บทที่ 5
ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ และอนุกรมฟูริเยร์

ในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ วิธีการแยกตัวแปรเป็นวิธีแบบฉบับที่สุดซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ และอนุกรมฟูริเยร์ ดังนั้นในบทนี้จึงต้องแนะนำให้รู้จักก่อนที่จะแก้ปัญหาดังกล่าว

5.1 <u>ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์</u>

การแก้สมการด้วยวิธีแยกตัวแปรในบทที่แล้ว หัวข้อ 4.3 เราได้สมการ (7) และ (8) ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$c_0(x)y'' + c_1(x)y' + [c_2(x) + \lambda]y = 0 \qquad .....(1)$$

หารตลอดด้วย $c_0(x)$ แล้วคูณตลอดด้วย $p(x) = \exp[\int (c_1(x)/c_0(x))dx]$

จะได้ $$p(x)y'' + p(x)\frac{c_1(x)}{c_0(x)}\, y' + [p(x)\frac{c_2(x)}{c_0(x)} + \lambda\frac{p(x)}{c_0(x)}]y = 0$$

หรือ $$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad .....(2)$$

โดยที่ $q(x) = p(x)\dfrac{c_2(x)}{c_0(x)}$ และ $r(x) = \dfrac{p(x)}{c_0(x)}$

ซึ่งเรียกสมการ (2) นี้ว่า <u>สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์</u>

ถ้า $p(x)$ และ $r(x)$ เป็นบวกในช่วง $[a,b]$ แล้วเรียกสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ว่าเป็นแบบปกติในช่วง $[a,b]$

การแก้สมการ (2) เมื่อ $a \le x \le b$ พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตในรูป

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0$$
$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \qquad .....(3)$$

โดยค่าคงตัว a_1 และ a_2 กับ b_1 และ b_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันเรียกว่า<u>ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์</u>

จะสังเกตพบว่า $y = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) เราเรียกผลเฉลย $y = 0$ นี้ว่า ผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อยและเรียกผลเฉลยที่ $\neq 0$ ว่าผลเฉลยที่มีคุณค่า

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาปัญหาขอบเขตต่อไปนี้

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad .....(4)$$

$$y(0) = 0 \;,\; y(1) = 0$$

จะพบว่าเป็นปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เนื่องจาก

$$y'' + y = (1.y')' + [0 + \lambda.1]y = 0$$

ในที่นี้ $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ และเงื่อนไขขอบเขตมี $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $x \in [0,1]$ การหาผลเฉลยของปัญหาจะขึ้นกับตัวแปรเสริม λ เช่น

- ถ้า $\lambda = 1$ จะพบว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้น $y = c_2 \sin x$

และจากเงื่อนไข $y(1) = 0$ จะได้ $0 = c_2\sin 1$

แต่ $\sin 1 \neq 0$ แสดงว่า $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของปัญหาเมื่อ $\lambda = 1$ คือ

$$y = 0$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย

- ถ้า $\lambda = \pi^2$ จะพบว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1\cos \pi x + c_2\sin \pi x$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้น $y = c_2 \sin \pi x$

และจากเงื่อนไข $y(1) = 0$ จะได้ $0 = c_2\sin \pi$

แต่ $\sin \pi = 0$ แสดงว่า c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ก็ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเมื่อ $\lambda = \pi^2$ คือ

$$y = c_2 \sin \pi x$$

เราเรียกค่าตัวแปรเสริม λ ซึ่งทำให้ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ มีผลเฉลยที่

มีคุณค่าว่าค่าเฉพาะ และเรียกฟังก์ชันซึ่งเป็นผลเฉลยว่าฟังก์ชันเฉพาะ

ดังนั้นจากตัวอย่างข้างต้น $\lambda = \pi^2$ เป็นค่าเฉพาะค่าหนึ่งของปัญหา และ $y = \sin \pi x$ เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda = \pi^2$ ซึ่งอาจจะมีค่าเฉพาะอื่นๆ อีกก็ได้

ข้อสังเกต การพิจารณาค่าตัวแปรเสริม λ ต้องพิจารณาทุกกรณีที่จะเป็นไปได้ คือ $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \ , \ 1 \le x \le e$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$y(1) = 0, \ y(e) = 0$$

หารตลอดด้วย x^2 แล้วคูณตลอดด้วย $\exp[\int (x/x^2)dx] = x$

จะได้ $$x(y'' + \frac{y'}{x} + \frac{\lambda}{x^2} y) = 0$$

หรือ $$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

หรือ $$(xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

ซึ่งเป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

โดยวิธีการแก้สมการโคชี-ออยเลอร์ จะได้ ผลเฉลยคือ

$$y = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\ \ln x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\ \ln x)$$

จากเงื่อนไข $y(1) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

$$y = c_2\sin(\sqrt{\lambda}\ \ln x)$$

และจากเงื่อนไข $y(e) = 0$ จะได้

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 \ , \ c_2 \neq 0$$

ซึ่งจะได้ค่าเฉพาะ

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \ ; \ n = 1,2,3,\ldots$$

และฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะคือ

$$\sin(n\pi \ln x) \ ; \ n = 1,2,3,\ldots$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าเฉพาะทั้งหมดและฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกันของปัญหาสตูร์ม-ลิอูวิลล์

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = y(1) = 0$$

วิธีทำ พิจารณา λ แต่ละกรณี คือ $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ และ $\lambda > 0$

กรณีที่ 1 ให้ $\lambda = -\alpha^2$ ดังนั้นสมการจะกลายเป็น

$$y'' - \alpha^2 y = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

$$y' = \alpha c_1 e^{\alpha x} - \alpha c_2 e^{-\alpha x}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้

$$y'(0) = \alpha c_1 - \alpha c_2 = 0$$

.....(5)

$$y(1) = c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} = 0$$

จากสมการ (5) จะพบว่า $c_1 = c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $y = 0$ เป็นผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย

กรณีที่ 2 ให้ $\lambda = 0$ ดังนั้น

$$y'' = 0$$

$$y = c_1 x + c_2$$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะพบว่า $c_1 = c_2 = 0$ ทำให้ $y = 0$ เช่นกัน

กรณีที่ 3 ให้ $\lambda = \alpha^2$ ดังนั้น $y'' + \alpha^2 y = 0$

และจะได้ $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$

$$y' = -\alpha c_1 \sin \alpha x + \alpha c_2 \cos \alpha x$$

จากเงื่อนไขขอบเขต

$$y'(0) = \alpha c_2 = 0$$

เนื่องจาก $\alpha \neq 0$

$$c_2 = 0$$

และ $y(1) = c_1 \cos\alpha = 0$

ถ้า $c_1 \neq 0$ แล้ว $\cos\alpha = 0$

$$\alpha = (2n-1)\pi/2 \quad , n \in N$$

และเซตของฟังก์ชันเฉพาะคือ (ให้ $c_1 = 1$)

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \quad , n \in N$$

สำหรับปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ นอกจากเงื่อนไขขอบเขตที่จุดปลายตามสมการ (3) แล้ว ยังมีเงื่อนไขอีกลักษณะหนึ่ง คือ

$$y(a) = y(b) \qquad \text{.....(6)}$$
$$y'(a) = y'(b)$$

ซึ่งเป็นเงื่อนไขแบบคาบ โดยที่ กำหนดให้ $p(a) = p(b)$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าเฉพาะ และฟังก์ชันเฉพาะของปัญหาต่อไปนี้

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(-L) = y(L)$$
$$y'(-L) = y'(L)$$

วิธีทำ

กรณีที่ 1 ให้ $\lambda = -\alpha^2$ eraเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

$$y' = \alpha c_1 e^{\alpha x} - \alpha c_2 e^{-\alpha x}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $y(-L) = y(L)$

$$c_1 e^{-\alpha L} + c_2 e^{\alpha L} = c_2 e^{\alpha L} + c_2 e^{-\alpha L}$$

$$(e^{-\alpha L} - e^{\alpha L})c_1 + (e^{\alpha L} - e^{-\alpha L})c_2 = 0$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $y'(-L) = y'(L)$

$$\alpha c_1 e^{-\alpha L} - \alpha c_2 e^{\alpha L} = \alpha c_1 e^{\alpha L} - a\, c_2 e^{-\alpha L}$$

$$(e^{-\alpha L} - e^{\alpha L})c_1 + (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L})c_2 = 0$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) & (e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) \\ (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) & (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

เนื่องจาก $\begin{vmatrix} (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) & (e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) \\ (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) & (e^{-\alpha L} - e^{\alpha L}) \end{vmatrix} \neq 0$ ทำให้ $c_1 = c_2 = 0$

นั่นคือ $y = 0$ เป็นผลเฉลยที่มีความสำคัญน้อย

กรณีที่ 2 ให้ $\lambda = 0$ ผล เฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 x + c_2$$
$$y' = c_1$$

จากเงื่อนไข $y(-L) = y(L)$

$$-c_1 L + c_2 = c_1 L + c_2$$
$$c_1 = 0$$
$$y = c_2$$

จากเงื่อนไข $y'(-L) = y'(L)$

ไม่มีข้อจำกัดใดเกี่ยวกับ c_2 ฉะนั้น (ให้ $c_2 = 1$)

$y = 1$ เป็นฟังก์ชันเฉพาะ ที่สมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda = 0$

กรณีที่ 3 ให้ $\lambda = \alpha^2$ ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$
$$y' = -\alpha c_1 \sin \alpha x + \alpha c_2 \cos \alpha x$$

จากเงื่อนไข $y(-L) = y(L)$

$$c_1 \cos \alpha L - c_2 \sin \alpha L = c_1 \cos \alpha L + c_2 \sin \alpha L$$
$$c_2 \sin \alpha L = 0$$

จากเงื่อนไข $y'(-L) = y'(L)$

$$\alpha c_1 \sin \alpha L + \alpha c_2 \cos \alpha L = -\alpha c_1 \sin \alpha L + \alpha c_2 \cos \alpha L$$

$$c_1 \sin \alpha L = 0$$

เพื่อที่จะได้ผลเฉลยที่มีคุณค่า $c_1 \neq 0$ และ $c_2 \neq 0$

$$\sin \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n\pi$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda = \alpha_n^2 = \frac{n\pi^2}{L^2} \quad , \; n \, \varepsilon \, N$$

ซึ่งจะได้ฟังก์ชันเฉพาะ $\cos nx$ และ $\sin nx$ ที่สมนัยกับค่าเฉพาะเดียวกัน คือ $\frac{n\pi^2}{L^2}$

เพราะฉะนั้นเซตของค่าเฉพาะคือ $\{0, n^2\pi^2/L^2\}$ และเซตฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกันคือ $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ $n \, \varepsilon \, N$

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ให้ $p(x)$, $q(x)$ และ $r(x)$ ในปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ตามสมการ (2) และ (3) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ ถ้า $y_n(x)$ และ $y_m(x)$ เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ_n กับ λ_m ตามลำดับ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ได้แล้ว y_n และ y_m เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกัน เทียบกับฟังก์ชันน้ำหนัก $r(x)$ ในช่วง $[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก y_n และ y_m สมนัยกับ λ_n และ λ_m ดังนั้น

$$[py_n']' + cq + \lambda_n r]y_n = 0 \qquad .....(7)$$

$$[py_m']' + [q + \lambda_m r]y_m = 0 \qquad .....(8)$$

คูณสมการ (7) ด้วย y_m และคูณสมการ (8) ด้วย y_n แล้วลบกัน จะได้

$$[py_m']'y_n - [py_n']'y_m + (\lambda_m - \lambda_n)ry_n y_m = 0$$

หรือ $y_n \frac{d}{dx}(py'_m) - y_m \frac{d}{dx}(py'_n) = (\lambda_n - \lambda_m)ry_n y_m$

หรือ $\frac{d}{dx}\{p[y'_m y_n - y'_n y_m]\} = (\lambda_n - \lambda_m)ry_n y_m$

อินทิเกรตในช่วง [a,b]

$$[p(y'_m y_n - y'_n y_m)]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b ry_n y_m dx \qquad \ldots(9)$$

แต่ y_n และ y_m สอดคล้องเงื่อนไขตามสมการ (3) ดังนั้น

$$a_1y_n(a) + a_2y'_n(a) = 0 \qquad \ldots(10)$$

$$a_1y_m(a) + a_2y'_m(a) = 0$$

และ $b_1y_n(b) + b_2y'_n(b) = 0 \qquad \ldots(n)$

$$b_1y_m(b) + b_2y'_m(b) = 0$$

เงื่อนไข (10) จะมีผลเฉลยเมื่อ

$$\begin{vmatrix} y_n(a) & y'_n(a) \\ y_m(a) & y'_m(a) \end{vmatrix} = y'_m(a)y_n(a) - y'_n(a)y_m(a) = 0$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับเงื่อนไข (11)

$$\begin{vmatrix} y_n(b) & y'_n(b) \\ y_m(b) & y'_m(b) \end{vmatrix} = y'_m(b)y_n(b) - y'_n(b)y_m(b) = 0$$

ดังนั้นจากสมการ (9) จะได้

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b r y_n y_m dx = 0 \qquad \ldots\ldots(12)$$

แต่ $\lambda_n \neq \lambda_m$ นั่นคือ

$$\int_a^b r y_n y_m dx = 0 \quad \text{ถ้า } n \neq m$$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $y_n(x)$ และ $y_m(x)$ เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ λ_n และ λ_m ของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ตามสมการ (2) และเงื่อนไขที่เป็นคาบตามสมการ (6) แล้ว y_n และ y_m เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกันเทียบกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $r(x)$ ใน $[a,b]$

พิสูจน์ เนื่องจากผลเฉลย y_n และ y_m สอดคล้องสมการ (6) ดังนั้น

$$y_n(a) = y_n(b) \text{ และ } y_n'(a) = y_m'(b)$$

$$y_m(a) = y_m(b) \text{ และ } y_m'(a) = y_m'(b)$$

แทนในสมการ (9) แล้วจะได้

$$[p(b) - p(a)][y_m'(a)y_n(a) - y_n'(a)y_m(a)] = (\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b r y_n y_m dx$$

แต่ $p(b) = p(a)$ ทำให้

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b r y_n y_m dx = 0$$

และสำหรับค่าเฉพาะ $\lambda_n \neq \lambda_m$ ดังนั้น

$$\int_a^b r y_n y_m dx = 0 \;, \; m \neq n$$

ทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ที่ $p(x), r(x) > 0$ ใน $[a,b]$ จะมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง ถ้า $p(x), q(x), r(x)$ เป็นฟังก์ชันจริง

พิสูจน์ สมมติว่ามีค่าเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\lambda_n = \gamma + i\delta$$

โดย γ และ δ เป็นจำนวนจริง สมมติให้ฟังก์ชันเฉพาะ

$$y_n = u + iv$$

โดย u และ v เป็นฟังก์ชันจริง

เนื่องจาก $p(x), q(x), r(x)$ เป็นฟังก์ชันจริง ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนสังยุคก็จะเป็นค่าเฉพาะด้วย และจะมีฟังก์ชันเฉพาะ

$$y_m = u - iv$$

ที่สมนัยกับ $\lambda_m = \gamma - i\delta$

จากสมการ (12) จะได้

$$2i\delta \int_a^b r(u^2 + v^2)dx = 0$$

แต่ $r > 0$ ดังนั้น $\delta = 0$

นั่นคือ ค่าเฉพาะเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าเฉพาะ และฟังก์ชันเฉพาะของปัญหาต่อไปนี้

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0\ ,\ y'(1) + y(1) = 0$$

วิธีทำ

กรณีที่ 1 ให้ $\lambda = -\alpha^2$ จะได้

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

หรือ $y = c_1 \sinh \alpha x + c_2 \cosh \alpha x$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

$$y = c_1 \sinh \alpha x$$

$$y' = \alpha c_1 \cosh \alpha x$$

จากเงื่อนไข $y'(1) + y(1) = 0$ จะได้

$$\alpha c_1 \cosh \alpha + c_1 \sinh \alpha = 0$$

ถ้า $c_1 \neq 0$ (มิฉะนั้น $y = 0$)

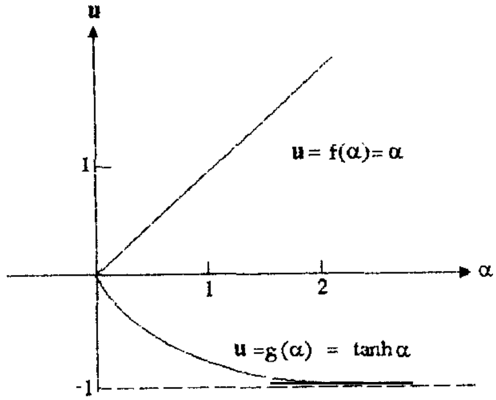
$$\alpha \cosh \alpha + \sinh \alpha = 0$$

ถ้า $\cosh \alpha = 0$ แล้ว $\sinh \alpha = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\sinh \alpha \neq 0$

ดังนั้น $\cosh \alpha \neq 0$ ทำให้ได้

$$\alpha = -\tanh \alpha \qquad .....(13)$$

ซึ่งเราจะหาค่า α ได้โดยใช้วิธีเชิงตัวเลข หรืออาจหาค่าโดยประมาณได้โดยการเขียนกราฟของ $f(\alpha) = \alpha$ และ $g(\alpha) = -\tanh \alpha$ สำหรับ $\alpha > 0$ ดูรูป



รูปที่ 1

ซึ่งกราฟตัดกันที่จุดกำเนิดเท่านั้น แสดงว่าไม่มีค่า α ที่ > 0 ที่สอดคล้องสมการ (13) นั่นคือกรณีนี้ไม่ให้ค่าเฉพาะ

กรณีที่ 2 λ □ □ จะได้

$$y = c_1 x + c_2$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $c_2 = 0$

จากเงื่อนไข $y'(1) + y(1) = 0$ จะได้ $2c_1 + c_2 = 0$

นั่นคือ c1 □ ℗ ▪ 0 ทำให้ได้ผลเฉลย $y = 0$

กรณีที่ 3 ให้ $\lambda = \alpha^2$ จะได้

$$y = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x$$

จาก เงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

$$y = c_2\sin ax$$

$$y' = \alpha c_2\cos\alpha x$$

31"เงื่อนไข $y'(1) + y(1) = 0$ จะได้

$$\alpha c_2\cos\alpha + c_2\sin\alpha = 0$$

เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีคุณค่า $(y \neq 0)$ $c_2 \neq 0$

ดังนั้น $\sin\alpha + \alpha\cos\alpha = 0$

และถ้า $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\sin\alpha \neq 0$ $(\alpha > 0)$

นั่นคือ $\cos\alpha \neq 0$ ทำให้

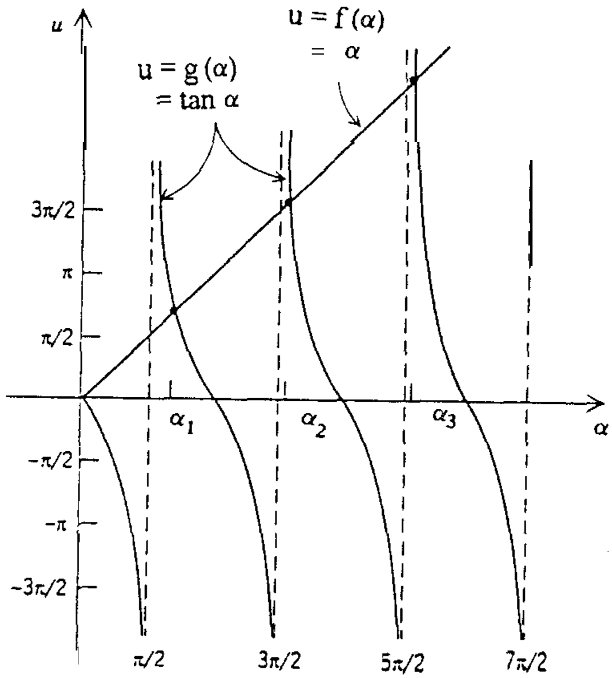
$$\alpha = -\tan\alpha \qquad .....(14)$$

ซึ่งเช่นเดียวกับสมการ (13)

เราจะหาค่า α ได้โดยประมาณจากกราฟ

$$f(\alpha) = \alpha \text{ และ } g(\alpha) = -\tan\alpha\ ,\ \alpha > 0$$

ดูรูป



รูปที่ 2

เนื่องจาก $\alpha > 0$ ดังนั้น $\lambda = 0$ ไม่ใช่ค่าเฉพาะ

จากรูป $\alpha_1 \sim 2.029$, $\lambda_1 = \alpha_1^2 \sim 4.116$

และ $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$
ดังนั้นมีค่าเฉพาะที่สอดคล้องสมการ (14) และฟังก์ชันเฉพาะที่สมนัยกันคือ

$$\sin \alpha_n x \ ; \ n \in N$$

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1. จงหาค่าเฉพาะและฟังก์ชันเฉพาะ สำหรับปัญหาต่อไปนี้

   1.1 $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(1) = 0$

   1.2 $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y'(2) = 0$

   1.3 $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = y'(\pi/2) = 0$

   1.4 $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$

2. สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบเป็นคาบ จงหาค่าเฉพาะและฟังก์ชันเฉพาะ

   2.1 $y'' + \lambda y = 0$; $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$

   2.2 $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$

   2.3 $y'' + \lambda y = 0$; $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$

3. สำหรับสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$

   จงแสดงว่า

   3.1 ถ้าเงื่อนไขขอบเขตคือ $y(0) = y(L) = 0$ แล้วค่าเฉพาะคือ $(\frac{n\pi}{L})^2$

   และฟังก์ชันเฉพาะคือ $\sin \frac{n\pi x}{L}$; $n \in N$

   3.2 ถ้าเงื่อนไขคือ $y'(0) = y'(L) = 0$ แล้วค่าเฉพาะคือ $(\frac{n\pi}{L})^2$

   และฟังก์ชันเฉพาะคือ $\cos \frac{n\pi x}{L}$; $n \in N_0$

<u>**หมายเหตุ**</u> จากตัวอย่างที่ 4 ทำให้ทราบว่า ถ้าเงื่อนไขคือ $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$ แล้วค่าเฉพาะคือ $(\frac{n\pi}{L})^2$ และฟังก์ชันเฉพาะคือ

$\sin \frac{n\pi x}{L}$ และ $\cos \frac{n\pi x}{L}$; $n \in N_0$

คำตอบ

1. 1.1 $\lambda_n = n^2\pi^2$, $y_n(x) = \sin n\pi x$, $n \in N$

   1.2 $\lambda_n = ((2n-1)\pi/4)^2$, $y_n(x) = \sin (2n-1)\pi x/4$, $n \in N$

   1.3 $\lambda_n = 4n^2$, $y_n(x) = \cos 2nx$, $n \in N$

   1.4 λ_n เป็นรากที่เป็นบวกของสมการ $\sqrt{\lambda_n} + \tan \sqrt{\lambda_n} = 0$,
   $y_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}\, x$

2. 2.1 $\lambda_n = n^2$, $\{y_n(x)\} = \{1, \cos nx, \sin nx\}$, $n \in N$

   2.2 $\lambda_n = 4n^2\pi^2$, $\{y_n(x)\} = \{1, \cos 2n\pi x, \sin 2n\pi x\}$, $n \in N$

   2.3 $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\{y_n(x)\} = \{1, \cos n\pi x, \sin n\pi x\}$, $n \in N$

5.2 อนุกรมฟูริเยร์

เราทราบมาแล้วว่ามีฟังก์ชัน f(x) ที่สามารถกระจายในรูปอนุกรมกำลังได้ นั่นคือ

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

พิจารณาอนุกรมที่ประกอบด้วยฟังก์ชันโคซายน์และซายน์ ในรูป

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \qquad \dots\dots(1)$$

ถ้าที่จุด x อนุกรม (1) ลู่เข้า และนิยามให้ค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด x เป็นผลบวกของอนุกรมแล้ว อนุกรม (1) เรียกว่าอนุกรมฟูริเยร์ของ f นั่นคือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \qquad \dots\dots(2)$$

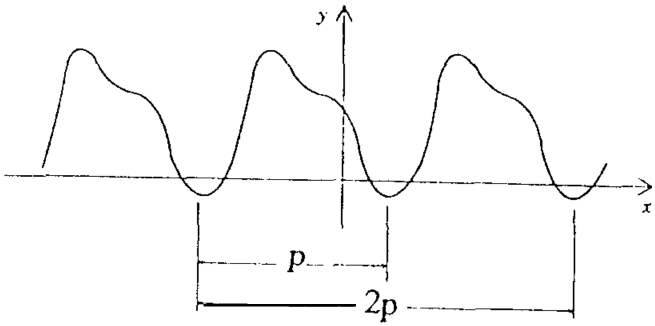
เราใช้พจน์แรกเป็น $\frac{a_0}{2}$ แทนที่จะเป็น a_0 เพื่อที่จะได้สูตรของสัมประสิทธิ์ง่าย ๆ ซึ่งจะพบในภายหลัง เนื่องจากอนุกรมฟูริเยร์เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันซายน์และโคซายน์ ซึ่งมีสมบัติเป็นฟังก์ชันเป็นคาบและเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก ดังนั้นจึงจะขอกล่าวถึงสมบัติดังกล่าว

ฟังก์ชันเป็นคาบ

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าฟังก์ชันเป็นคาบ ที่มีคาบ $p > 0$ ถ้า

$$f(x + p) = f(x) \qquad \dots\dots(3)$$

สำหรับทุกๆ x และเรียก p ว่าคาบของ f
ค่า p ที่เล็กที่สุดจะเรียกว่าคาบหลักมูล ของ f ดูรูป



รูปที่ 3

ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ดังนั้น

$$f(x+p) \;\square\; f(x)$$

$$f(x+2p) \;\square\; f(x+p+p) = f(x+p)$$

$$f(x+3p) = f(x+2p+p) = f(x+2p)$$

$$f(x+np) = f(x+(n-1)p+p) = f(x+(n-1)p) = f(x)$$

นั่นคือ ถ้า p เป็นคาบของฟังก์ชัน f แล้ว np , $n \in N$ ก็จะเป็นคาบของฟังก์ชัน f ด้วย

ถ้า f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ p แล้ว f_1f_2 จะเป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ p ด้วย

ให้ $F(x) = f_1(x)f_2(x)$

ดังนั้น $F(x+p) = f_1(x+p)\, f_2(x+p) = f_1(x)f_2(x) = F(x)$

ถ้า f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ p แล้ว $c_1f_2 + c_2f_2$ จะเป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ p ด้วย

ให้ $F(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$

ดังนั้น $F(x + p) = c_1f_1(x + p) + c_2f_2(x + p)$

$$= c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = F(x)$$

ยิ่งกว่านั้นยังสามารถแสดงได้ว่าผลบวกจำนวนจำกัด หรือผลบวกถึงอนันต์ของอนุกรมที่ลู่เข้าของฟังก์ชันที่มีคาบ p ก็ยังคงเป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบ p ด้วย

ตัวอย่างฟังก์ชันคาบที่รู้จักดีคือฟังก์ชัน sin x และ cos x ซึ่งมีคาบหลักมูล 2π

ส่วนฟังก์ชัน $\sin(n\pi x/L)$ และ $\cos(n\pi x/L)$, $n \in N$ จะมีคาบหลักมูล $p = 2L/n$ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้ สำหรับฟังก์ชัน $\sin n\pi x/L$

$$\sin \frac{n\pi(x + p)}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad .....(4)$$

สำหรับทุกๆ x และค่า p ที่เล็กที่สุดคือ 2L/n กระจายซ้ายมือของสมการ (4) จะได้

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi p}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi p}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad .....(5)$$

ซึ่งจริงได้ เมื่อ $\cos \frac{n\pi p}{L} = 1$ และ $\sin \frac{n\pi p}{L} = 0$

นั่นคือ $\frac{n\pi p}{L} = 2\pi\ 4\pi, \ldots$

$$p = \frac{2L}{n}, \frac{4L}{n}, \ldots$$

หรือจาก (5)' อาจเลือกให้ $\cos \frac{n\pi x}{L} = 0$ ฉะนั้น

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi p}{L} = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

นั่นคือ $\cos \frac{n\pi p}{L} = 1$ ซึ่งจะได้ $p = \frac{2L}{n}, \frac{4L}{n}, \ldots$

ทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชัน $\cos \frac{n\pi x}{n}$ ก็เช่นกัน และจากความจริงที่ว่า ถ้า p เป็นคาบแล้ว np ก็จะเป็นคาบด้วยทำให้ได้ว่า $\sin \frac{n\pi x}{L}$ และ $\cos \frac{n\pi x}{L}$ มีค่า 2L ด้วย

ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก

คุณสมบัติที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งสำหรับฟังก์ชัน $\sin\frac{n\pi x}{L}$ และ $\cos\frac{n\pi x}{L}$ คือความเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกันในช่วง $[-L,L]$ นั่นคือจะพบว่า

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ L & , \quad m = n \end{cases} \qquad .....(6)$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0 \ , \quad \text{ทุก } m\ ,\ n \qquad .....(7)$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ L & , \quad m = n \end{cases} \qquad .....(8)$$

ซึ่งสามารถแสดงได้โดยการอินทิเกรตโดยตรง ในที่นี้จะแสดงเฉพาะสมการ (6)

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m+n)\pi x}{L} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(m+n)\pi x/L}{(m+n)\pi/L} + \frac{\sin(m-n)\pi x/L}{(m-n)\pi/L}\right\}\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= 0 \quad \text{ถ้า } m+n \neq 0 \text{ และ } m-n \neq 0$$

แต่ m และ n เป็นบวก ดังนั้น $m+n \neq 0$ และถ้า $m-n = 0$ แล้ว $m = n$ ดังนั้นถ้า $m = n$ ต้องใช้วิธีอื่น คือ

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}[1+\cos 2n\pi x/L]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin(2n\pi x/L)}{2n\pi/L}\right\}\Big|_{-L}^{L}$$

$$= L$$

การหาสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n

สมมติว่าอนุกรม (1) ลู่เข้า และมีผลบวกเป็น f(x)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad .....(9)$$

เราสามารถหาสัมประสิทธิ์ a_n และ b_n โดยใช้คุณสมบัติความเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากตามสมการ (6),(7) และ (8) ดังต่อไปนี้

คูณสมการ (9) ด้วย $\cos m\pi x/L$ โดย m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตรึงแล้วอินทิเกรตเทียบกับ x จาก -L ถึง L สมมติว่าอินทิเกรตทีละพจน์ได้

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \qquad .....(10)$$

จากสมการ (6) และ (7) พจน์ทางขวามือที่ไม่เป็นศูนย์คือ เมื่อ n = m ในอนุกรมแรก ดังนั้น

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = La_n \quad ; n = 1,2,... \qquad ...(n)$$

ในการหา a_0 เราอินทิเกรตสมการ (9) จาก -L ถึง L

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= La_0 \qquad .....(12)$$

จากสมการ (11) และ (12) สามารถเขียนได้เป็น

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \ ; \ n = 0,1,2,\ldots \qquad .....(13)$$

ซึ่งจะพบว่า จากการใช้ $\frac{a_0}{2}$ ในสมการ (9) ทำให้เราได้ a_n ตามสมการ (13) ไม่เช่นนั้นแล้วเราต้องเขียนสูตร a_0 แยกต่างหาก

ทำนองเดียวกัน เราหา b_n ได้โดยคูณสมการ (9) ด้วย $\sin(m\pi x/L)$ แล้วอินทิเกรต จาก $-L$ ถึง L ใช้สมบัติตามสมการ (7) และ (8) จะได้

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \ ; \ n = 1,2,3,\ldots \qquad .....(14)$$

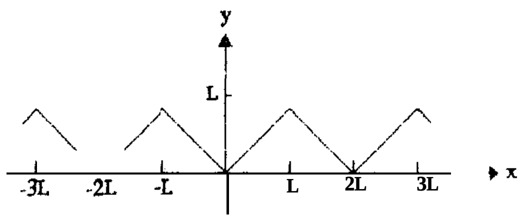
ตัวอย่างที่ 1 สมมติว่ามีอนุกรมฟูริเยร์ซึ่งลู่เข้าไปสู่ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} -x \ , & -L \le x < 0 \\ x \ , & 0 \le x < L \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x)$$

จงหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์นี้

วิธีทำ ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเป็นคาบซึ่งมีคาบ 2L ดังรูป



รูปที่ 4

ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์ คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + bn \sin \frac{n\pi x}{L}) \qquad .....(15)$$

โดย ส.ป.ส. หาได้จากสมการ (13) และ (14)

แทนค่า f(x) ในสมการ (13) เมื่อ $n = 0$ จะได้

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{0} (-x)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\, dx$$

$$= \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} + \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = L$$

สำหรับ $n > 0$ จากสมการ (13) จะได้

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} (-x)\cos \frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

โดยอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$a_n = \frac{1}{L}\left[-\frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{L} - (\frac{L}{n\pi})^2 \cos \frac{n\pi x}{L}\right]\Big|_{-L}^{0}$$

$$+ \frac{1}{L}\left[\frac{L}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{L} + (\frac{L}{n\pi})^2 \cos \frac{n\pi x}{L}\right]\Big|_{0}^{L}$$

$$= \frac{1}{L}\left[-(\frac{L}{n\pi})^2 + (\frac{1}{n\pi})^2 \cos n\pi + (\frac{L}{n\pi})^2 \cos n\pi - (\frac{L}{n\pi})^2\right]$$

$$= \frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1)\ ;\ n = 1,2,...$$

เนื่องจาก $\cos n\pi = (-1)^n$ ดังนั้น

$$a_n = \begin{cases} -4L/(n\pi)^2, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ 0, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

สำหรับสมการ (14) จะพบว่า

$$b_n = 0\ ,\ n = 1,2,3,...$$

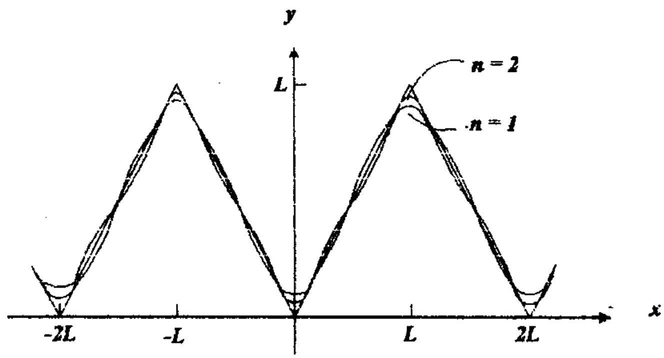
แทนค่า a_n, b_n **ในสมการ (15) จะได้อนุกรมฟูริเยร์**

$$f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{L} + \ldots\right)$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x/L)}{n^2}$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/L}{(2n-1)^2} \qquad \ldots\ldots(16)$$

ซึ่งผลบวกย่อยของอนุกรม (16) เมื่อ n = 1 และ n = 2 แสดงดังรูป



$ 5

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ให้

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

และสมมติว่า $f(x + 6) = f(x)$ **จงหา ส.ป.ส. ของอนุกรมฟูริเยร์นี้**

วิธีทำ **เนื่องจาก** $f(x)$ **มีคาบ** 6 **ดังนั้น** $L = 3$

อนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n \sin\frac{n\pi x}{4}\right)$$

โดยที่ ส.ป.ส. เป็นไปตามสมการ (13) และ (14)

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3}$$

ทำนองเดียวกัน

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\ 2\ ;\ n = 1,2,\dots$$

และ $$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

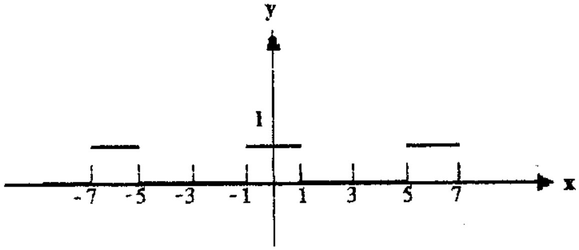
$$= -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-1}^{1} = 0\ ;\ n = 1,2,\dots$$

ดังนั้น อนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4}\right.$$

$$\left. \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \dots \right]$$



รูปที่ 6

<u>**ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่**</u>

ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันคู่ ถ้า

$$f(-x) = f(x) \qquad .....(17)$$

และฟังก์ชัน $f(x)$ จะเรียกว่าฟังก์ชันคี่ ถ้า

$$f(-x) = -f(x) \qquad .....(18)$$

ตัวอย่างของฟังก์ชันคู่เช่น $1,\ x^2,\ \cos nx\ ,\ |x|,\ x^{2n}$ เป็นต้น ส่วนตัวอย่างของฟังก์ชันเช่น; $x,\ x^3,\ \sin nx\ ,\ x^{2n+1}$ เป็นต้น แต่ก็มีบางชั้นไม่เป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ เช่น e^x และจากสมการ (18) จะพบว่าสำหรับฟังก์ชันคี่ $f(0) = 0$

สมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. ผลบวก (ต่าง) และผลคูณ (หาร) ของสองฟังก์ชันคู่จะเป็นฟังก์ชันคู่
2. ผลบวก (ต่าง) ของสองฟังก์ชันคี่จะเป็นฟังก์ชันคี่ แต่ผลคูณ (หาร) ของสองฟังก์ชันคี่และจะเป็นฟังก์ชันคู่
3. ผลบวก (ต่าง) ของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ แต่ผลคูณ (หาร) ของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่จะเป็นฟังก์ชันคี่
4. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$
5. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$

ในที่นี้จะแสดงให้เห็นบางข้อเท่านั้น

ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันคี่ และ $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) \\ &= -f_1(x) - f_2(x) \\ &= -[f_1 + f_2] = -g(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ $f_1 + f_2$ เป็นฟังก์ชันคี่

ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันคี่ และ

$$h(x) = f_1(x)f_2(x)$$

$$\begin{aligned} h(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) \\ &= [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x) = h(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ f_1f_2 เป็นฟังก์ชันคู่

ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = -t$ สำหรับพจน์แรกทางขวามือ

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)dx &= -\int_{L}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= -\int_{L}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{L} f(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{L} f(x)dx \end{aligned}$$

<u>อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์</u>

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ โดยใช้สมบัติของฟังก์ชันคู่จะพบว่า ส. ป. ส. ของอนุกรมฟูริเยร์ ตามสมการ (13) และ (14) จะได้ว่า

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\quad n = 0,1,2,\ldots \qquad \ldots\ldots(19)$$

$$b_n = 0 \qquad , n = 1,2,3,\ldots$$

ดังนั้น f มีอนุกรมฟูริเยร์ในรูป

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$$

ซึ่งเรียกว่าอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์

<u>อนุกรมฟูริเยร์ซายน์</u>

ทำนองเดียวกัน ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ โดยสมบัติของฟังก์ชันคี่ จะได้

$$a_n = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \; ; \; n = 1,2,\ldots \qquad \ldots\ldots(20)$$

และอนุกรมฟูริเยร์ สำหรับ f คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ซึ่งเรียกว่าอนุกรมฟูริเยร์ซายน์

<u>**ตัวอย่างที่** 3</u> กำหนดให้ $f(x) = x, \; -L < x < L$

และ $f(x + 2L) = f(x)$ จงหาอนุกรมฟูริเยร์

วิธีทำ เนื่องจาก f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$a_n - 0 \; , \; n = 0,1,2,\ldots$$

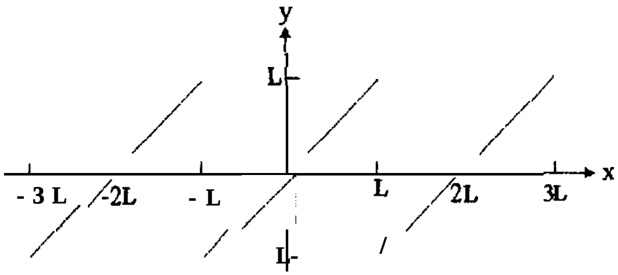
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left(\sin\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad ; \; n = 1,2,\ldots$$

ดังนั้นอนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



รูปที่ 7

ที่กล่าวมาข้างต้น เราไม่ได้พูดถึงสมบัติของฟังก์ชันที่จะทำให้อนุกรมฟูริเยร์ลู่เข้า และถ้าลู่เข้าแล้วที่จุดไม่ต่อเนื่องจะลู่เข้าไปยังค่าใด ทฤษฎีต่อไปนี้จะให้คำตอบดังกล่าว

ทฤษฎีบท ถ้าฟังก์ชัน f และ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ในช่วง $-L \leq x < L$ ยิ่งกว่านั้นสมมติว่า f นิยามนอกช่วง $-L \leq x < L$ ซึ่งทำให้เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ (คาบ 2L) แล้วอนุกรมฟูริเยร์ของ f คือ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

โดยที่ ส.ป.ส. a_n และ b_n เป็นไปตามสมการ (13) และ (14) และอนุกรมจะลู่เข้าสู่ f(x) สำหรับทุกค่า x ที่จุดต่อเนื่องและลู่เข้าสู่ $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ณ จุดไม่ต่อเนื่อง

สำหรับฟังก์ชันที่นิยามในช่วง [0,L] เราสามารถหาอนุกรมฟูริเยร์ได้ 2 ลักษณะ ดังนี้

1. นิยามฟังก์ชัน g ซึ่งมีคาบ 2L โดย

$$g(x) = \begin{cases} f(x) , & 0 \le x \le L \\ \\ f(-x) , & -L < x < 0 \end{cases} \qquad .....(21)$$

ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันคู่ ทำให้ได้อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ และจะแทน f ในช่วง [0,L]

2. นิยามฟังก์ชัน h ซึ่งมีคาบ 2L โดย

$$h(x) = \begin{cases} f(x) , & 0 < x < L \\ 0 , & x = 0,L \\ -f(-x) , & -L < x < 0 \end{cases} \qquad .....(22)$$

ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันคี่ ทำให้ได้อนุกรมฟูริเยร์ซายน์ และจะแทน f ในช่วง (0,L)

ตัวอย่างที่ 4 ให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x , & 0 < x < 1 \\ \\ 0 , & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

จงหาอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ และอนุกรมฟูริเยร์ซายน์

วิธีทำ ในที่นี้ L = 2

กรณีอนุกรมฟูริเยร์โคซายน์

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \int_0^2 (1 - x)dx = 0$$

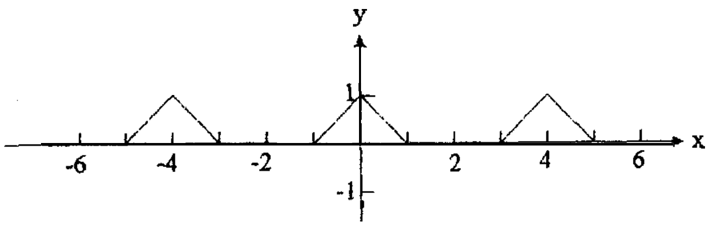
$$a_n = \int_0^2 (1 - x)\cos \frac{n\pi x}{2}\, dx \quad , n = 1,2,3,...$$

$$= \frac{}{(n\pi)^2}[\cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1)] , \quad n = 1,2,3,...$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \cos \frac{n\pi x}{2}$$



รูปที่ 8

กรณีอนุกรมฟูริเยร์ชายน์

$$a_n = 0$$

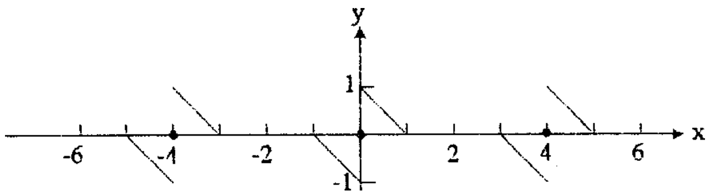
$$b_n = \int_0^2 (1 - x)\sin \frac{n\pi x}{2}\, dx \;, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$= -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - 1] + \frac{4}{n\pi} (-1)^n$$

$$= \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^n] \;, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^n] \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} [1 + (-1)^{2n}] \sin n\pi x$$



รูปที่ 9

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเป็นคาบหรือไม่ ถ้าใช่ จงบอกคาบหลักมูลด้วย

   1.1 $\sin \pi x/L$ 1.2 $\cos 2\pi x$

   1.3 $\sinh 2x$ 1.4 $\tan \pi x$

   1.5 $x2$ 1.6 $\sin 5x$

   1.7 $\sin kx$ 1.8 e^{x}

   1.9 $f(x) = \begin{cases} 0 , & 2n - 1 \leq x < 2n \\ 1 , & 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   1.10 $f(x) = \begin{cases} (-1)^{n} , & 2n - 1 < x < 2n \\ 1 , & 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ ซึ่งมีคาบ p จงแสดงว่า

$$\int_0^p f(x)dx = \int_a^{a+p} f(x)dx$$

3. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $F(x) = -x, \quad -L \leq x < L \; ; \; f(x + 2L) = f(x)$

   3.2 $f(x) = \begin{cases} -L-x , & -L < x < 0 \\ L-x , & 0 < x < L \; ; \end{cases}$ $f(x + 2L) = f(x)$

   3.3 $f(x) = \begin{cases} x + 1 , & -1 \leq x < 0 \\ x , & 0 \leq x < 1 \; ; \end{cases}$ $f(x + 2) = f(x)$

   3.4 $f(x) = \begin{cases} x , & -\pi \leq x < 0 \\ x , & 0 < x < \pi \; ; \end{cases}$ $f(x + 2\pi) = f(x)$

$$\begin{cases} \\ x+1 , & -1 < x < 0 \end{cases}$$

3.5 $f(x)$ ▫ $f(x + 2) = f(x)$

$$\begin{cases} 1 - x , & 0 \le x < 1 ; \\ 0 , & -2 \le x \le -1 \end{cases}$$

3.6 $f(x) = \begin{cases} x , & -1 < x < 1 \\ 0 , & 1 \le x < 2 ; \\ x+X1,,-10 & < x < 1< x <0 \end{cases}$ $f(x + 4) = f(x)$

4. ถ้า $f(x) =$

และ $f(x + 2)$ ▫ $f(x)$ จงหา $f(x)$ ในช่วง $-1 < x < 2$ และในช่วง $8 < x < 9$

5. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

5.1 x^3 5.2 $x^3 - 3x$ 5.3 $x^3 - 2x + 1$

5.4 $\tan 2x$ 5.5 $\sec x$ 5.6 $|x|^3$

5.7 e^{-x} 5.8 lnlsin xl 5.9 lnlcos xl

5.10 $(2x - x^3)^4$

6. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันที่กำหนด

6.1 $f(x) \begin{cases} x , & 0 \le x < 1 \\ 1 , & 1 \le x < 2 \end{cases}$

อนุกรมฟูริเยร์ชายน์ ที่มีคาบ ,4

6.2 $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 < x < 1 \\ 0 , & 1 < x < 2 \end{cases}$

อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ ที่มีคาบ 4

6.3 $f(x) = 1 , 0 < x < \pi$

อนุกรมฟูริเยร์ชายน์ ที่มีคาบ 2π

6.4 $f(x) = 1 , \quad 0 \le x \le \pi$

อนุกรมฟูริเยร์โคซายน์ ที่มีคาบ. 2π

คำตอบ

1. 1.1 $p = 2L$ 1.2 $p = 1$ 1.3 ไม่ใช่

 1.4 $p = 1$ 1.5 ไม่ใช่ 1.6 $p = 2\pi/5$

 1.7 $p = 2\pi/|m|, m \neq 0$ 1.8 ไม่ใช่

 1.9 $p = 2$ 1.10 $p = 4$

3. 3.1 $f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$

 3.2 $f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$

 3.3 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$

 3.4 $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}]$

 3.5 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$

 3.6 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + (\frac{2}{n\pi})^2 \sin \frac{n\pi}{2}] \sin \frac{n\pi x}{2}$

4. $f(x) = x - 1,\ 1 < x < 2$ และ $f(x) = x - 8,\ 8 < x < 9$

5. 5.1 คี่ 5.2 คี่ 5.3 ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง

 5.4 คี่ 5.5 คู่ 5.6 คู่

 5.7 ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง 5.8 คู่

 5.9 คู่ 5.10 คู่

6. 6.1 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$

6.2 $f(x) = 2\ 1 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\quad} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

6.3 $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

6.4 $f(x) = 1$

5.3 อนุกรมฟูริเยร์สองชั้น

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูริเยร์ได้เช่นเดียวกัน สมมติว่า $f(x,y)$ และ $f'(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ในโดเมน $-K < x < K$, $-L < y < L$ ถ้าเราให้ y มีค่าคงตัว แล้ว

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(y)\cos\frac{m\pi x}{K} + b_m(y)\sin\frac{m\pi x}{K}]$$

โดยที่สัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันของ y ซึ่ง .....(1)

$$a_m(y) = \frac{1}{K}\int_{-K}^{K} f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{K}\,dx,\ m \in N_0 \qquad .....(2)$$

$$b_m(y) = \frac{1}{K}\int_{-K}^{K} f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{K}\,dx,\ m \in N$$

สัมประสิทธิ์ $a_m(y)$ และ $b_m(y)$ หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง ดังนั้นสามารถกระจายอนุกรมได้

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn}\cos\frac{n\pi y}{2} + b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{L}]$$

.....(3)

$$b_m(y) = \frac{c_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{mn}\cos\frac{n\pi y}{L} + d_{mn}\sin\frac{n\pi y}{L}]$$

เมื่อ

$$a_{mn} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} a_m(y)\cos\frac{n\pi y}{L}\,dy$$

จากสมการ (2) จะได้

$$a_{mn} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} [\frac{1}{K}\int_{-K}^{K} f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{K}\,dx]\cos\frac{n\pi y}{L}\,dy$$

$$= \frac{1}{KL}\int_{-L}^{L}\int_{-K}^{K} f(x,y)\ kos\ \frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

ทำนองเดียวกัน

$$b_{mn} = \frac{1}{KL}\int_{-L}^{L}\int_{-K}^{K} f(x,y)\ kos\ \frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

$$c_{mn} = \frac{1}{KL}\int_{-L}^{L}\int_{-K}^{K} f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{KL}\int_{-L}^{L}\int_{-K}^{K} f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

แทนค่า a_m และ b_n ในสมการ (1) จะได้

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{0n}\cos\frac{n\pi y}{L} + b_{0n}\sin\frac{n\pi y}{L}]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_{m0}\cos\frac{m\pi x}{K} + c_{m0}\sin\frac{m\pi x}{K}]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L} + b_{mn}\cos\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}$$

$$+ c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L} + d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L} \quad .....(4)$$

ซึ่งเรียกอนุกรมในสมการ (4) นี้ว่า อนุกรมฟูริเยร์สองชั้นของ f(x,y)

อนุกรมฟูริเยร์สองชั้นจะง่ายขึ้น ถ้าใช้สมบัติสมมาตรใน z = f(x,y) เทียบกับระนาบพิกัด (สมบัติการเป็นฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ บนตัวแปร x และ y นั่นเอง) ดังต่อไปนี้

ก. ถ้า f(-x,y) = f(x,y) และ f(x,-y) = f(x,y) ส.ป.ส. ทุกตัวจะเป็นศูนย์หมด ยกเว้น a_{mn} และอนุกรมจะกลายเป็นอนุกรมโคซายน์

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\cos\frac{n\pi y}{L} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}\cos\frac{m\pi x}{K}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{KL}\int_0^L\int_0^K f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

ข. ถ้า $f(-x,y) = f(x,y)$ และ $f(x,-y) = -f(x,y)$ ส.ป.ส. ทุกตัวจะเป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้น b_{mn}

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}\sin\frac{n\pi y}{L} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\cos\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}$$

$$b_{mn} = \frac{4}{KL}\int_0^L\int_0^K f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

ค. ถ้า $f(-x,y) = -f(x,y)$ และ $f(x,-y) = f(x,y)$ ส.ป.ส. ทุกตัวจะเป็นศูนย์หมด ยกเว้น c_{mn}

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m0}\sin\frac{m\pi x}{K} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}$$

$$c_{mn} = \frac{4}{KL}\int_0^L\int_0^K f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{K}\cos\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

ง. ถ้า $f(-x,y) = -f(x,y)$ และ $f(x,-y) = -f(x,y)$ ส.ป.ส. ทุกตัวจะเป็นศูนย์หมด ยกเว้น d_{mn} และอนุกรมจะกลายเป็นอนุกรมซายน์

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}$$

$$d_{mn} = \frac{4}{KL}\int_0^L\int_0^K f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{K}\sin\frac{n\pi y}{L}\,dxdy$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $f(x,y) = xy$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$ จงกระจายเป็นอนุกรมฟูริเยร์สองชั้น

วิธีทำ เนื่องจาก

$$f(-x,y) = -xy = -f(x,y)$$

$$f(x,-y) = -xy = -f(x,y)$$

ดังนั้นอนุกรมจะอยู่ในรูป

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin \frac{m\pi x}{1} \sin \frac{n\pi y}{2}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
d_{mn} &= \frac{4}{1(2)} \int_0^2 \int_0^1 xy \sin m\pi x \sin \frac{n\pi y}{2}\, dx dy \\
&= 2 \int_0^2 \left[\frac{\sin m\pi x}{m^2\pi^2} - \frac{x \cos m\pi x}{m\pi} \right]_0^1 y \sin \frac{n\pi y}{2}\, dy \\
&= \frac{-2(-1)^m}{m\pi} \int_0^2 y \sin \frac{n\pi y}{2}\, dy \\
&= \frac{-2(-1)^m}{m\pi} \left[\frac{-4(-1)^n}{n\pi} \right] \\
&= \frac{8(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 5.3

จงหาอนุกรมฟูริเยร์สองชั้น ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x,y) = 1 \; ; \; 0 < x < a \, , \; 0 < y < b$

2. $f(x,y) = xy^2 \; ; \; -\pi < x < \pi \, , \; -\pi < y < \pi$

3. $f(x,y) = x^2y^2 \; , \; -\pi < x < \pi , \; -\pi < y < \pi$

4. $f(x,y) = x \cos y \; , \; -1 < x < 1 \; , \; -2 < y < 2$

คำตอบ

1. $$\frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2n-1)}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{a}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{b}$$

2. $$\frac{2\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin mx + 8\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2}\sin mx\cos ny$$

3. $$\frac{\pi^4}{9} + \frac{4\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos mx + \frac{4\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos ny$$

$$+ 16\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^2n^2}\cos mx\cos ny$$

4. $$\frac{\sin 2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin m\pi x + \frac{8\sin 2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^{m+n+1}}{m(4-n^2\pi^2)}$$

$$\sin m\pi x\cos\frac{n\pi y}{2}\Big]$$

เวลาพัก

การสังเกตเป็นสิ่งที่สำคัญ จากรูปข้างบนนี้ บางคนอาจจะเห็นรูปหญิงสาว แต่บางคนอาจจะเห็นเป็นรูปหญิงชรา แล้วนักศึกษาล่ะ เห็นรูปทั้งสองหรือเปล่า!