Q(a,b,c) โดยมีระยะห่างกัน r หน่วย ดังนั้น

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \qquad .....(1)$$

เราทราบว่าแรงดึงดูดของมวลทั้งสองเป็นสัดส่วนกับผลคูณของมวล และเป็นสัดส่วนกลับกับระยะห่างกำลังสอง นั่นคือ

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

เมื่อ G เป็นค่าคงตัวเนื่องจากความโน้มถ่วง



ในทางฟิสิกส์เรายังทราบอีกว่า แรงนี้เป็นสัดส่วนกับอนุพันธ์ของพลังงานศักย์เทียบกับระยะห่าง r ฉะนั้นถ้าให้ u(x,y,z) เป็นพลังงานศักย์ที่จุด P แล้ว

$$u(x,y,z) = -\frac{GmM}{r}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าที่จุด Q มีมวล $M_1, M_2, \ldots, M_n$ แล้วพลังงานศักย์ที่จุด P คือ

$$u(x,y,z) = -Gm \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{r_k}$$

ซึ่งเราสามารถขยายแนวความคิดเป็น พลังงานศักย์ที่จุด P(x,y,z) ที่อยู่ภายนอกวัตถุที่มีปริมาตร V ซึ่งกำหนดโดย

$$u(x,y,z) = -GM \iiint_V \frac{\rho}{r}\, dV \qquad .....(2)$$

โดยที่ ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุที่ Q และ r เป็นไปตามสมการ (1) หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (2)

$$u_x = Gm \iiint_V \rho \frac{(x - a)}{r^3} dV$$

$$u_{xx} = Gm \iiint_V \rho [\frac{1}{r^3} - \frac{3(x - a)^2}{r^5}]dV \qquad .....(3)$$

$$u_{yy} = Gm \iiint_V \rho [\frac{1}{r^3} - \frac{3(y - b)^2}{r^5}]dV \qquad .....(4)$$

$$u_{zz} = Gm \iiint_V \rho [\frac{1}{r^3} - \frac{3(z - c)^2}{r^5}]dV \qquad .....(5)$$

รวมสมการ (3),(4) และ (5) จะได้

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = Gm \iiint_V \rho (\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3})dV = 0$$

หรือ $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ......(6)

เรียกสมการ (6) ว่า สมการลาปลาซ ใน 3 มิติ

แต่ถ้าเป็นกรณี 2 - มิติ สมการลาปาซ จะอยู่ในรูป

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

เราเรียกฟังก์ชัน u ที่สอดคล้องสมการ $\nabla^2 u = 0$ ว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิค

<u>ข้อสังเกต</u>

ปัญหาการนำความร้อนใน 1 - มิติ สามารถนำไปสู่สมการลาปลาซได้ดังนี้ เมื่ออุณหภูมิแต่ละแห่งในวัตถุไม่ขึ้นกับเวลา อุณหภูมินั้นจะเรียกว่าอยู่ในสภาพสมดุลย์ และการไหลของความร้อนในวัตถุนั้นจะเรียกว่าเป็นแบบ การไหลอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งในกรณีนี้ $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

ดังนั้นสมการความร้อนจะกลายเป็น

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$u(0) = a \ , \ u(b) = b$$

ทำนองเดียวกัน กรณี 2-มิติ จะได้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$u(x,0) = f(x)$

$u(x,b) = 0$

$u(0,y) = 0$

$u(a,y) = 0$

ซึ่งก็คือสมการลาปลาซนั่นเอง

ปัญหาของสมการคลื่นและสมการความร้อน จะเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต แต่ปัญหาของสมการลาปลาซจะเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขขอบเขตเพียงอย่างเดียว ซึ่งเราแบ่งประเภทของเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

1. เงื่อนไขขอบเขตชนิดที่หนึ่ง หรือเงื่อนไขแบบดีริชเลต์ (Dirichlet condition) ได้แก่เงื่อนไขที่อยู่ในรูป

$$u = f \quad \text{บน} \quad B$$

เมื่อ B เป็นขอบเขตของโดเมนของปัญหา

2. เงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สอง หรือเงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) ได้แก่เงื่อนไขที่อยู่ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{บน } B$$

เมื่อ $\frac{\partial u}{\partial n}$ เป็นอนุพันธ์ตั้งฉากกับ u

3. เงื่อนไขขอบเขตชนิดที่สาม หรือเงื่อนไขแบบโรบิน (Robin's condition) ได้แก่เงื่อนไขในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = p \quad \text{บน } B$$

ซึ่งเป็นการผสมระหว่างเงื่อนไขชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ปัญหา

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \ , \ 0 \le y \le \pi$$

$$u(x,\pi) = 0 \ , \ u(x,0) = f(x) \ , \ 0 < x < \pi$$

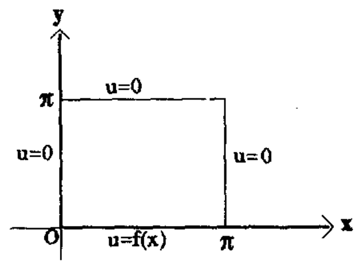
วิธีทำ 1. แยกตัวแปร

ให้ $u(x,y) = X(x)Y(y)$

จะได้ $X''Y + XY'' = 0$

หารตลอดด้วย XY

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\alpha^2$$



2. สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0$$

3. เงื่อนไขที่เป็นเอกพันธ์

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

ถ้า $Y(y) \neq \square$ แล้ว $X(0) \square \square$

$$u(\pi,y) \square X(\pi)Y(y) = \square$$

ถ้า $Y(y) \neq 0$ แล้ว $X(\pi) = 0$

$$u(x,\pi) = X(x)Y(\pi) = 0$$

ถ้า $X(x) \neq 0$ แล้ว $Y(\pi) = 0$

4. ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \ , \ X(0) = X(\pi) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$X \square c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

จาก $X(0) = c_1 + 0 = 0$

$$X(\pi) \square c_2 \sin cm = 0$$

ถ้า $c_2 \neq 0$ แล้ว $\sin \alpha\pi \square 0$

$$\alpha\pi = n\pi$$

$$\alpha^2 = n^2 \ , \ n \in N$$

ถ้า $n = 0$ แล้ว $\alpha = 0$ จะได้ผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย

ฉะนั้น $X_n(x) = \sin nx \qquad n \in N$ .....(7)

5. สมการเชิงอนุพันธ์ของ Y

$$Y'' - n^2 Y = 0 \ , \ Y(\pi) = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$Y = B_1\cosh ny + B_2\sinh ny$$

ใช้เงื่อนไข

$$Y(\pi) = B_1\cosh n\pi + B_2\sinh n\pi = 0$$

$$B_1 = -B_2 \frac{\sinh n\pi}{\cosh n\pi}$$

$$Y_n(y) = \frac{\sinh n(y-\pi)}{\cosh n\pi}, \quad n \in N \qquad \ldots\ldots(7)$$

6. **หลักการรวมผลเฉลย**

จากสมการ (7) และ (8)

$$u_n(x,y) = \frac{\sinh n(y-\pi)}{\cosh n\pi} \sin nx, \quad n \in N$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh n(y-\pi)}{\cosh n\pi} \sin nx$$

7. **เงื่อนไขที่ไม่เป็นเอกพันธ์**

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sinh(-n\pi)}{\cosh n\pi} \sin nx$$

โดยที่

$$A_n\left(-\frac{\sinh n\pi}{\cosh n\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$A_n = -\frac{2\cosh n\pi}{\pi\sinh n\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

8. **ผลเฉลยสุดท้าย**

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{*} \frac{\sinh n(\pi-y)}{\cosh n\pi} \sin nx$$

โดย

$$A^{*} = \frac{2\cosh n\pi}{\pi \sinh n\pi} \int_{0}^{\pi} f(x \ \text{kin } nx \, dx$$

หรือ

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\pi} f(\xi \ \text{kin } n\xi \ \frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \sin nx d\xi$$

แบบฝึกหัดที่ 6.3

1. แผ่นวัสดุนำความร้อนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ด้าน $x = 0$, $x = 1$ และ $y = 2$ ทำให้มีอุณหภูมิศูนย์ ส่วนด้าน $y = 0$ ทำให้มีอุณหภูมิ $f(x)$, $0 \le x \le 1$ จงกำหนดรูปแบบของปัญหาพร้อมทั้งหาอุณหภูมิ

2. จงแก้ปัญหา

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$
$$u(0,y) = u(2,y) = 0 \ , \quad 0 < y < 2$$
$$u(x,0) = 0 \ , \quad u(x,2) = f(x) \ , \quad 0 < x < 2$$

3. จงหาฟังก์ชันฮาร์มอนิก ซึ่งสอดคล้องปัญหาค่าขอบ

$$\nabla^2 u = 0 \ , \quad 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$
$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ , \quad 0 < y < b$$
$$u(x,0) \,\square\, f(x) \ , \quad u(x,b) = g(x) \ , \quad 0 < x < a$$

4. แผ่นวัสดุนำความร้อนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 หน่วย มีอุณหภูมิศูนย์ที่ขอบ ☒ ❑ 🗀 และหุ้มฉนวนที่ขอบ $x = 2$ ส่วนขอบ $y = 0$ มีอุณหภูมิเป็นศูนย์เช่นกัน แต่ขอบ $y = 2$ มีอุณหภูมิ $\sin 3\pi x/4$ จงกำหนดรูปแบบของปัญหา พร้อมทั้งแก้ปัญหาด้วย

5. จงแก้ปัญหาดีริชเลต์

$$\nabla^2 u = 0 \ , \quad 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < 2\pi$$
$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \ , \quad 0 < y < 2\pi$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,2\pi) = 1, \quad 0 < x < \pi$$

6. จงแก้ปัญหานอยมันน์

$$\nabla^2 u = 0 \ , \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi$$
$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ , \quad 0 < y < \pi$$
$$u_y(x,0) = \cos x \ , \quad 0 \le x \le \pi$$
$$u_y(x,\pi) = 0 \ , \quad 0 < x \le \pi$$

7. จงแก้ปัญหานอยมันน์

$$\nabla^2 u = 0 \ , \quad 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi$$
$$u_x(0,y) = 0 \ , \quad 0 \le y \le \pi$$
$$u_x(\pi,y) = 2\cos y \ , \ 0 \le y \le \pi$$
$$u_y(x,0) = 0 \ , \ u_y(x,\pi) = 0 \ , \ 0 \le y \le \pi$$

คำตอบ

1. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 2$

$u(0,y) = u(1,y) = 0 \ , \ 0 < y < 2$

$u(x,2) = 0 \ ; \quad u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 < x < 1$

ผลเฉลยคือ

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh n\pi(2-y)}{\sinh 2n\pi} \sin n\pi x$$

$$B_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x \, dx$$

2. $$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sinh(2n-1)\pi} \sin\frac{n\pi x}{2} \sinh\frac{n\pi y}{2}$$

3. $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a}] \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$A_n = \frac{1}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a [g(x) - e^{-n\pi b/a} f(x)]\sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$B_n = \frac{1}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a [e^{n\pi b/a} f(x) - g(x)]\sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2 \ , \quad 0 < y < 2$

$u(0,y) = u_x(2,y) = 0 \ , \quad 0 < y < 2$

$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,2) = \sin\frac{3\pi x}{4} \ , \quad 0 < x < 2$

ผลเฉลยคือ

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh(3\pi/2)} \sinh\frac{3\pi y}{4} \sin\frac{3\pi x}{4}$$

5. $$u(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh ny \sin nx}{(2n-1)\sinh[2(2n-1)\pi]}$$

6. $$u(x,y) = -\frac{1}{\sinh \pi} \cosh(\pi - y)\cos x$$

7. $$u(x,y) = \frac{2}{\sinh \pi} \cos y \cosh x$$

6.4 ปัญหาที่ไม่เป็นเอกพันธ์

ในหัวข้อ 6.1 - 6.3 เราแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยวิธีแยกตัวแปร แต่ถ้าสมการไม่เป็นเอกพันธ์ หรือเงื่อนไขขอบเขตไม่เป็นเอกพันธ์เราไม่สามารถใช้วิธีแยกตัวแปรได้ ความไม่เป็นเอกพันธ์อาจจะขึ้นกับตัวแปรเวลาหรือไม่ขึ้นกับตัวแปรเวลาก็ได้ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าว 2 วิธี คือ

1. วิธีการแปลงให้เป็นเอกพันธ์ ใช้กับความไม่เป็นเอกพันธ์ที่ไม่ขึ้นกับตัวแปรเวลา โดยเราจะสมมติให้ผลเฉลยเป็น

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$$

2. วิธีการกระจายฟังก์ชันค่าเฉพาะ ซึ่งใช้ได้กับสมการไม่เป็นเอกพันธ์ทั้งที่ขึ้นกับเวลาและไม่ขึ้นกับเวลา

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ปัญหาของสมการความร้อน

$$\begin{aligned} &u_t = a^2u_{xx} \quad , \quad 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ &u(0,t) = A \quad , \quad t \geq 0 \\ &u(L,t) = B \\ &u(x,0) = f(x) \ , \ 0 \leq x \leq L \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(1)$$

วิธีทำ ปัญหานี้มีเงื่อนไขขอบเขตไม่เป็นเอกพันธ์
เราจะใช้วิธีที่ 1 แก้ปัญหา ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. การแปลง

สมมติให้ผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x) \qquad \ldots\ldots(2)$$

โดย $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียวที่ยังไม่ได้กำหนด แทนค่า $u(x,t)$ ในสมการ (1) จะได้

$$v_t = a^2(v_{xx} + \phi_{xx})$$

ถ้าให้ $\phi(x)$ สอดคล้องสมการ $a^2\phi_{xx} = 0$ แล้ว

$$v_t = a^2v_{xx}$$

ในลักษณะเดียวกัน $u(x,t)$ ตามสมการ (2) ใช้กับเงื่อนไขในสมการ (1) จะได้ว่า

$$u(0,t) = v(0,t) + \phi(0) = A$$

$$u(L,t) = v(L,t) + \phi(L) = B$$

$$u(x,0) = v(x,0) + \phi(x) = f(x)$$

ดังนั้นแสดงว่า ถ้า

$$a^2\phi_{xx} = 0$$

$$\phi(0) = A \qquad \ldots(3)$$

$$\phi(L) = B$$

แล้วปัญหาสมการ (1) จะกลายเป็น

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

$$v(0,t) = 0 \qquad \ldots(4)$$

$$v(L,t) = 0$$

$$v(x,0) = f(x) - \phi(x)$$

ซึ่งปัญหาในสมการ (4) เป็นปัญหาแบบเอกพันธ์ที่เราเคยแก้ปัญหามาแล้ว

2. ปัญหาของ $\phi(x)$

จากสมการ (3)

$$\phi_{xx} = 0 \; ; \; \phi(0) = \phi(L) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ มีผลเฉลยเป็น

$$\phi(x) = A + \frac{B - A}{L} x \qquad \ldots..(5)$$

3. ปัญหาของ $v(x, t)$

จากสมการ (4) จะได้

$$v_t = a^2 v_{xx} \quad , \; 0 < x < L \; , \quad t > 0$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \; , \; t \geq 0 \qquad \ldots..(6)$$

$$v(x,0) = f(x) - (A + \frac{B - A}{L} x) \; , \; 0 < x < L$$

การแก้สมการ (6) นี้ เหมือนกับสมการ (10) ในหัวข้อ 6.2 และจากหลักการรวมผลเฉลยตามสมการ (14) จะได้

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}) \; \mathrm{kin} \; \frac{n\pi x}{L} \qquad \ldots..(7)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น

$$v(x,0) = f(x) - (A + \frac{B-A}{L} x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ซึ่งทำให้

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - (A + \frac{B-A}{L} x)]\sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad \ldots(7)$$

4. ผลเฉลยเดิม

แทนค่าสมการ (5) และสมการ (7) ในสมการ (2)

เพราะฉะนั้น

$$u(x,t) = A + \frac{(B-A)}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{L^2}) \, kin \frac{n\pi x}{L}$$

โดย A_n เป็นไปตามสมการ (7)

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาของสมการคลื่น

$$y_{tt} = y_{xx} + \sin \frac{\pi x}{L}, \; 0 < x < L, \; t > 0$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \; t \geq 0 \qquad \ldots..(8)$$

$$y(x,0) = 0, \; y_t(x,0) = 0, \; 0 \leq x \leq L$$

วิธีทำ สำหรับตัวอย่างนี้ สมการไม่เป็นเอกพันธ์

เราจะใช้วิธีที่ 1 แก้ปัญหา

1. การแปลง

สมมติให้ผลเฉลยคือ

$$y(x,t) = v(x,t) + \phi(x) \qquad \ldots(9)$$

แทนค่าในสมการ (8) จะได้

$$v_{tt} = v_{xx} + \phi''(x) + \sin \frac{n r x}{L}$$

ถ้าให้ $\phi''(x) + \sin \frac{\pi x}{L} = 0$ แล้วจะได้สมการเอกพันธ์

$$v_{tt} = v_{xx}$$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $y(x,t)$ ตามสมการ (9) เมื่อใช้กับเงื่อนไขของสมการ (8) จะได้

$$y(0,t) = v(0,t) + \phi(0) = 0$$

$$y(L,t) = v(L,t) + \phi(L) = 0$$

$$y(x,0) = v(x,0) + \phi(x) = 0$$

$$y_t(x,0) = v_t(x,0) = 0$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$\phi''(x) + \sin\frac{\pi x}{L} = 0$$

$$\phi(0) = 0 \qquad .....(10)$$

$$\phi(L) = 0$$

แล้วปัญหาของสมการ (8) จะกลายเป็น

$$v_{tt} = v_{xx}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \qquad .....(11)$$

$$v(x,0) = -\phi(x)$$

$$v_t(x,0) = 0$$

ซึ่งปัญหาในสมการ (11) เป็นแบบเอกพันธ์ที่เราเคยแก้ปัญหามาแล้ว

2 . ปัญหาของ $\phi(x)$

จากสมการ (10)

$$\phi''(x) + \sin\frac{\pi x}{L} = 0 \; ; \; \phi(0) = \phi(L) = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\phi(x) = \frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2$$

ถ้า $\phi(0) = 0$ แล้ว $C_2 = 0$

ถ้า $\phi(L) = 0$ แล้ว $C_1 = 0$

ดังนั้น $\phi(x) = \dfrac{L^2}{\pi^2}\sin\dfrac{\pi x}{L}$ .....(12)

3. ปัญหาของ $v(x,t)$

จากสมการ (11)

$$v_{tt} = v_{xx}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \qquad \text{.....(13)}$$

$$v_t(x,0) = 0$$

$$v(x,0) = -\phi(x) = -\frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

การแก้สมการ (13) นี้ เหมือนกับสมการ (9) ในหัวข้อ 6.1

โดย $a^2 = 1$ และ $f(x) = -\frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$ จะได้ผลเฉลย

(ตามสมการ (16))

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $v(x,0) = -\frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$

โดยที่ $C_n = 0$ ถ้า $n \neq 1$

และ $C_1 = -\frac{L^2}{\pi^2}$

เพราะฉะนั้น $v(x,t) = -\frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi t}{L}$ .....(14)

4. ผลเฉลยเดิม

แทนค่าสมการ (12) และสมการ (1 4) ในสมการ (9) จะพบว่า

$$y(x,t) = -\frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{n\text{-}t}{L} + \frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

หรือ

$$y(x,t) = \frac{L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{L}\right)$$

ข้อสังเกต

สำหรับปัญหาที่ไม่เอกพันธ์ทั้งสองสมการและเงื่อนไขขอบเขตเราสามารถใช้วิธีข้างต้นได้เช่นกัน เช่น

$$y_{tt} = a^2 u_{xx} + Q(x)$$
$$y(x,0) = f(x)$$
$$y_t(x,0) = g(x)$$
$$y(0,t) = A$$
$$y(L,t) = B$$

โดยการสมมติผลเฉลยให้

$$y(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$$

แทนค่าในสมการจะได้

$$v_{tt} = a^2(v_{xx} + \phi''(x)) + Q(x)$$
$$y(x,0) = v(x,0) + \phi(x) = f(x)$$
$$y_t(x,0) = v_t(x,0) = g(x)$$
$$y(0,t) = v(0,t) + \phi(0) = A$$
$$y(L,t) = v(L,t) + \phi(L) = B$$

ดังนั้นถ้าให้

$$a^2\phi''(x) + Q(x) = 0$$
$$\phi(0) = A$$
$$\phi(L) = B$$

แล้ว $v(x,t)$ จะสอดคล้องกับสมการ

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$
$$v(x,0) = f(x) - \phi(x)$$
$$v_t(x,0) = g(x)$$
$$v(0,t) = 0$$
$$v(L,t) = 0$$

ซึ่งเราแก้ปัญหาได้

ต่อไปนี้จะพิจารณาการแก้สมการที่ไม่เป็นเอกพันธ์ และความไม่เป็นเอกพันธ์เกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา t ในรูปแบบ

$$u_t = a^2 u_{xx} + Q(x,t) \quad ; \quad 0 < x < L , t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 , \quad t > 0 \qquad .....(15)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < L$$

ซึ่งการแก้ปัญหานี้จะใช้วิธีที่ 2 ซึ่งมีวิธีการดังนี้

พิจารณาปัญหาเดียวกัน แต่เป็นแบบเอกพันธ์คือ

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปคือ (หัวข้อ 6.2 ตัวอย่างที่ 1)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} An \ \exp(- \frac{n^2\pi^2a^2t}{L} \ kin \frac{n\pi x}{L}$$

เมื่อ A_n เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

$$(\frac{n\pi}{L})^2 = \lambda_n \quad ; \quad n = 1,2,... \quad \text{คือค่าเฉพาะ}$$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \phi_n(x) \quad ; \quad n = 1,2,... \quad \text{คือฟังก์ชันค่าเฉพาะ}$$

มาจากปัญหาของสตูรัม-ลีอูวิลล์

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = \quad ; \ \phi(0) = \phi(L) = 0$$

ในการแก้ปัญหาสมการแบบไม่เอกพันธ์โดยวิธีกระจายฟังก์ชันค่าเฉพาะนี้คล้ายกับวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ในสมการเชิงอนุพันธ์ นั่นคือสมมติ

ผลเฉลยของ (15) อยู่ในรูป

$$u(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty} A_n(t)\exp(-\lambda_n a^2 t)\sin \frac{n\pi x}{L} \qquad .....(16)$$

โดยที่ $A_n(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t ที่ต้องการหา เพื่อความสะดวก เรารวมพจน์ $A_n(t)$ และ $\exp(-\lambda_n a^2 t)$ เข้าด้วยกันได้ ดังนั้น จากสมการ (16) จะกลายเป็น

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

กรณีทั่วไปคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) \qquad \text{.....(17)}$$

ถ้าให้ผลเฉลย (17) สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x)$ จะได้

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\phi_n(x)$$

จากสมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันค่าเฉพาะ จะพบว่า

$$a_n(0) = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)dx}{\int_0^L \phi_n^2(x)dx} \qquad \text{.....(18)}$$

แทนค่าสมการ (17) ในสมการ (15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'(t)\phi_n(x) \;\square\; a^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi''(x) + Q(x,t)$$

แต่ $\phi_n(x)$ สอดคล้องสมการ $\phi_n''(x) + \lambda_n\phi_n(x) = 0$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,\frac{da_n}{dt}(t) + \lambda_n a^2 a_n(t)]\phi_n(x) = Q(x,t) \qquad \text{.....(19)}$$

จากสมบัติเชิงตั้งฉากของ $\phi_n(x)$ จะได้

$$\frac{da_n}{dt}(t) + \lambda_n a^2 a_n(t) = \frac{\int_0^L Q(x,t)\phi_n(x\ kix}{\int_0^L \phi_n^2(x)dx} = q_n(t) \qquad \text{.....(20)}$$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการ (20) ได้ง่าย ๆ โดยใช้ตัวประกอบอินทิเกรต $\exp(\lambda_n a^2 t)$ ดังนั้น

$$\exp(\lambda_n a^2 t)\left(\frac{da_n}{dt}(t) + \lambda_n a^2 a_n(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(a_n e^{\lambda_n a^2 t}\right) = q_n e^{\lambda_n a^2 t}$$

อินทิเกรตจาก $t = 0$

$$a_n(t)e^{\lambda_n a^2 t} - a_n(0) = \int_0^t q_n(\tau)e^{\lambda_n a^2 \tau}\, d\tau$$

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n a^2 t} + e^{-\lambda_n a^2 t}\int_0^t q_n(\tau)e^{\lambda_n a^2 \tau}\, d\tau \qquad \ldots\ldots(21)$$

โดยที่ $a_n(0)$ เป็นไปตามสมการ (18)

ผลเฉลยของปัญหาในสมการ (15) คือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$$

โดย $\phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$, $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $a_n(t)$ เป็นไปตามสมการ (*21*)

<u>**ตัวอย่างที่ *3***</u> จงแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin 3x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

<u>**วิธีทำ**</u> ในที่นี้ฟังก์ชันค่าเฉพาะ ($L = \pi$)

$$\phi_n(x) = \sin nx$$

ให้ผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin nx$$

โดยการแทนค่าจะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{da_n}{dt} + n^2 a_n\right)\sin nx = e^{-t}\sin 3x$$

ทำให้

$$\frac{da_n}{dt} + n^2 a_n = \begin{cases} 0 & , n \neq 3 \\ e^{-t} & , n = 3 \end{cases}$$

ฉะนั้น

$$a_n(t) = \begin{cases} a_n(0)e^{-n^2 t} & , n \neq 3 \\ 8e^{-t} + [a_3(0) - 81e^{-9t} & , n = 3 \end{cases}$$

โดยที่ $a_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาปัญหาสมการคลื่น

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} + Q(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0 \\ y(0,t) &= 0 & , t > 0 \qquad .....(22) \\ y(L,t) &= 0 & \\ y(x,0) &= f(x) & \\ y_t(x,0) &= g(x) & , 0 < x < L \end{aligned}$$

วิธีทำ สำหรับปัญหานี้ฟังก์ชันเฉพาะคือ $\sin \frac{n\pi x}{L}$

สมมติผลเฉลยคือ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin \frac{n\pi x}{L} \qquad .....(23)$$

แทนในสมการโจทย์ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{//}(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = a^2\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{n^2\pi^2}{L^2}a_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

เนื่องจาก $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ดังนั้น

$$\sum_{n-1}^{\infty}\left[a_n^{//}(t) + \lambda_n a^2 a_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = Q(x,t)$$

จากสมบัติเชิงตั้งฉาก

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \lambda_n a^2 a_n(t) = \frac{\int_0^L Q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx}{\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= q_n(t)$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสอง มีผลเฉลยคือ

$$a_n(t) = A_n\cos\lambda_n t + B_n\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t q_n(\tau)\sin[\lambda_n(t-\tau)]d\tau \qquad ......(24)$$

ผลเฉลยตามสมการ (23) คือ

$$y(x,t) = \sum_{n-1}^{\infty}\{A_n\cos\lambda_n t + B_n\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t q_n(\tau)\sin[\lambda_n(t-\tau]d\tau\}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

.....(25)

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x,0) = f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

ดังนั้น $$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad .....(26)$$

และจากเงื่อนไขเริ่มต้น $y_t(x,0) = g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ดังนั้น

$$B_n = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad .....(27)$$

นั่นคือ ผลเฉลยที่ต้องการคือสมการ (25) โดยที่ ส.ป.ส. A_n และ B_n เป็นไปตามสมการ (26) และ (27) ตามลำดับ

ข้อสังเกต

สำหรับกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเป็นแบบไม่เอกพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา t เรามีวิธีการแปลงให้เป็นเงื่อนไขแบบเอกพันธ์ก่อนที่จะใช้วิธีที่ 2 แก้ปัญหา ดังนี้

$$u_t = a^2u_{xx} + Q(x,t)$$
$$u(0,t) = A(t)$$
$$u(L,t) = B(t)$$
$$u(x,0) = f(x)$$

โดยการแปลงให้

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x,t)$$

แทนในสมการ จะได้

$$v_t = a^2v_{xx} + [Q(x,t) - \phi_t + a^2\phi_{xx}] = a^2v_{xx} + \bar{Q}(x,t) + a^2\phi_{xx}$$

โดย

$$u(0,t) = v(0,t) + \phi(0,t) = A(t)$$
$$u(L,t) = v(L,t) + \phi(L,t) = B(t)$$
$$u(x,0) = v(x,0) + \phi(x,0) = f(x)$$

ถ้าให้

$$a^2\phi_{xx} = 0$$
$$\phi(0,t) = A(t) \qquad \ldots\ldots(28)$$
$$\phi(L,t) = B(t)$$

จะได้ปัญหาที่มีเงื่อนไขเป็นแบบเอกพันธ์ คือ

$$v_t = a^2 v_{xx} + \bar{Q}(x,t)$$
$$v(0,t) = 0$$
$$v(L,t) = 0$$
$$v(x,0) = f(x) - \phi(x,0)$$

โดยที่ $\phi(x,0)$ หาได้จากการแก้สมการ (28) ซึ่งจะได้

$$\phi(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}[B(t) - A(t)]$$

แบบฝึกหัดที่ 6.4

1. จงแก้ปัญหาของสมการความร้อน

$$u_t = 4u_{xx} \; ; \; 0 < x < 4 , t > 0$$
$$u(0,t) = 10, \; u(4,t) = 50 \; ; \; t \geq 0$$
$$u(x,0) = 30 \; ; \; 0 < x < 4$$

2. จงแก้ปัญหาของ

$$u_t = u_{xx} + k \sin x \; ; \; 0 < x < \pi , \; t > 0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \; ; \; t \geq 0$$
$$u(x,0) = \sin x \; ; \; 0 \leq x \leq \pi$$

3. จงแก้ปัญหาสมการคลื่นต่อไปนี้

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} + A\sinh x \; ; \; 0 < x < L , t > 0$$
$$y(0,t) = h \; ; \; t > 0$$
$$y(L,t) = k$$
$$y(x,0) = 0 \; ; \; 0 < x < L$$
$$y_t(x,0) = 0$$

เมื่อ h,k และ A เป็นค่าคงตัว

4. จงแก้ปัญหาสมการความร้อน

$$u_t = a^2 u_{xx} + h \; ; \; 0 < x < 1 , \; t > 0$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(1,t) = 2 \quad , \; t > 0$$
$$u(x,0) = (1 - \cos \pi x) \quad , \; 0 < x < 1$$

5. จงแก้ปัญหาของ

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} + e^{-t} \; ; \; 0 < x < L , \; t > 0$$
$$y(0,t) = 0 \; ; \; t > 0$$
$$y(L,t) = 0$$
$$y(x,0) = f(x) \; ; \; 0 < x < L$$
$$y_t(x,0) = 0$$

คำตอบ

1. $u(x,t) = 10(x+1) + \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} \exp C- \frac{n^2\pi^2 t}{4}\ 1\sin \frac{n\pi x}{4}$

2. $u(x,t) = k \sin x + (1-k)e^{-t}\sin x$

3. $y(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$ โดย

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{2}{L}\int_0^L \phi(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{L}\,d\tau \;kos\; \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

และ

$$\phi(z) = -\frac{A}{a^2}\sinh x + (\frac{A}{a^2}\sinh L + k - h)\frac{x}{L} + h$$

4. $u(x,t) = -\frac{hx^2}{2k} + (2+\frac{h}{2k})x - \frac{4h}{k\pi}e^{-a^2\pi^2 t} \sin \pi x$

$$+ \sum_{n-2}^{\infty} a_n e^{-a^2 n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

โดยที่

$$a_n = \frac{2}{n\pi}[1 + (-1)^n)] + \frac{2n}{(n^2-1)\pi} C1 - (-1)^n] + \frac{2h}{a^2\pi^3 n^3}[(-1)^n - 17$$

5. $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[b_n\cos\frac{n\pi at}{L} + \frac{2L^2 C1 + (-1)^{n+1}\ 1}{n^2\pi^2 a(L^2 + n^2\pi^2 a^2)}$

$$(n\pi ae^{-t} + L \sin \frac{n\pi at}{L})]\sin \frac{n\pi x}{L}$$

โดยที่ b_n สอดคล้องสมการ

$$b_n + \frac{2L^2[1 + (-1)^{n+1} 1}{n\pi(L^2 + n^2\pi^2 a^2)} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

เวลาพัก

$$
\begin{array}{r}
SEND \\
+\ \underline{MORE} \\
MONEY
\end{array}
$$

จากผลบวกข้างต้น จงหาค่าตัวอักษรว่าแทนตัวเลขอะไร โดยที่เลข 5 เป็นเลขที่ถูกนำมาใช้มากที่สุด