บทที่ 4
สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรโดยจะพิจารณาสมการอันดับสองเท่านั้น สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรอิสระ $u = u(x,y)$ รูปสมการเชิงเส้นอันดับสองคือ

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_{x} + e(x,y)u_{y} + f(x,y)u = g(x,y) \quad .....(1)$$

4.1 <u>การหาผลเฉลยสมการเชิงเส้นอันดับสอง</u>

เราสามารถแก้สมการ (1) ได้ เมื่อสมการ (1) มีรูปแบบเฉพาะบางอย่างดังต่อไปนี้

<u>แบบที่ 1</u> ถ้าสมการ (1) อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$u_{xx} = \frac{g}{a} = F_1(x,y)$$

หรือ $u_{xy} = \frac{g}{b} = F_2(x,y)$ .....(2)

หรือ $u_{YY} = \frac{g}{c} = F_3(x,y)$

แล้ว b ราสามารถอินทิเกรตได้ทันที

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงแก้สมการ $u_{xx} = \sin(xy)$

วิธีทำ จาก

$$u_{xx} □ \sin(xy)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x

$$u_x = -\frac{1}{y}\cos(xy) + \phi_1(y)$$

เมื่อ $\phi_1(y)$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

อินทิเกรตเทียบกับ x อีกครั้ง จะได้

$$u = -\frac{1}{y^2}\sin(xy) + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$$

เมื่อ $\phi_2(y)$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $xy^2u_{xy} = 1 - 2x^2y$

วิธีทำ เขียนสมการโจทย์ใหม่เป็น

$$u_{xy} = x^{-1}y^{-2} - 2xy^{-1}$$

อินทิเกรตเทียบกับ y

$$u_x = -x^{-1}y^{-1} - 2x\ln y + \phi_1(x)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จะได้

$$u = -\frac{1}{y}\ln x - x^2\ln y + \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $u_{yy} = x^2\cos(xy)$

วิธีทำ จากโจทย์

$$u_{yy} = x^2\cos(xy)$$

อินทิเกรตเทียบกับ y

$$u_y = x\sin(xy) + \phi_1(x)$$

อินทิเกรตเทียบกับ y จะได้

$$u = -\cos(xy) + y\phi_1(x) + \phi_2(x)$$

แบบที่ 2 สมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} au_{xx} + au_x &= g(x,y) \\ bu_{xy} + du_x &= g(x,y) \\ bu_{xy} + eu_y &= g(x,y) \\ cu_{yy} + eu_y &= g(x,y) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(3)$$

เราสามารถเขียนใหม่เป็น

$$ap_x + dp = g$$
$$bp_y + dp = g$$
$$bq_x + eq = g \qquad \text{.....(4)}$$
$$cq_y + eq = g$$

โดยที่ $p = u_x$ และ $q = u_y$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มี p หรือ q เป็นตัวแปรตาม

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $xu_{xx} + u_x = 9x^2y^2$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$p_x + \frac{1}{x}\,p = 9xy^2 \qquad (p = u_x)$$

ซึ่งมีตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = x$

ดังนั้น $px = 3x^3y^2 + \phi_1(y)$

แทนค่า $p = u_x$

$$u_x = 3x^2y^2 + x^{-1}\,\phi_1(y)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จะได้

$$u = x^3y^2 + \phi_1(y)\ln x + \phi_2(y)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $yu_{xy} + u_x = \cos(x + y) - y\,\sin(x + y)$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$p_y + \frac{p}{y} = \frac{1}{y}\cos(x + y) - \sin(x \cdot y)$$

ซึ่งมีตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$

ดังนั้น $p.y = \int[\cos(x \cdot y) - y\sin(x \cdot y)]dy$

$$= y\cos(x + y) + \phi_1(x)$$

แทนค่า $p = u_x$

$$y.u_x = \square\cos(x + y) \cdot \phi_1(x)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จะได้

$$yu = y\ \cos(x + y) + \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $yu_{yy} + 2u_y = (9y + 6)e^{2x+3y}$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$q_y + \frac{2}{y}q = (9 + \frac{6}{y})e^{2x+3y} \ ; \ q = u_Y$$

ซึ่งตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int \frac{2}{y}dy} = y^2$

ดังนั้น $qy^2 = \frac{1}{D'}(9y^2 + 6y)e^{2x+3y} + \phi_1(x)$

$$= e^{2x+3y}\frac{1}{D' + 3}(9y^2 + 6y) + \phi_1(x)$$

$$= e^{2x+3y}\ \frac{1}{3}[1 - \frac{D'}{3} + \frac{D'^2}{9} - \ldots](9y^2 + 6y) + \phi_1(x)$$

$$= \frac{1}{3}\ e^{2x+3y}(9y^2 + 6y - 6y - 2 + 2) + \phi_1(x)$$

$$= 3y^2e^{2x+3y} + \phi_1(x)$$

แทนค่า $q = u_Y$

$$u_y = 3e^{2x+3y} + \frac{1}{y^2}\ \phi_1(x)$$

อินทิเกรตกับ y จะได้

$$u = e^{2x+3y} - \frac{1}{y}\ \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $yu_{xy} - u_x = xy^2\cos(xy)$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$p_y - \frac{p}{y} = xy\ \cos(xy)$$

ซึ่งมีตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{-\int \frac{1dy}{y}} = \frac{1}{Y}$

ดังนั้น $\quad p \cdot \frac{1}{y} = \sin(xy) + \phi_1(x)$

แทนค่า $p \;\square\; u_x$

$$u_x \;\square\; y\sin(xy) + y\phi_1(x)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จะได้

$$\blacklozenge \;\square\; -\cos(xy) \;\boxdot\; y\phi_1(x) \;\boxdot\; \phi_2(y)$$

แบบที่ 3

สมการที่อยู่ในรูป

$$au_{xx} + bu_{xy} + du_x = g$$

$$bu_{xy} + cu_{yy} + eu_y = g \qquad .....(5)$$

เราสามารถเขียนใหม่เป็น

$$ap_x + bp_y = g - dp$$

$$bq_x + cq_y = g - eq \qquad .....(6)$$

โดยที่ $p = u_x$ และ $q = u_y$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบกึ่งเชิงเส้น นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $u_{xx} - \frac{y}{x} u_{xy} = 15xy^2$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$p_x + \frac{Y}{x} p_Y = 15xy^2$$

ซึ่งเป็นสมการกึ่งเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y/x} = \frac{dp}{15xy^2}$$

เลือกสมการคู่แรกจะได้

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

อินทิเกรต $\frac{y}{x} = \alpha$

เลือกสมการ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dp}{15xy^2}$$

หรือ $dp = 15xy^2dx$

แทนค่า $y = \alpha x$ จะได้

$$dp = 15\alpha^2x^3dx$$

อินทิเกรต $p = \frac{15}{4}\alpha^2x^4 + \beta$

$$= \frac{15}{4}x^2y^2 + \beta$$

ผลเฉลยสมการกึ่งเชิงเส้นคือ

$$p = \frac{15}{4}x^2y^2 + \phi(\frac{y}{x})$$

แทนค่า $p = u_x$

$$u_x = \frac{15}{4}x^2y^2 + \phi(\frac{y}{x})$$

อินทิเกรตเทียบกับ x

$$u = \frac{5}{4}x\,y^{32} + \int\phi(\frac{y}{x})dx + \phi_1(y)$$

$$= \frac{5}{4}x^3y^2 + y\int\frac{1}{(-y/x)^2}\phi(\frac{y}{x})d(\frac{y}{x}) + \phi_1(y)$$

$$= \frac{5}{4}X^3Y^2 + y\phi_2(\frac{y}{x}) + \phi_1(y)$$

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $xyu_{xx} - x^2u_{xy} - yu_x = x^3e^y$

วิธีทำ จากโจทย์เขียนใหม่เป็น

$$xyp_x - x^2p_y = yp + x^3e^y$$

ซึ่งเป็นสมการกึ่งเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการ

$$\frac{ax}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dp}{yp + x^3e^y}$$

เลือกสมการคู่แรก จะได้

$$xdx - ydy = 0$$

อินทิเกรต $x^2 - y^2 = \alpha$

เลือกสมการ $\frac{dx}{xy} = \frac{dp}{yp + x^3e^Y}$

จะได้ $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = \frac{x^2}{y}e^y$

แทนค่า $y = \sqrt{x^2 - \alpha}$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-\alpha}}e^{\sqrt{x^2-\alpha}}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบอินทิเกรต $e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

ดังนั้น $p.\frac{1}{x} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-\alpha}}e^{\sqrt{x^2-\alpha}}dx + \beta$

$$= e^{\sqrt{x^2-\alpha}} + \beta$$

ผลเฉลยสมการกึ่งเชิงเส้น คือ

$$p = xe^{y} + x\phi(x^2 - y^2)$$

แทนค่า $P = u_x$

$$u_x = xe^{y} + x\phi(x^2 - y^2)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x

$$u = \frac{x^2}{2} e^{y} + \int x\phi(x^2 - y^2)dx + \phi_2(y)$$

$$= \frac{x^2}{2} e^{y} + \phi_1(x^2 - y^2) + \phi_2(y)$$

แบบฝึกหัดที่ 4.1

จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $u_{xx} = x^2 e^y$

2. $u_{xy} = x^2 - y^2$

3. $xyu_{yy} = 1$

4. $xyu_{xy} - yu_y = x^2$

5. $u_{yy} - xu_y = -\sin y - x\cos y$

6. $u_{yy} - xu_y = x^2$

7. $yu_{yy} - u_y = xy$

คำตอบ

1. $u = \frac{x^4}{12} e^y + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

2. $u = \phi_1(x) + \phi_2(y) + \frac{1}{3}(x^3 y - xy^3)$

3. $u = \ln x \ln y + \phi_1(x) + \phi_2(y)$

4. $u = x^2 \ln y + x\phi_1(y) + \phi_2(x)$

5. $u = \sin y + e^{xy}\phi_1(x) + \phi_2(x)$

6. $u = -xy + \phi_1(x) + e^{xy}\phi_2(x)$

7. $u = \frac{1}{2} xy^2 \ln y - \frac{1}{4} xy^2 + \frac{y^2}{2} \phi_1(x) + \phi_2(x)$

4.2 การจำแนกชนิดสมการอันดับสอง และการลดรูปสมการ

สำหรับสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad .....(1)$$

โดยที่ a,b,c,d,e,f และ g เป็นฟังก์ชันของ x และ y เราจำแนกชนิดของสมการ (1) โดยเปรียบเทียบกับสมการกำลังสองของภาคตัดกรวย

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

นั่นคือ พิจารณาเครื่องหมายของพจน์ $b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y)$ ณ จุดใด ๆ

-ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ ณ จุด (x_0,y_0) แล้วเราเรียกสมการ (1) ว่าเป็นแบบเชิงไฮเพอร์โบลา ณ จุด (x_0,y_0)

-ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ ณ จุด (x_0,y_0) แล้ว เราเรียกสมการ (1) ว่าเป็นแบบเชิงพาราโบลา ณ จุด (x_0,y_0)

-ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ ณ จุด (x_0,y_0) แล้ว เราเรียกสมการ (1) ว่าเป็นแบบเชิงวงรี ณ จุด (x_0,y_0)

และถ้าเป็นจริงตามนี้ที่ทุก ๆ จุด (x,y) แล้วจะเรียกสมการ (1) ว่าเป็นเชิงไฮเพอร์โบลา เชิงพาราโบลา หรือเชิงวงรีในโดเมนหนึ่ง

โดยการแปลงที่เหมาะสม (เปลี่ยนตัวแปรอิสระ) จะทำให้สมการ (1) อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น ซึ่งเรียกว่า**รูปแบบมาตรฐาน**

ให้ $\xi = \phi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ $\qquad .....(2)$

โดยที่ จาโคเบียน

$$J \quad \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \qquad ...(3)$$

ให้ $\bar{u}(\xi,\eta)$ เป็นตัวแปรตามของฟังก์ชันของตัวแปรใหม่ (ξ,η) ดังนั้น

$$u(x,y) = \bar{u}(\phi(x,y),\psi(x,y)) \qquad .....(4)$$

จากกฎลูกโซ่ จะพบว่า

$$u_x = \bar{u}_\xi\phi_x + \bar{u}_\eta\psi_x$$

$$u_y = \bar{u}_\xi\phi_y + \bar{u}_\eta\psi_y$$

$$u_{xx} = \bar{u}_{\xi\xi}\phi_x^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta}\phi_x\psi_x + \bar{u}_{\eta\eta}\psi_x^2 + \bar{u}_\xi\phi_{xx} + \bar{u}_\eta\psi_{xx} \qquad ...(5)$$

$$u_{yy} = \bar{u}_{\xi\xi}\phi_y^2 + 2\bar{u}_{\xi\eta}\phi_y\psi_y + \bar{u}_{\eta\eta}\phi_y^2 + \bar{u}_{\xi}\phi_{yy} + \bar{u}_{\eta}\phi_{yy}$$

$$u_{xy} = \bar{u}_{\xi\xi}\phi_x\phi_y + \bar{u}_{\xi\eta}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y) + \bar{u}_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + \bar{u}_{\xi}\phi_{xy} + \bar{u}_{\eta}\phi_{xy}$$

แทนค่าอนุพันธ์เหล่านี้ในสมการ (1) แล้วจัดรูป จะได้

$$A\bar{u}_{\xi\xi} + B\bar{u}_{\xi\eta} + C\bar{u}_{\eta\eta} + D\bar{u}_{\xi} + E\bar{u}_{\eta} + F\bar{u} = G \qquad \ldots(6)$$

โดยที่

$$A(\xi,\eta) = a\phi_x^2 + b\phi_x\phi_y + c\phi_Y^2$$

$$B(\xi,\eta) = 2a\phi_x\phi_x + b(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y) + 2c\phi_Y\psi_Y$$

$$C(\xi,\eta) = a\phi_x^2 + b\phi_x\psi_y + c\phi_Y^2$$

$$D(\xi,\eta) = a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y \qquad \ldots..(7)$$

$$E(\xi,\eta) = a\psi_{xx} + b\psi_{xy} + c\psi_{yy} + d\psi_x + e\psi_y$$

$$F(\xi,\eta) = f$$

$$G(\xi,\eta) = g$$

สมการ (6) ซึ่งได้ใหม่จะมีรูปแบบเดียวกับสมการเดิมคือสมการ (1) ภายใต้การแปลง (2) และยิ่งกว่านั้นยังสามารถแสดงได้ว่า

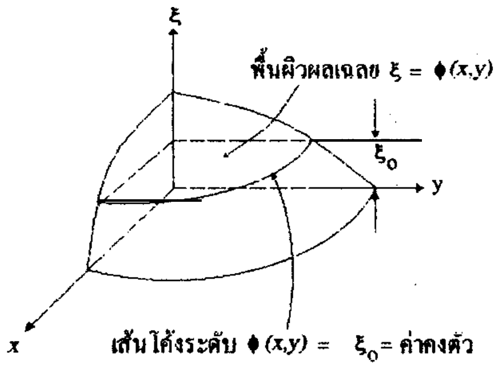
$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)J^2$$

นั่นคือ เครื่องหมายของดิสคริมิแนนท์ $b^2 - 4ac$ ก็ไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแปลง (2) เช่นกัน

ถ้าเราหาฟังก์ชัน ϕ และ ψ ซึ่งทำให้ $A = C = 0$ และ $B \neq 0$ จะทำให้ได้รูปแบบง่าย ๆ ตามต้องการ เนื่องจากรูปแบบของ A และ C ตามสมการ (7) เป็นสมการชนิดเดียวกัน ดังนั้นเราเลือกพิจารณาเพียงสมการเดียว สมมติเลือก $A = 0$

$$a(x,y)\phi^2 + b(x,y)\phi_x\phi_y + c(x,y)\phi^2 = 0 \qquad \ldots..(8)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่ไม่ใช่เชิงเส้น ในตัวแปร $\phi(x,y)$ พิจารณาเส้นโค้งระดับ (level curve) $\phi(x,y) = \xi_0$ (ค่าคงตัว) บนพื้นผิว $\xi = \phi(x,y)$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการ (8) (ดูรูป)



บนเส้นโค้ง $\xi = \phi(x,y) = \xi_0$ นี้ จะพบว่า

$$d\xi = \phi_x dx + \phi_y dy = 0$$

นั่นคือ ความชันของเส้นโค้งนี้คือ

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\phi_x(x,y)/\phi_y(x,y) \text{ , ถ้า } \phi_y \neq 0$$

จากสมการ (8) ถ้า $\phi_y \neq 0$ เขียนใหม่เป็น

$$a\frac{\phi_x^2}{\phi_y^2} + b\frac{\phi_x}{\phi_y} + c = 0 \qquad \text{.....(9)}$$

หรือ $$ay'^2 - by' + c = 0 \qquad \text{.....(10)}$$

ซึ่งรากของสมการคือ

$$y' = (b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \qquad \text{.....(11)}$$

และ

$$y' = (b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \qquad \text{.....(12)}$$

กรณีที่ 1 ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้วจะได้รากจริงที่ต่างกันสองรากและสมการ (6) จะลดรูปสมการเป็นแบบมาตรฐานคือ

$$\bar{u}_{\xi\eta} = -\frac{D}{B}\bar{u}_\xi - \frac{F}{B}\bar{u}_\eta - \frac{F}{B}\bar{u} + \frac{G}{B} \qquad \text{.....(13)}$$

และถ้าเปลี่ยนตัวแปรใหม่อีกครั้ง โดยให้

$$\alpha = \xi + \eta$$

$$\beta = \xi - \eta$$

สมการ (13) จะเปลี่ยนเป็น

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H(\alpha,\beta,U,U_{\alpha},U_{\beta}) \qquad .....(14)$$

ซึ่งเป็นรูปแบบมาตรฐานอีกแบบหนึ่งของกรณีนี้

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (11) และ (12) จะได้วงศ์เส้นโค้งระดับ 2 ชุดที่ต่างกัน (สมมติเป็น $f_1(x,y) = c_1$ และ $f_2(x,y) = c_2$) และเนื่องจากผลเฉลยของสมการ $C = 0$ ก็จะได้วงศ์เส้นโค้งกันกับสมการ $A = 0$ ดังนั้น เราให้

$$\xi = \phi(x,y) = f_1(x,y)$$

และ $$\eta = \phi(x,y) = f_2(x,y)$$

เรียกเส้นโค้งทั้งสองนี้ว่า เส้นโค้งลักษณะเฉพาะ

กรณีที่ 2 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการ (11) และ (12) จะเหมือนกัน ทำให้ได้วงศ์เส้นโค้งลักษณะเฉพาะเพียงชุดเดียวคือ

$$y' = \frac{b}{a} \qquad .....(15)$$

สมมติให้เป็นเงื่อนไขของ $C = 0$ ดังนั้นผลเฉลยสมการ (15) คือ

$$\eta = \phi(x,y) = f_2(x,y)$$

และเราสามารถเลือกกำหนด $\xi = \phi(x,y)$ ใด ๆ ก็ได้ที่ $J \neq 0$

นั่นคือ $A \neq 0$

เนื่องจาก $B^2 - 4AC = 0$ ดังนั้น $B = 0$ ทำให้รูปแบบสมการมาตรฐานกรณีนี้คือ

$$\bar{u}_{\xi\xi} = -\frac{D}{A}\bar{u}_{\xi} - \frac{E}{A}\bar{u}_{\eta} - \frac{F}{A}\bar{u} + \frac{G}{A} \qquad .....(16)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $A = 0, C \neq 0$ จะได้รูปแบบมาตรฐานคือ

$$\bar{u}_{\eta\eta} = -\frac{D}{C}\bar{u}_{\xi} - \frac{E}{C}\bar{u}_{\eta} - \frac{F}{C}\bar{u} + \frac{G}{C} \qquad .....(17)$$

กรณีที่ 3 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ รากสมการ (10) จะเป็นเชิงซ้อนรูปแบบที่ได้จะเหมือนกับสมการ (13) โดยที่ ξ และ η เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน นั่นคือ

$$\xi = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$$

$$\eta = \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$$

ให้ $\bar{u}(\xi,\eta) = U(\alpha,\beta)$

ดังนั้น

$$\bar{u}_\xi = U_\alpha\alpha_\xi + U_\beta\beta_\xi = \frac{1}{2}(U_\alpha - iU_\beta)$$

$$\bar{u}_\eta = U_\alpha\alpha_\eta + U_\beta\beta_\eta = \frac{1}{2}(U_\alpha + iU_\beta)$$

$$\bar{u}_{\xi\eta} = \frac{1}{2}[U_{\alpha\alpha}\alpha_\eta + U_{\alpha\beta}\beta_\eta - iU_{\alpha\beta}\alpha_\eta - iU_{\beta\beta}\beta_\eta]$$

$$= \frac{1}{4}(U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta})$$

แทนค่าอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ในสมการ (13) จะได้รูปแบบมาตรฐานคือ

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = H^*(\alpha,\beta,U,U_\alpha,U_\beta) \qquad .....(18)$$

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงลดรูปสมการต่อไปนี้ให้เป็นแบบมาตรฐาน พร้อมทั้งหาผลเฉลยด้วย

$$x^2(y-1)u_{xx} - x(y^2-1)u_{xy} + y(y-1)u_{yy} + xyu_x - u_y = 0$$

<u>**วิธีทำ**</u> ในที่นี้ $a = x^2(y-1)$

$$b = -x(y^2-1)$$

$$c = y(y-1)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= x^2(y^2-1)^2 - 4x^2(y-1)y(y-1) \\ &= x^2(y-1)^2(y+1)^2 - 4x^2y(y-1)^2 \\ &= x^2(y-1)^2\{(y+1)^2 - 4y\} \\ &= x^2(y-1)^2(y-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นเป็นสมการเชิงไฮเพอร์โบลา

จากสมการ (11) และ (12)

$$\begin{aligned} y' &= (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \\ &= (-x(y^2-1) \pm x(y-1)^2)/2x^2(y-1) \\ &= \{-xy^2 + x \pm x(y^2 - 2y + 1)\}/2x^2(y-1) \\ &= \{-xy^2 + x \pm (xy^2 - 2xy + x\}/2x^2(y-1)\} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$y' = \frac{-xy^2+x+x+^2-2xy+x}{2x^2(y-1)} \quad \text{และ} \quad y' = \frac{-xy^2+x-xy^2+2xy-x}{2x^2(y-1)}$$

$$y' = \frac{-2x(y-1)}{2x^2(Y-1)} \quad \text{และ} \quad y' = \frac{-2xy(y-1)}{2x^2(y-1)}$$

$$y' = -\frac{1}{x} \quad \text{และ} \quad y' = -\frac{y}{x}$$

ซึ่งผลเฉลยของสมการทั้งสองคือ

$$xe^y = c_1 \quad \text{และ} \quad xy = c_2$$

เพราะฉะนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้

$$\phi = xe^y \quad \text{และ} \quad \phi = xy$$

จากสมการ (5) จะพบว่า

$$u_x = \bar{u}_\xi \phi_x + \bar{u}_\eta \phi_x$$

$$= e^y \bar{u}_\xi + y\bar{u}_\eta$$

$$u_Y = \bar{u}_\xi \phi_y + \bar{u}_\eta \phi_y$$

$$= xe^y \bar{u}_\xi + x\bar{u}_\eta$$

$$u_{xx} = e^{2y}\bar{u}_{\xi\xi} + 2ye^y\bar{u}_{\xi\eta} + y^2\bar{u}_{\eta\eta}$$

$$u_{YY} = x^2 e^{2y}\bar{u}_{\xi\xi} + 2x^2 e^y \bar{u}_{\xi\eta} + x^2 \bar{u}_{\eta\eta} + xe^y\bar{u}_\xi$$

$$u_{xy} = xe^{2y}\bar{u}_{\xi\xi} + (xe^y + xye^y)\bar{u}_{\xi\eta} + xy\bar{u}_{\eta\eta} + e^y\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta$$

แทนค่าอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ในสมการโจทย์ จะได้

$$x^2(y-1)(e^{2y}\bar{u}_{\xi\xi} + 2ye^y\bar{u}_{\xi\eta} + y^2\bar{u}_{\eta\eta}) - x(y^2-1)(xe^{2y}\bar{u}_{\xi\xi}$$

$$+ (xe^y + xye^y)\bar{u}_{\xi\eta} + xy\bar{u}_{\eta\eta} + e^y\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta)$$

$$+ y(y-1)(x^2e^{2y}\bar{u}_{\xi\xi} + 2x^2e^y\bar{u}_{\xi\eta} + x^2\bar{u}_{\eta\eta} + xe^y\bar{u}_{\xi}$$

$$+ xy(e^y\bar{u}_{\xi} + y\bar{u}_{\eta}) - (xe^y\bar{u}_{\xi} + x\bar{u}_{\eta}) = 0$$

นั่นคือ

$$\bar{u}_{\xi\eta} = 0$$

ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้โดยอินทิเกรต

$$\bar{u} = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

ฉะนั้น

$$u(x,y) = f_1(xe^y) + f_2(xy)$$

โดยที่ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงลดรูปสมการต่อไปนี้ให้เป็นแบบมาตรฐาน พร้อมทั้งหาผลเฉลยด้วย

$$y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = \frac{y^2}{x}u_x + \frac{x^2}{y}u_y$$

วิธีทำ ในที่นี้ $a = y^2$, $b = -2xy$, $c = x^2$

$$d = -\frac{y^2}{x} \;,\; e = -\frac{x^2}{y}$$

พิจารณา $b^2 - 4ac = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$

ดังนั้นเป็นสมการเชิงพาราโบลา

จากสมการ (11) และ (12)

$$y' = b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\,)/2a$$

$$= -2xy/2y^2$$

$$= -\frac{x}{y}$$

ซึ่งผลเฉลยคือ $x^2 + y^2 = c$

เปลี่ยนตัวแปรให้

$$\phi = x^2 + y^2 \text{ และ } \psi = x$$

จะทำให้ได้สมการ (6) ซึ่ง ส.ป.ส. เป็นไปตามสมการ (7) คือ

$$A = a\phi_x^2 + b\phi_x\phi_y + c\phi_Y^2$$
$$= y^2(2x)^2 - 2xy(2x)(2y) + x^2(2y)^2$$
$$= 8x^2y^2 - 8x^2y^2$$
$$= 0$$
$$B = 2a\phi_x\phi_x + b(\phi_x\phi_y + \phi_x\phi_y) + 2c\phi_y\phi_y$$
$$= 2y^2(2x) - 2xy(2x(0) + 2y)$$
$$= 0$$
$$C = a\phi_x^2 + b\phi_x O_y + c\phi_Y^2$$
$$= y^2$$
$$D = a\phi_{XX} + b\phi_{xy} + c\phi_{YY} + d\phi_x + e\phi_Y$$
$$= 2y^2 + 0 + 2x^2 - \frac{y^2}{x}(2x) - \frac{x^2}{y}(2y)$$
$$= 0$$
$$E = a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y$$
$$= -\frac{y^2}{x}$$

ดังนั้นจะได้สมการมาตรฐานเป็น

$$y^2\bar{u}_{\eta\eta} - \frac{y^2}{x}\bar{u}_\eta = 0$$

หรือ $\bar{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{x}\bar{u}_\eta = 0$

แต่ $\eta = \phi = x$

$$\bar{u}_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\bar{u}_\eta = 0$$

ให้ $\bar{u}_\eta = w$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta} w = 0$$

หรือ $\frac{\partial w}{w} - \frac{\partial \eta}{\eta} = 0$

อินทิเกรต $\ln w = \ln \eta + \ln f_1(\xi)$

$$w = \eta f_1(\xi)$$

แทน $w = \bar{u}_\eta$

$$\bar{u}_\eta = \eta f_1(\xi)$$

อินทิเกรตเทียบกับ η

$$\bar{u} = \frac{\eta^2}{2} f_1(\xi) + f_2(\xi)$$

นั่นคือ $u(x,y) = \frac{x^2}{2} f_1(x^2 + y^2) + f_2(x^2 + y^2)$

ตัวอย่างที่ 3 จงลดรูปสมการให้เป็นแบบมาตรฐาน จาก

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $a = 1,\ b = 0,\ c = x^2$

พิจารณา $b^2 - 4ac = -4x^2 < 0$

ซึ่งเป็นสมการเชิงวงรี

จากสมการ (11) และ (12)

$$y' = (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

$$= \pm ix$$

นั่นคือ $y' = ix$ และ $y' = -ix$

ผลเฉลยคือ $2y - ix^2 = c_1$ และ $2y + ix^2 = c_2$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $\xi = 2y - ix^2,\ \eta = 2y + ix^2$

เพื่อให้ได้ตัวแปรจริง ให้

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = 2Y$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -x^2$$

ดังนั้น $u_x = \bar{u}_\alpha \alpha_x + \bar{u}_\beta \beta_x$

$$= -2x\bar{u}_\beta$$

$$u_{xx} = (-2xu_\beta)_\alpha \alpha_x + (-2xu_\beta)_\beta \beta_x$$

$$= (-2xu_{\beta\beta} - \frac{2}{-2x}\bar{u}_\beta)(-2x)$$

$$= 4x^2\bar{u}_{\beta\beta} - 2\bar{u}_\beta$$

$$u_Y = \bar{u}_\alpha \alpha_y + \bar{u}_B \beta_Y$$

$$= 2\bar{u}_\alpha$$

$$u_{YY} = (2\bar{u}_\alpha)_\alpha \alpha_y + (2\bar{u}_\alpha)_\beta \beta_y$$

$$= 4\bar{u}_{\alpha\alpha}$$

แทนค่าอนุพันธ์เหล่านี้ในสมการโจทย์ จะได้

$$4x^2\bar{u}_{\beta\beta} - 2\bar{u}_\beta + 4x^2\bar{u}_{\alpha\alpha} = 0$$

หรือ

$$\bar{u}_{\alpha\alpha} + \bar{u}_{\beta\beta} = \frac{1}{2x^2}\bar{u}_\beta$$

$$\bar{u}_{\alpha\alpha} + \bar{u}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\beta}\bar{u}_\beta$$

แบบฝึกหัดที่ 4.2

1. จงลดรูปสมการต่อไปนี้ ให้เป็นแบบมาตรฐาน

   1.1 $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$

   1.2 $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$

   1.3 $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \sin x$

   1.4 $u_{xy} + 2u_{yy} + 9u_x + u_y = 2$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

   2.1 $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^x$

   2.2 $(y-1)u_{xx} - (y^2-1)u_{xy} + y(y-1)u_{yy} + u_x - u_y = 2ye^{2x}(1-y)^3$

   2.3 $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$

   2.4 $xu_{yy} - c^2xu_{xx} - 2c^2u_x = 0$, c เป็นค่าคงตัว

คำตอบ

1. 1.1 $\xi = x + y\ ,\ \eta = y\ ;\ u_{\eta\eta} = -\frac{3}{2}u$

   1.2 $\left.\begin{array}{l}\xi = y - x + i\sqrt{2}\,x \\ \eta = y - x - i\sqrt{2}\,x\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\alpha = y - x \\ \beta = \sqrt{2}\,x\end{array}$

   $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2}u_{\alpha} - 2\sqrt{2}\,u_{\beta} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}e^{\beta/2}$

   1.3 ξ [illegible] η [illegible] $y - 4x$

   $u_{\xi\eta} = \frac{7}{9}(u_{\xi} \cdot u_{\eta}) - \frac{1}{9}\sin[(\xi - \eta)/3]$

   1.4 $\xi = x,\ \eta = x - y/2$

   $u_{\xi\eta} = 18u_{\xi} + 17u_{\eta} - 4$

2. 2.1 $u(x,y) = \frac{1}{4}e^{Y} + \eta f_1(y + 2x) + f_2(y + 2x)$

   2.2 $u(x,y) = f_1(x + y) + f_2(ye^{x}) + y^2(x + y)e^{2x}$

   2.3 $u(x,y) = f_1(y/x) + f_2(y/x)e^{-y}$

   2.4 $u(x,y) = \frac{1}{x}f_1(x + cy) + \frac{1}{x}f_2(x - cy)$

4.3 การแยกตัวแปร

แม้ว่าเราจะสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ แต่ในปัญหาทางฟิสิกส์ จะต้องแก้สมการตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งการแก้สมการที่กล่าวมาบางครั้งไม่สามารถจะใช้ได้ เช่น จากสมการลาปลาซ

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

เราทราบวิธีหาผลเฉลยในบทที่ 3 แล้วว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u = \phi_1(x + iy) - \phi_2(x - iy)$$

แต่ถ้าต้องการกำหนดฟังก์ชันตามใจชอบ ϕ_1 และ ϕ_2 ตามเงื่อนไขของสมการ

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(x,b) = 0$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(a,y) = 0$$

ซึ่งเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า คงเป็นเรื่องยากที่จะทำได้ ด้วยเหตุนี้วิธีกำหนดผลเฉลยในรูปผลคูณของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระจึงถูกนำมาใช้ ซึ่งเรียกว่าวิธีแยกตัวแปร ถึงแม้ว่าจะเป็นผลเฉลยที่มีความทั่วไปน้อยกว่า

เนื่องจากสมการเชิงเส้นอันดับสองแบบเอกพันธ์ ที่ ส.ป.ส. เป็นตัวแปร ในรูป

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$$

เราสามารถแปลงเป็นรูปแบบมาตรฐาน

$$Au_{\xi\xi} + Cy_{\eta\eta} + Du_{\xi} + Eu_{\eta} + Fu = 0$$

ซึ่ง เมื่อ

$A = -C$ เป็นสมการเชิงไฮเพอร์โบลา

$A = 0$ หรือ $C = 0$ เป็นสมการเชิงพาราโบลา

$A = C$ เป็นสมการเชิงวงรี

ดังนั้นเราจึงพิจารณาสมการที่ ส.ป.ส. เป็นตัวแปรในรูป

$$a(x,y)u_{xx} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_Y + f(x,y)u = 0 \quad \ldots(1)$$

สมมติให้ผลเฉลยสมการนี้คือ

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \ldots(2)$$

หาอนุพันธ์ย่อย

$$u_x = X'Y, \quad u_{xx} = X''Y$$
$$u_y = XY', \quad u_{yy} = XY''$$

เมื่อ $X' = \frac{dX}{dx}$, $Y' = \frac{dY}{dy}$

แทนในสมการ (1) จะได้

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0 \qquad .....(3)$$

สมมติว่ามีฟังก์ชัน $p(x,y)$ ซึ่งนำไปหารตลอดสมการ (3) แล้วได้

$$a_1(x)X''Y + b_1(y)XY'' + a_2(x)X'Y + b_2(y)XY' + (a_3(x) + b_3(y))XY = 0$$

หารตลอดด้วย XY จะได้

$$[a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3] = -[b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3] \qquad .....(4)$$

ซึ่งซ้ายมือของสมการข้างต้นเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ขณะที่ขวามือเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ดังนั้นหาอนุพันธ์สมการ (4) เทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx} [a_1 \frac{X''}{ii\cdots} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3] = 0$$

อินทิเกรตเทียบกับ X จะได้

$$a_1 \frac{X''}{X} + a_1 \frac{X'}{X} + a_3 = \lambda \qquad .....(5)$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว และจากสมการ (4) จะได้

$$b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 = -\lambda \qquad .....(6)$$

เขียนสมการ(5)และ (6) ใหม่ เป็น

$$a_1X'' - a_2X' + (a_3 - \lambda)X = 0 \qquad . . ...(7)$$

และ

$$b_1Y'' + b_2Y' - (b_3 - \lambda)Y = 0 \qquad . . ...(8)$$

ดังนั้น ถ้าเราสามารถแก้สมการ (7) และ (8) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ จะทำให้ได้ $u(x,y)$ (เนื่องจาก $u = XY$)

สำหรับกรณีที่สมการเชิงเส้นอันดับสองมี ส.ป.ส. เป็นค่าคงตัวเราไม่จำเป็นต้องแปลงเป็นรูปแบบมาตรฐาน

จากสมการ

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0 \qquad \ldots(9)$$

ซึ่งมี ส.ป.ส. เป็นค่าคงตัว

ให้ $u(x,y) = X(x)Y(y)$

แทนในสมการ (9) จะได้

$$aX''Y + bX'Y' + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0$$

หารตลอดด้วย aXY จะได้

$$\frac{X''}{X} + \frac{b}{a}\frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y} + \frac{c}{a}\frac{Y''}{Y} + \frac{d}{a}\frac{X'}{X} + \frac{e}{a}\frac{Y'}{Y} + \frac{f}{a} = 0 \;;\; a \neq 0 \qquad \ldots(10)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x จะพบว่า

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \frac{b}{a}\left(\frac{X'}{X}\right)'\frac{Y'}{Y} + \frac{d}{a}\left(\frac{X'}{X}\right)' = 0$$

หรือ

$$\frac{(X''/X)'}{(b/a)(X'/X)'} + \frac{d}{b} = -\frac{Y'}{Y} \qquad \ldots(11)$$

ซึ่งสมการนี้อยู่ในรูปแยกตัวแปร ดังนั้นต่างเท่ากับค่าคงตัว λ นั่นคือ

$$Y' + \lambda Y = 0 \qquad \ldots(12)$$

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \left(\frac{d}{b} - \lambda\right)\frac{b}{a}\left(\frac{X'}{X}\right)' = 0 \qquad \ldots(13)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x

$$\frac{X''}{X} + \left(\frac{d}{b} - \lambda\right)\frac{b}{a}\left(\frac{X'}{X}\right) = \beta \qquad \ldots(14)$$

โดย β เป็นค่าคงตัวที่ต้องกำหนด

แทนค่าสมการ (12) ในสมการ (10) จะได้

$$X'' + \left(\frac{d}{b} - \lambda\right)\frac{b}{a}X' + \left(\lambda^2 - \frac{e}{c}\lambda + \frac{f}{c}\right)\frac{c}{a}X = 0 \qquad \ldots(15)$$

เปรียบเทียบสมการ (14) และ (15) จะพบว่า

$$\beta = (\lambda^2 - \frac{e}{c}\lambda + \frac{f}{c})\frac{c}{a}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลย $u(x, y)$ ของสมการ (9) คือผลคูณของ $X(x)$ และ $Y(y)$ ที่สอดคล้องสมการ (15) และ (12) ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยของสมการ โดยวิธีแยกตัวแปร

$$u_t = 4u_{xx} \qquad \text{.....(16)}$$

วิธีทำ สมมติให้ผลเฉลยคือ

$$u(x,y) = X(x)T(t)$$

แทนในสมการ (16) จะได้

$$XT' = 4X''T$$

หารตลอดด้วย 4XT จะได้รูปแบบแยกตัวแปร

$$\frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = \lambda \qquad \text{.....(17)}$$

จากสมการ (17) ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการคือ

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad \text{.....(18)}$$

และ

$$T' - 4\lambda T = 0 \qquad \text{.....(19)}$$

กรณีที่ 1 $\lambda > 0$

ให้ $\lambda = \alpha^2$

จากสมการ (18) และ (19) จะได้

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

$$T' - 4\alpha^2 T = 0$$

นั่นคือ $X = A_1e^{\alpha x} + A_2e^{-\alpha x}$

$$T = A_3e^{4\alpha^2 t}$$

ดังนั้น

$$u(x,y) = e^{4\alpha t}\,[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}] \qquad \text{.....(20)}$$

โดยที่ $c_1 = A_1A_3$ และ $c_2 = A_2A_3$

กรณีที่ 2 $\lambda = 0$

จากสมการ (18) และ (19) จะได้

$$X'' = 0$$

$$T' = 0$$

นั่นคือ $X = A_1X + A_2$

$$T = A_3$$

$$u(x,y) = c_1X + c_2 \qquad \text{.....(21)}$$

กรณีที่ 3 $\lambda < 0$

ให้ $\lambda = -\alpha^2$ จะได้

$$X'' + \alpha^2X = 0$$

$$T' + 4\alpha^2T = 0$$

นั่นคือ

$$X = A_1\cos\alpha x + A_2\sin\alpha x$$

$$T = A_3e^{-4\alpha^2 t}$$

ดังนั้น

$$u(x,y) = e^{-4\alpha^2 t}\,[c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x] \qquad \text{.....(22)}$$

ซึ่งผลเฉลยตามสมการ (20),(21),(22) ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (16) ขึ้นกับค่าคงตัว λ ในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ จะกำหนดเงื่อนไขให้ ดังนั้นการเลือก λ จึงจะได้ผลเฉลยที่ต้องการ

แบบฝึกหัดที่ 4.3

จงตรวจสอบสมการต่อไปนี้ว่าสามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีแยกตัวแปรได้หรือไม่ ถ้าได้ให้หาผลเฉลยด้วย

1. $u_{xy} - u = 0$

2. $u_{tt} - u_{xx} = 0$

3. $u_{xx} - u_{yy} - 2u_y = 0$

4. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x - 2u_y + u = 0$

5. $t^2u_{tt} - x^2u_{xx} = 0$

6. $(t^2 + x^2)u_{tt} - u_{xx} = 0$

7. $u_{xx} - y^2u_{yy} - yu_y = 0$

a. $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} = 2x$

9. $u_{xx} - u_{yy} - u_y = 0$

10. $u_t = u_{xx}$

คำตอบ

1. $u = ce^{\lambda x + y/\lambda}$

2. $u = (c_1\cos \alpha t + c_2\sin\alpha t)(c_3\cos \alpha x + c_4\sin \alpha x)$

3. $u = e^{-y}(c_1\cos \alpha x + c_2\sin \alpha x)(c_3\cos \sqrt{\alpha^2 - 1}\, y + c_4\sqrt{\alpha^2 - 1}\, y$

4. $u = e^{-(x+y)}(c_1\cos \sqrt{\alpha^2 - 1}\, x + c_2 \sin \sqrt{\alpha^2 - 1}\, x)$

   $(c_3\cos \sqrt{2 - \alpha^2}\, y + c_4 \sin \sqrt{2 - \alpha^2}\, y)$

5. $u = (tx)^{1/2} [c_1(tx)^{\sqrt{1-4\alpha^2}/2} + c_2(t/x)^{\sqrt{1-4\alpha^2}/2} +$

   $+ c_3(x/t)^{\sqrt{1-4\alpha^2}/2} + c_4(t/x)^{-\sqrt{1-4\alpha^2}/2}]$

6. แยกตัวแปรไม่ได้

7. $u = (c_1\text{cox } \alpha x + c_2\sin \alpha x)[c_3\cos \alpha(\ln y) + c_4\sin(\ln y)]$

8. แยกตัวแปรไม่ได้

9. $u = e^{-y/2} [c_1\cos \alpha x + c_2\sin \alpha x][c_3\cos \left(\frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2}\, y\right)$

   $\sin \left(\frac{\sqrt{4\alpha^2 - 1}}{2}\, y\right)$

10. $u = e^{-\alpha^2 t} (c_1\cos \alpha x + c_2\sin \alpha x)$

เวลาพัก

จงจัดตัวเลขทั้งเก้าตัวคือ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 เรียงตามลำดับจากซ้ายไปขวา ทำให้เป็นจำนวนต่าง ๆ แล้วใส่เครื่องหมายบวกหรือลบคั่น เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 100 เช่น

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$