บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง

ในบทนี้จะศึกษาการแก้สมการอันดับหนึ่งที่เป็นเชิงเส้น โดยเริ่มจากรูปแบบที่ง่ายก่อนคือเมื่อสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว จากนั้นจะศึกษา ส.ป.ส. เป็นตัวแปร และสุดท้ายจะเป็นเรื่องของสมการกึ่งเชิงเส้น แต่ก่อนอื่นขอให้พิจารณาสมการต่อไปนี้ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระ

$$u_x(x,y) = 2xy$$

จะพบว่าเราสามารถหาผลเฉลยได้ทันที โดยการอินทิเกรตเทียบกับ x และให้ y ตรึงซึ่งจะได้

$$u(x,y) = x^2y + f(y) ,$$

โดย f(y) เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

หรือถ้า u เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปรอิสระ

$$u_x(x,y,z) = 2xy$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบกับ x จะได้

$$u(x,y,z) = x^2y + f(y,z)$$

2.1 สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

จากรูปแบบสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$au_x + bu_y + cu = g(x,y) , \; u = u(x,y) \qquad .....(1)$$

เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 1 ถ้า b = 0

จากสมการ (1) จะได้รูปแบบเป็น

$$au_x + cu = g(x,y) \qquad .....(2)$$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการได้โดยใช้วิธีการของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยถือว่า y ตรึง จากสมการ (2) จะได้

$$u_x + \frac{c}{a} u = \frac{1}{a} g(x,y)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบอินทิเกรตเป็น $e^{cx/a}$ ดังนั้น

$$e^{cx/a}[u_x + \frac{c}{a} u] = \frac{1}{a} g(x,y)e^{cx/a}$$

หรือ $$\frac{\partial}{\partial x} [e^{cx/a} u] = \frac{1}{a} g(x,y)e^{cx/a}$$

อินทิเกรตเทียบกับ x แล้วคูณตลอดด้วย $e^{-cx/a}$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ

$$u(x,y) = e^{-cx/a} [\frac{1}{a} \int g(x,y)e^{-cx/a} dx + f(y)] \qquad .....(3)$$

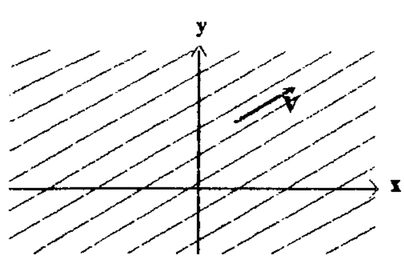
เมื่อ $f(y)$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบของ y

กรณีที่ 2 ถ้า $b \neq 0$

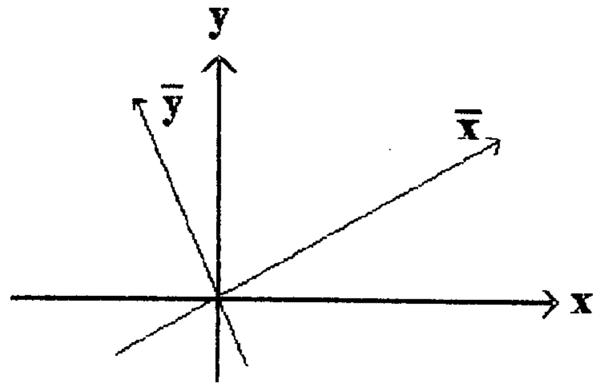
จากสมการ (1) จะได้รูปแบบเป็น

$$au_x + bu_y + cu = g(x,y) \qquad .....(4)$$

เนื่องจาก $au_x + bu_y$ คืออนุพันธ์ระบุทิศทางของ u ในทิศเวกเตอร์ $\vec{V} = (a,b) = a\hat{i} + b\hat{j}$ (หรือ $au_x + bu_y$ ก็คือผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{V}$ กับเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน u, $\vec{\nabla}u = u_x\hat{i} + u_y\hat{j}$) ถ้าเราเปลี่ยนแกนใหม่เป็น $(\bar{x}, \bar{y})$ โดยให้แกนใหม่แกนหนึ่ง $(\bar{y})$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V}$ แล้ว $au_x + bu_y$ จะเป็นสัดส่วนกับอนุพันธ์ย่อยของ u เทียบกับแกนใหม่ (นั่นคือ $u_{\bar{x}}$)



รูปที่ 1



รูปที่ 2

ซึ่งการทำเช่นนี้ จะทำให้เปลี่ยนสมการ (4) มาเป็นรูปแบบเดียวกับสมการ (2) การเปลี่ยนแกนใหม่แกนหนึ่งที่ว่า ($\bar{y}$) ได้จากกวงศ์ของเส้นตรง $bx - ay = \alpha$ (ค่าคงตัว) ซึ่งขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V}$ ส่วนอีกแกนหนึ่ง ($\bar{x}$) เราเลือกได้ตามสะดวกโดยที่จาโคเบียนไม่เป็นศูนย์ $\left(J = \left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} \right| \neq 0\right)$

นั่นคือให้

$$\bar{x} = ax + by \ , \ \bar{y} = bx - ay \qquad \ldots\ldots(5)$$

ซึ่งสามารถแปลงผกผันได้เป็น

$$x = \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{a^2 + b^2} \ , \ y = \frac{b\bar{x} - a\bar{y}}{a^2 + b^2} \qquad \ldots\ldots(6)$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y) = u\left(\dfrac{a\bar{x} + b\bar{y}}{a^2 + b^2}, \dfrac{b\bar{x} - a\bar{y}}{a^2 + b^2} \right)$

จากกฎลูกโซ่

$$u_x = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} = a\bar{u}_{\bar{x}} + b\bar{u}_{\bar{y}}$$

และ $u_y = \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial y} + \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\dfrac{\partial\bar{y}}{\partial y} = b\bar{u}_{\bar{x}} - a\bar{u}_{\bar{y}}$

ดังนั้น $au_x + bu_y = a(a\bar{u}_{\bar{x}} + b\bar{u}_{\bar{y}}) + b(b\bar{u}_{\bar{x}} - a\bar{u}_{\bar{y}})$

$$= (a^2 + b^2)\bar{u}_{\bar{x}} \ , \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

แทนในสมการ (4) จะได้

$$(a^2 + b^2)\bar{u}_{\bar{x}} + c\bar{u} = g\left(\frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{a^2 + b^2}, \frac{b\bar{x} - a\bar{y}}{a^2 + b^2} \right) \qquad .....(7)$$

ซึ่งสมการ (7) นี้ ก็คือรูปแบบสมการ (2) นั่นเอง

เราสามารถแก้สมการได้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y})$ จากนั้นแทนค่า $\bar{x},\bar{y}$ จากสมการ (5) จะได้ $u(x,y)$

สมการเส้นตรง $bx - ay = \alpha$ ซึ่งขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V} = a\hat{i} + b\hat{j}$ (นั่นคือมีความชันเท่ากับ b/a) เรียกว่า <u>เส้นตรงลักษณะเฉพาะของสมการ (4)</u>

ฉะนั้น สมการเชิงเส้นที่มี ส.ป.ส. เป็นค่าคงตัว จะกลายเป็นสมการที่ง่ายขึ้น เมื่อเปลี่ยนระบบพิกัดใหม่ให้มีเส้นตรงลักษณะเฉพาะเป็นแกนใหม่แกนหนึ่ง การกำหนดแกนใหม่ตามสมการ (5) อาจจะกำหนดให้ง่ายเป็น

$$\bar{x} = x , \bar{y} = bx - ay \qquad .....(8)$$

ซึ่ง $J \neq 0$ และจะได้

$$x = \bar{x} , y = \frac{b\bar{x} - \bar{y}}{a} \qquad .....(9)$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y) = u(\bar{x}, \frac{b\bar{x} - \bar{y}}{a})$

ใช้กฎลูกโซ่

$$au_x + bu_y = a\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} \right) + b\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial y} \right)$$

$$= a(\bar{u}_{\bar{x}} + b\bar{u}_{\bar{y}}) + b(0 - a\bar{u}_{\bar{y}})$$

แทนในสมการ (4) จะได้

$$a\bar{u}_{\bar{x}} + ab\bar{u}_{\bar{y}} - ab\bar{u}_{\bar{y}} + c\bar{u} = g(\bar{x}, \frac{b\bar{x} - \bar{y}}{a})$$

หรือ $$a\bar{u}_{\bar{x}} + c\bar{u} = g(\bar{x}, \frac{b\bar{x} - \bar{y}}{a}) \qquad .....(10)$$

ซึ่งสามารถแก้สมการ (10) ได้ เช่นเดียวกับสมการ (2)

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$3u_x - 2u_y + u = x , u = u(x,y) \qquad .....(11)$$

วิธีทำ สมการเส้นตรงลักษณะเฉพาะมีความชัน $-2/3$

วงศ์ของเส้นตรงดังกล่าวคือ $-2x - 3y = \alpha$

ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้

$$\bar{x} = 3x - 2y \;,\; \bar{y} = -2x - 3y \qquad \text{.....(12)}$$

ซึ่งทำให้

$$x = \frac{3\bar{x} - 2\bar{y}}{13} \;,\; y = \frac{-2\bar{x} - 3\bar{y}}{12} \qquad \text{.....(13)}$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 3u_x - 2u_y &= 3(3\bar{u}_{\bar{x}} - 2\bar{u}_{\bar{y}}) - 2(-2\bar{u}_{\bar{x}} - 3\bar{u}_{\bar{y}}) \\ &= (3^2 + (-2)^2)\bar{u}_{\bar{x}} \\ &= 13\bar{u}_{\bar{x}} \end{aligned}$$

แทนในสมการ (11)

$$13\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{u} = \frac{3\bar{x} - 2\bar{y}}{13}$$

หรือ $$\bar{u}_{\bar{x}} + \frac{1}{13}\bar{u} = \frac{3\bar{x} - 2\bar{y}}{169}$$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\exp\left(\int \frac{1}{13}\, d\bar{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{13}\bar{x}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{\bar{x}/13}\bar{u}] = \frac{1}{169} e^{\bar{x}/3}(3\bar{x} - 2\bar{y})$$

อินทิเกรตเทียบกับ $\bar{x}$ จะได้

$$\begin{aligned} e^{\bar{x}/13}\bar{u} &= \frac{3}{169}\int \bar{x}e^{\bar{x}/13}d\bar{x} - \frac{2}{169}\bar{y}\int e^{\bar{x}/13}d\bar{x} \\ &= \frac{3}{169}[13\bar{x}e^{\bar{x}/13} - 13\int e^{\bar{x}/13}\, d\bar{x}] - \frac{2}{13}\bar{y}e^{\bar{x}/13} \\ &= \frac{3}{13}\bar{x}e^{\bar{x}/13} - 3e^{\bar{x}/13} - \frac{2}{13}\bar{y}e^{\bar{x}/13} + f(\bar{y}) \end{aligned}$$

หรือ

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{3}{13}\bar{x} - 3 - \frac{2}{13}\bar{y} + e^{-\bar{x}/13} f(\bar{y})$$

แทนค่า $\bar{x},\bar{y}$ จากสมการ (12) จะได้ผลเฉลยทั่วไป

$$u(x,y) = \frac{3}{13}(3x-2y) - 3 - \frac{2}{13}(-2x-3y) + \exp(-(3x-2y)/13)f(-2x-3y)$$

$$= \frac{9}{13}x - \frac{6}{13}y - 3 + \frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y + \exp(-(3x-2y)/13)f(-2x-3y)$$

$$= x - 3 + \exp(-(3x-2y)/13)f(-2x-3y) \qquad \text{.....(14)}$$

เราอาจจะเปลี่ยนแกนใหม่ตามสมการ (8) ได้ดังนี้

$$\bar{x} = x \;,\; \bar{y} = -2x - 3y \qquad \text{.....(15)}$$

ซึ่ง $J \neq 0$ และจะได้

$$x = \bar{x} \;,\; y = \frac{-2\bar{x} - \bar{y}}{-3} = \frac{2\bar{x} + \bar{y}}{3} \qquad \text{.....(16)}$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$ ดังนั้น

$$3u_x - 2u_y = 3(\bar{u}_{\bar{x}} - 2\bar{u}_{\bar{y}}) - 2(0 - 3\bar{u}_{\bar{y}})$$
$$= 3\bar{u}_{\bar{x}}$$

แทนในสมการ (11)

$$3\bar{u}_{\bar{x}} + u = \bar{x}$$

หรือ $\bar{u}_{\bar{x}} + \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}\bar{x}$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $e^{\int \frac{1}{3} d\bar{x}} = e^{\bar{x}/3}$

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{\bar{x}/3}\bar{u}] = \frac{1}{3}\bar{x}e^{\bar{x}/3}$$

อินทิเกรตเทียบกับ $\bar{x}$ จะได้

$$e^{\bar{x}/3}\bar{u} = \frac{1}{3}\int \bar{x}e^{\bar{x}/3}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{1}{3}[\,3\bar{x}e^{\bar{x}/3} - 9e^{\bar{x}/3}\,] + f(\bar{y})$$

$$= \bar{x}e^{\bar{x}/3} - 3e^{\bar{x}/3} + f(\bar{y})$$

หรือ $$\bar{u} = \bar{x} - 3 + e^{-\bar{x}/3} f(\bar{y})$$

แทนค่า $\bar{x},\bar{y}$ จากสมการ (15) จะได้ผลเฉลยทั่วไป

$$u(x,y) = x - 3 + e^{-x/3} f(-2x - 3y) \qquad .....(17)$$

ซึ่งผลเฉลยตามสมการ (14) และ (17) จะสมมูลกัน เพราะว่า

$$\begin{aligned} e^{(-3x + 2y)/13} &= e^{-x/3}.e^{x/3}.e^{(-3x+2y)/13} \\ &= e^{-x/3} e^{(13x-9x+6y)/13} \\ &= e^{-x/3} e^{(4x+6y)/13} \\ &= e^{-x/3} e^{-2(-2x-3y)} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (14)

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x - 3 + e^{-x/3} e^{-2(-2x-3y)} f(-2x - 3y) \\ &= x - 3 + e^{-x/3} F(-2x - 3y) \end{aligned}$$

โดยที่ $F(-2x - 3y)$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบของ $-2x - 3y$

ในการหาผลเฉลยเฉพาะ (นั่นคือ หาฟังก์ชันตามใจชอบ) จะต้องกำหนดเงื่อนไขให้โดยที่เงื่อนไขที่เหมาะสมก็คือกำหนดค่า $u(x,y)$ ณ จุด (x,y) ซึ่งอยู่บนเส้นตรงเส้นหนึ่ง ในรูป

$$u(x, mx + c) = f(x) \qquad .....(18)$$

เมื่อ m เป็นความชันของเส้นตรง และ c เป็นระยะตัดบนแกน y ของเส้นตรง กรณีที่เส้นตรงนี้ขนานกับแกน y (ความชันเป็นอนันต์) เงื่อนไข (18) จะแทนด้วย

$$u(x_1,y) = f(y)$$

เมื่อ x_1 เป็นระยะตัดบนแกน x ของเส้นตรง ตัวอย่างต่อไปนี้จะพบว่าเงื่อนไขดังกล่าวจะทำให้ได้ฟังก์ชันตามใจชอบฟังก์ชันเดียวแต่มีข้อยกเว้นในกรณีที่เส้นตรงนั้นเป็นเส้นตรงเดียวกับเส้นตรงลักษณะเฉพาะซึ่งจะพบใน ตัวอย่างที่ 5

__ตัวอย่างที่ 2__ จงแก้สมการที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนด

$$u_x - u_y + 2u = 1 \ , \ u(x,0) = x^2 \qquad .....(19)$$

__วิธีทำ__ เงื่อนไขที่กำหนดในที่นี้เป็นการกำหนดค่าของ u ที่จุดต่าง ๆ บนแกน x ก่อนอื่นหาผลเฉลยทั่ว ๆ ของสมการ (19)

เส้นตรงลักษณะเฉพาะของสมการคือ $-x - y = \alpha$ และมีความชันเป็น -1

ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปร

$$\bar{x} = x \ , \ \bar{y} = -x - y$$

โดยที่ $x = \bar{x} \ , \ y = -\bar{x} - \bar{y}$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$

จากสมการ (19) จะได้ว่า

$$\bar{u}_{\bar{x}} + 2\bar{u} = 1$$

แก้สมการข้างต้น

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}[e^{2\bar{x}}\,\bar{u}] = e^{2\bar{x}}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2} + e^{-2\bar{x}} f(\bar{y})$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{-2x} f(-x - y) \qquad .....(20)$$

จากเงื่อนไข $u(x,0) = x^2$ แทนในสมการ (20)

$$x^2 = \frac{1}{2} + e^{-2x} f(-x)$$

$$f(-x) = (x^2 - \frac{1}{2})e^{2x}$$

หรือ $f(x) = (x^2 - \frac{1}{2})e^{-2x}$

กำหนดฟังก์ชัน f ในรูปของ $-x - y$

$$f(-x - y) = [(x + y)^2 - \frac{1}{2}]\, e^{2x+2y}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ คือ

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{2y}[(x + y)^2 - \frac{1}{2}]$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3**</u> จงแก้สมการ $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$ .....(21)
ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $u(x,4x + 2) = 0$

วิธีทำ เงื่อนไขในที่นี้คือ u เป็นศูนย์บนเส้นตรง $y = 4x + 2$

แต่เส้นตรงลักษณะเฉพาะคือ $2x - y = \alpha$ ดังนั้นเปลี่ยนตัวแปรให้

$$\bar{x} = x + y \quad , \quad \bar{y} = 2x - y$$

เราเลือกให้ $\bar{x} = x + y$ เนื่องจากจะทำให้ $e^{x+y} = e^{\bar{x}}$ จะได้ง่ายในการแก้สมการ

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$

$$u_x + 2u_y = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + 2\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + 2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)$$

$$= 3\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}$$

แทนในสมการ (21)

$$3\bar{u}_{\bar{x}} - 4\bar{u} = e^{\bar{x}}$$

ซึ่งแก้สมการแล้วจะได้

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = -e^{\bar{x}} + e^{4\bar{x}/3} f(\bar{y})$$

หรือ

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4(x+y)/3} f(2x - y) \qquad .....(22)$$

แต่ $4(x + y)/3 = -4(2x - y)/3 + 4x$

ดังนั้นจากสมการ (22) จะได้

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}[e^{-4(2x-y)/3} f(2x - y)]$$

หรือ

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x} F(2x - y) \qquad .....(23)$$

จากเงื่อนไข $u(x, 4x + 2) = 0$

$$0 = -e^{5x+2} + e^{4x} F(-2x - 2)$$

$$F(-2x - 2) = \frac{e^{5x+2}}{e^{4x}} = e^{x+2}$$

เพื่อที่จะหาฟังก์ชัน F, ให้ $r = 2x - 2$ หรือ $x = -(r + 2)/2$

ทำให้

$$F(r) = e^{-(r+2)/2+2}$$
$$= e^{(-r+2)/2}$$

ฉะนั้น $F(2x - y) = e^{(-2x+y+2)/2}$

จากสมการ (23) จะได้ผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x} \cdot e^{(-2x+y+2)/2}$$
$$= -e^{x+y} + e^{3x+y/2+1}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $u(x, 2x - 1) = 0$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3 เราได้ผลเฉลยทั่วไปตามสมการ (23) คือ

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x} F(2x - y)$$

และเงื่อนไขกำหนดบนเส้นตรงลักษณะเฉพาะ $y = 2x - 1$

ดังนั้น

$$0 = u(x,2x - 1) = -e^{3x-1} + e^{4x} F(1)$$

หรือ

$$F(1) = e^{-x-1}$$

ซึ่ง $F(1)$ เป็นค่าคงตัวในขณะที่ e^{-x-1} ไม่ใช่ค่าคงตัวแต่เป็นฟังก์ชันของ x เพราะฉะนั้นเงื่อนไข $u(x,2x - 1) = 0$ ไม่สามารถถูกพบได้ ปัญหานี้จึงไม่มีผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $u(x,2x) = -e^{3x} + e^{4x}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3 ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x} F(2x - y)$$

และเงื่อนไขกำหนดบนเส้นตรงลักษณะเฉพาะ $y = 2x$ ดังนั้น

$$-e^{3x} + e^{4x} = u(x,2x) = -e^{3x} + e^{4x} F(0)$$

กรณีนี้ เงื่อนไขสามารถถูกพบได้ โดย $F(0) = 1$ ซึ่งมีฟังก์ชัน F ได้มากมาย (ถึงอนันต์) ซึ่ง $F(0) = 1$ เช่น

$F(r) = r + 1$

$F(r) = \cos r$

$F(r) = e^{r}$

.

.

.

ทำให้ได้ผลเฉลยมากมาย คือ

$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}(2x - y + 1)$

$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}\cos(2x - y)$

$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}e^{2x-y}$

.

.

.

<u>**ตัวอย่างที่ 6**</u> จงแก้สมการ $u_x - u_y + u = 0$ .....(24)

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $u(x,x^3) = e^{-x}(x + x^3)$

<u>**วิธีทำ**</u> ในที่นี้ เป็นการกำหนดว่า u บนเส้นโค้ง $y = x^3$ ซึ่งเส้นโค้งนี้จะตัดกับเส้นตรงลักษณะเฉพาะ $-x - y = \alpha$

เปลี่ยนตัวแปรให้

$\bar{x} = x, \ \bar{y} = -x - y$

ดังนั้น $x = \bar{x}, \ y = -\bar{x} - \bar{y}$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$

$$u_x - u_y = (\bar{u}_{\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}}) - (0 - \bar{u}_{\bar{y}})$$
$$= \bar{u}_{\bar{x}}$$

จากสมการ (24) จะเปลี่ยนเป็น

$\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{u} = 0$

แก้สมการได้

$\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y})e^{-\bar{x}}$

ทำให้ได้ผลเฉลยทั่วไป

$$u(x,y) = f(-x - y)e^{-x}$$

จากเงื่อนไข $u(x,x^3) = e^{-x}(x + x^3)$ จะได้

$$e^{-x}(x + x^3) = u(x,x^3) = f(-x - x^3)e^{-x}$$

ซึ่ง $f(-x - x^3) = x + x^3$

นั่นคือ $f(r) = -r$

ฉะนั้น $f(-x - y) = x + y$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการคือ

$$u(x,y) = (x + y)e^{-x}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้
   กำหนดให้ $u = u(x,y)$ ในข้อ 1.1 - 1.4

   1.1 $2u_x - 3u_y = x$

   1.2 $u_x + u_y - u = 0$

   1.3 $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$

   1.4 $3u_x - 4u_y = x + e^x$

   1.5 $v_z + 3v_w = 9w^2$, $v = v(w,z)$

   1.6 $g_t - cg_x = 0$, $g = g(x,t)$ และ c เป็นค่าคงตัว

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 $u(x,0) = \sin(x^2)$

   2.2 $u(0,y) = y^2$

   2.3 $u(x,-x) = x$

3. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย $u_x + u_y - u = 0$ ซึ่งมีเงื่อนไข
   $u(x,x) = \tan x$ ไม่สามารถหาผลเฉลยได้

คำตอบ

1. 1.1 $u(x,y) = f(3x + 2y) + \frac{1}{4}x^2$

   1.3 $u(x,y) = -e^{x+y} + e^{2y} f(2x - y)$

   1.5 $v(w,z) = w^3 + f(3z - w)$

2. 2.1 $u(x,y) = -e^{x+y} + [e^{x-y/2} + \sin(x - y/2)^2]e^{2y}$

   2.3 $u(x,y) = -e^{x+y} + [\frac{2}{3}(x - y/2) + 1]e^{4(x-y/2)/3}\ e^{2y}$

2.2 สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

สำหรับสองตัวแปรอิสระ $u = u(x,y)$ รูปสมการคือ

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y) \qquad .....(1)$$

โดยที่ a, b, c และ g เป็นฟังก์ชันของ x และ y

เนื่องจาก $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ เป็นอนุพันธ์ระบุทิศทางของ u ที่จุด (x,y) ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{V}(x,y) = a(x,y)\hat{i} + b(x,y)\hat{j}$ ในหัวข้อที่แล้ว a และ b เป็นค่าคงตัว ทำให้เวกเตอร์ $\vec{V}$ มีทิศทางและขนาดแน่นอน แต่ในครั้งนี้เวกเตอร์ $\vec{V}(x,y)$ จะแปรเปลี่ยนไปตามจุด (x,y) ที่เปลี่ยนไป ดังนั้น $\vec{V}(x,y)$ จึงเป็นสนามเวกเตอร์ในระนาบ เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น เราอาจจะคิดว่า $\vec{V}(x,y)$ เป็นความเร็วในการไหลของของไหลในระนาบ กรณี a และ b เป็นค่าคงตัว สายกระแสของของไหลจะเป็นเส้นตรงที่มีความชัน b/a (เวกเตอร์สัมผัสขนานกับ $\vec{V} = a\hat{i} + b\hat{j}$) ซึ่งเส้นตรงเหล่านั้นเป็นเส้นลักษณะเฉพาะ แต่กรณีนี้ a และ b ไม่ใช่ค่าคงตัว สายกระแสจึงเป็นเส้นโค้ง และเรียกสายกระแสนี้ว่า **<u>เส้นโค้งลักษณะเฉพาะ</u>** ดังนั้นถ้าให้ $y(x)$ เป็นกราฟของเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ (สมมติว่า $a(x,y) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \qquad .....(2)$$

เราเรียกสมการ (2) ว่า สมการลักษณะเฉพาะของสมการ (1) สมมติให้ $h(x,y) = \alpha$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) เมื่อ α เป็นค่าคงตัวเช่นเดียวกับที่ทำมาแล้วในหัวข้อ 2.1 เราอาจจะเปลี่ยนตัวแปรให้

$$\bar{x} = x \;,\; \bar{y} = h(x,y) \qquad .....(3)$$

ก็จะทำให้ได้อนุพันธ์ระบุทิศทาง เป็นสัดส่วนกับอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรใหม่ซึ่งการเลือก $\bar{x} = x$ ก็ไม่จำเป็น เราอาจเลือกเป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x และ y ได้โดยที่ $J \neq 0$

<u>ข้อสังเกต</u> กรณี a และ b เป็นค่าคงตัว จากสมการ (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}x + \alpha$$

หรือ $bx - ay = \alpha$

ซึ่งเป็นเส้นตรงลักษณะเฉพาะนั่นเอง

กำหนดให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$

$$au_x + bu_y = a\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\right)$$

$$= \left(a\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} + b\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \left(a\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + b\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} \quad .....(3)$$

แต่ $a\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} + b\frac{\partial\bar{y}}{\partial y} = 0$ ซึ่งเราสามารถแสดงได้ดังนี้

เพราะว่า $h(x,y(x))$ = ค่าคงตัว ดังนั้น

$$0 = \frac{dh}{dx} = h_x + h_y\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{y}}{\partial y}\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

หรือ $$a\frac{\partial\bar{y}}{\partial x} + b\frac{\partial\bar{y}}{\partial y} = 0$$

จากสมการ (3) จะได้ว่า

$$au_x + bu_y = \left(a\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} + b\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}$$

$$= a\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} \quad .....(4)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$-yu_x + xu_y = 0 \quad .....(5)$$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปร

$$y\,dy = -x\,dx$$

อินทิเกรต

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\alpha$$

หรือ $x^2 + y^2 = \alpha$

ดังนั้นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะคือ $x^2 + y^2 + \alpha$ ซึ่งเป็นสมการวงกลม เมื่อ $\alpha < 0$ และเป็นจุด $(0,0)$ เมื่อ $\alpha = 0$ เปลี่ยนตัวแปรให้

$$\bar{x} = x \ , \ \bar{y} = x^2 + y^2$$

ซึ่งแปลงผกผันได้

$$x = \bar{x} \ , \ y = \pm(\bar{y} - \bar{x}^2)^{1/2}$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = u(x,y)$ จะได้

$$au_x + bu_y = a\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}$$

ดังนั้นสมการ (5) จะกลายเป็น

$$-y\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} = 0$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} = 0$$

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y})$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = f(x^2 + y^2) \qquad \text{......(6)}$$

<u>เส้นโค้งลักษณะเฉพาะในรูปตัวแปรเสริม</u>

ถ้าเราพิจารณาให้อนุภาคหนึ่งเคลื่อนไปตามเส้นโค้งลักษณะเฉพาะซึ่งความเร็วของอนุภาคคือ $\vec{V}(x,y) = a(x,y)\hat{i} + b(x,y)\hat{j}$ นั่นคือเสมือนกับว่าเคลื่อนไปตามการไหลของของไหลด้วยความเร็ว $\vec{V}(x,y)$ ดังนั้นตำแหน่งของอนุภาคนี้ $(x(t),y(t))$ ณ เวลา t ใด ๆ จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t),y(t)) \ , \ \frac{dy}{dt} = b(x(t),y(t)) \qquad \text{.....(7)}$$

โดยที่เวกเตอร์ความเร็วของอนุภาค $x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j}$ จะสัมผัสกับทางเดินของการเคลื่อนที่อนุภาคนั่นเอง

เราเรียกระบบสมการ (7) นี้ว่าระบบสมการของเส้นโค้งลักษณะเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (1) ซึ่ง $x(t)$ และ $y(t)$ ที่ได้จากระบบสมการ (7) นี้เรียกว่าสมการเส้นโค้งลักษณะเฉพาะในรูปตัวแปรเสริม

จากตัวอย่างที่ 1 เขียนในรูปของระบบสมการ (7) ได้คือ

$$x'(t) = -y(t) \quad , \quad y'(t) = x(t)$$

โดยใช้เทคนิคการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ นั่นคือหาอนุพันธ์สมการแรก แล้วใช้สมการที่สองช่วย จะพบว่า

$$x''(t) = -y'(t) = x(t)$$

หรือ

$$x''(t) + x(t) = 0$$

สามารถแก้สมการได้

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ดังนั้น

$$y(t) = -x'(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

ถ้าเลือก $c_1 = a$ และ $c_2 = 0$ จะได้

$$x = a \cos t \ , \ y = a \sin t$$

ซึ่งเส้นโค้งลักษณะเฉพาะเป็นวงกลม นั่นเอง

สมมติให้ $x(t), y(t)$ เป็นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะในรูปตัวแปรเสริมของสมการ

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y) \qquad \ldots\ldots(8)$$

และกำหนดให้

$$U(t) = u(x(t),y(t))$$

$$C(t) = c(x(t),y(t))$$

$$G(t) = g(x(t),y(t))$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U'(t) &= u_x(x(t),y(t))x'(t) + u_y(x(t),y(t))y'(t) \\ &= u_x(x(t),y(t))a(x(t),y(t)) + u_y(x(t),y(t))b(x(t),y(t)) \\ &= -c(x(t),y(t))u(x(t),y(t)) + g(x(t),y(t)) \\ &= -C(t)U(t) + G(t) \end{aligned}$$

นั่นคือ $U(t) = u(x(t),y(t))$ สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์

$$U'(t) + C(t)U(t) = G(t) \qquad \ldots\ldots(9)$$

ให้ $\mu(t) = \exp\left[\int_0^t C(t)dt\right]$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตของสมการ (9)

เราจะได้ผลเฉลยสมการ (9) คือ

$$U(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_0^t \mu(t)G(t)dt + U(0)\right] \qquad .....(10)$$

โดยที่ $\mu(t)$ ขึ้นอยู่กับ $c(x,y)$ และ $G(t)$ ขึ้นอยู่กับ $g(x,y)$

จากตัวอย่างที่ 1 $c(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (9)

$$U'(t) = 0$$

$$U(t) = \text{ค่าคงตัวตามใจชอบ}$$

นั่นคือบนเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ $U(t) = u(x(t),y(t))$ จะมีค่าคงตัว ซึ่งค่าคงตัวนี้จะเป็นเท่าไร ขึ้นกับเส้นโค้งลักษณะเฉพาะแต่ละเส้น เช่นสำหรับผลเฉลยเฉพาะในรูป $u = (x^2 + y^2)^3$ พิจารณาเส้นโค้งลักษณะเฉพาะที่เป็นวงกลม

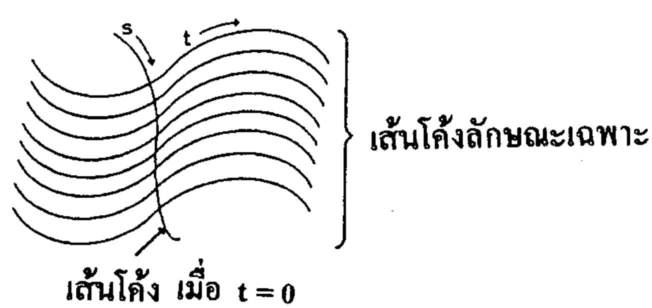
$$x = a\cos t,\ y = a\sin t$$

ถ้ารัศมี (ค่า a) เป็น 1 $u = (x^2 + y^2)^3$ มีค่าคงตัวเป็น 1

แต่ถ้ารัศมี (ค่า a) เป็น 2 $u = (x^2 + y^2)^3$ มีค่าคงตัวเป็น 64

ผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริม

เราทราบมาแล้วว่าเป็นการง่ายที่จะคิดว่าเส้นโค้งลักษณะเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (8) เสมือนกับการเดินของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามการไหลของของไหลด้วยความเร็ว $\vec{V}(x,y) = a(x,y)\hat{i} + b(x,y)\hat{j}$ กำหนดตำแหน่งของอนุภาค $(x(t),y(t))$ เริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$ ถ้าเงื่อนไขที่กำหนดให้อยู่บนเส้นโค้งที่ตัดกับเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ แล้วเป็นการสะดวกที่จะให้จุดเริ่มต้นของอนุภาคบนเส้นโค้งลักษณะเฉพาะเส้นหนึ่งเป็นจุดตัดดังกล่าว



รูปที่ 3

ให้ s เป็นตัวแปรตำแหน่งของเส้นโค้งของเงื่อนไขที่กำหนด ดังนั้น $(X(s,t),Y(s,t))$ เป็นตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t ที่สมนัยกับ s โดยที่ $X(s,t)$ และ $Y(s,t)$ สอดคล้องระบบสมการเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ

$$\frac{d}{dt} X(s,t) = a(X(s,t),Y(s,t)), \ \frac{d}{dt} Y(s,t) = b(X(s,t),Y(s,t)) \quad .....(11)$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น $X(s,0)$ และ $Y(s,0)$ สำหรับแต่ละค่า s ที่จริง

สมมติว่าค่าของ u ที่อยู่บนเส้นโค้งของเงื่อนไขที่กำหนดคือ

$$u(X(s,0),Y(s,0)) = F(s) \quad .....(12)$$

กำหนดให้

$$U(s,t) = u(X(s,t),Y(s,t))$$

$$C(s,t) = c(X(s,t),Y(s,t))$$

$$G(s,t) = y(X(s,t),Y(s,t))$$

และ

$$\mu(s,t) = \exp\left[\int_0^t C(s,t)dt\right]$$

ใช้ผลที่ได้จากสมการ (10) สำหรับแต่ละค่า s

$$U(s,t) = \frac{1}{\mu(s,t)} \left[\int_0^t \mu(s,t)G(s,t)dt + F(s)\right] \quad .....(13)$$

เราทราบว่า $U(s,t)$ เป็นค่าของ u ที่จุด $(X(s,t),Y(s,t))$ ดังนั้นเมื่อ s และ t แปรเปลี่ยน จุด (x,y,u) ในปริภูมิ xyu จะกำหนดโดย

$$x = X(s,t)\ ,\ y = Y(s,t)\ ,\ u = U(s,t) \quad .....(14)$$

ซึ่งจะทำให้เกิดพื้นผิวของผลเฉลย u ที่สอดคล้องเงื่อนไขตามสมการ (12) โดยสมการ (14) จะประกอบกันเป็นผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมของสมการ (8)

ถึงแม้ว่าสมการ (14) จะไม่ได้ให้ผลเฉลยในรูป $u(x,y)$ โดยตรงแต่อาจเป็นไปได้ที่เราสามารถแก้สมการ $x = X(s,t)$ และ $y = Y(s,t)$ เพื่อหา s และ t ในพจน์ของ x และ y ได้เป็น $s = S(x,y),\ t = T(x,y)$ ดังนั้น
$u(x,y) = U(S(x,y),T(x,y))$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่เคยหามา

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมของปัญหา

$$-yu_x + xu_y = 0 \ , \ u(s,s^2) = s^3 \ (s > 0) \qquad .....(15)$$

วิธีทำ จากสมการ (11) จะได้เส้นโค้งลักษณะเฉพาะ $(X(s,t),Y(s,t))$ โดยการแก้ระบบสมการ

$$\frac{d}{dt} X(s,t) = -Y(s,t) \ , \ \frac{d}{dt} Y(s,t) = X(s,t)$$

พร้อมเงื่อนไขเริ่มต้น

$$X(s,0) = s \ , \ Y(s,0) = s^2$$

เราสามารถใช้เทคนิคการแก้ระบบสมการ เช่นเดียวกับที่ทำมาแล้วในเรื่องของเส้นโค้งลักษณะเฉพาะในรูปตัวแปรเสริม นั่นคือ

$$X(s,t) = c_1(s)\cos t + c_2(s)\sin(t)$$

$$Y(s,t) = c_1(s)\sin t - c_2(s)\cos t$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$c_1(s) = s \ \text{ และ } \ c_2(s) = -s^2$$

ในที่นี้ $c(x,y) = 0$ และ $g(x,y) = 0$

ทำให้ $\mu(s,t) = \exp[\int_0^t C(s,t)dt] = 1$

และ $G(s,t) = g(X(s,t),Y(s,t)) = 0$

เพราะฉะนั้น จากสมการ (13)

$$U(s,t) = F(s)$$

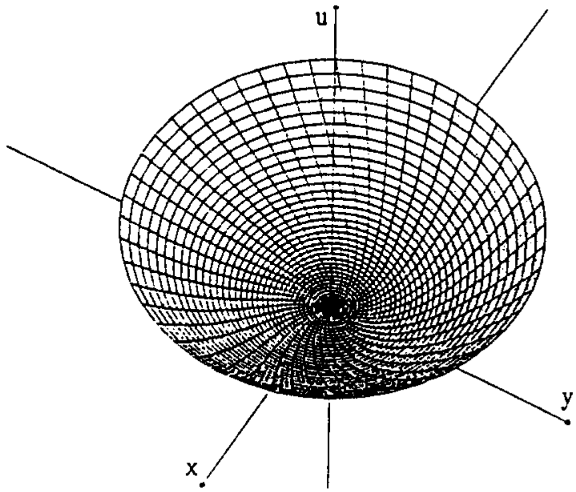
จากเงื่อนไขที่กำหนด $u(s,s^2) = s^3$ และจากสมการ (12) จะพบว่า $F(s) = s^3$ ดังนั้นผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมคือ

$$X(s,t) = s\cos t - s^2\sin t$$

$$Y(s,t) = s\sin t + s^2\cos t$$

$$U(s,t) = s^3$$

เมื่อ $t = 0$ และ $s(s > 0)$ แปรเปลี่ยน เราจะได้จุด (s,s^2,s^3) ในปริภูมิ xyu ซึ่งได้เส้นโค้งรูปบิด และเมื่อ t แปรเปลี่ยนจุดบนเส้นโค้งรูปบิดนี้จะเคลื่อนไปเป็นวงกลมรอบแกน u ดังรูป



รูปที่ 4

เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (15) ในรูป $u(x,y)$ ได้ดังนี้
จากตัวอย่างที่ 1 เราทราบว่า ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,y) = f(x^2 + y^2)$$

ใช้เงื่อนไข $u(s,s^2) = s^3$ จะได้

$$f(s^2 + s^4) = s^3$$

ให้ $r^2 = s^2 + s^4$ ซึ่งจะได้ $s^2 = (-1 + \sqrt{1 + 4r^2})/2$
ดังนั้น $f(r^2) = s^3$

$$= (-1 + \sqrt{1 + 4r^2})^{3/2}/2^{3/2}$$

นั่นคือ

$$u(x,y) = [-1 + \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}]^{3/2}/\sqrt{8}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงแก้สมการ $(y + x)u_x + (y - x)u_y = u$
โดยที่ $u(\cos s, \sin s) = 1$ เมื่อ $0 \le s \le 2\pi$

<u>วิธีทำ</u> เงื่อนไขกำหนดว่า u มีค่าเป็น 1 บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$
จากสมการ (11) ระบบสมการเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ คือ

$$\frac{d}{dt} X(s,t) = X(s,t) + Y(s,t)$$

$$\frac{d}{dt} Y(s,t) = -X(s,t) + Y(s,t)$$

โดยเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดโดย

$$X(s,0) = \cos s\ ,\ Y(s,0) = \sin s \qquad .....(16)$$

ซึ่งสามารถแก้ระบบสมการรนี้ได้ โดยการหาอนุพันธ์สมการแรกเทียบกับ t และใช้สมการที่สองช่วย

$$\begin{aligned} X'' &= X' + Y' \\ &= X' + (-X + Y) \\ &= X' + (-X + X' - X) \end{aligned}$$

หรือ $X'' - 2X' + 2X = 0$

สมการช่วยคือ $m^2 - 2m + 2 = 0$

$$m = 1 \pm i$$

ดังนั้น $X(s,t) = e^t (c_1(s)\cos t + c_2(s)\sin t)$

และจาก $Y = X' - X$ ทำให้

$$Y(s,t) = e^t (-c_1(s)\sin t + c_2(s)\cos t)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นตามสมการ (16) จะพบว่า

$$c_1(s) = \cos s\ ,\ c_2(s) = \sin s$$

เพราะฉะนั้น

$$X(s,t) = e^t (\cos s \cos t + \sin s \sin t) = e^t \cos(s-t)$$

และ $Y(s,t) = e^t (-\cos s \sin t + \sin s \cos t) = e^t \sin(s-t)$

เนื่องจาก $U(s,t) = u(X(s,t),Y(s,t))$ สอดคล้องสมการ (9)

นั่นคือ $\frac{d}{dt} U(s,t) = U(s,t)$ และจากสมการ (13) จะได้

$$U(s,t) = \frac{1}{\mu(s,t)} \left[\int_0^t \mu(s,t) G(s,t) dt + F(s) \right]$$

ในที่นี้ $\mu(s,t) = e^{-t}$

$G(s,t) = 0$

$F(s) = u(X(s,0),Y(s,0)) = 1$

ทำให้ $U(s,t) = e^{t}$

ดังนั้น ผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมคือ

$$x = e^{t}\cos(s - t), y = e^{t}\sin(s - t), u = e^{t}$$

และเนื่องจาก $x^2 + y^2 = e^{2t} = u^2$ เราจึงเขียนผลเฉลยในรูปชัดแจ้งได้

ง่าย ๆ คือ $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

   1.1 $xu_x + 2yu_y = 0$; $x > 0$, $y > 0$

   1.2 $xu_x - 2yu_y + u = e^x$; $x > 0$

   1.3 $xu_x - xyu_y - u = 0$

   1.4 $yu_x - 4xu_y = 2xy$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการในข้อ 1. ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ตามลำดับ

   2.1 $u(x,1/x) = x$, $x > 0$

   2.2 $u(1,y) = y^2$

   2.3 $u(x,x) = x^2e^x$

   2.4 $u(x,0) = x^4$

3. จงหาผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมของสมการในข้อ 1. ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ตามลำดับ

   3.1 $u(s,e^{-s}) = \sin s$, $s > 0$

   3.2 $u(s, \sinh s) = 0$, $s > 0$

   3.3 $u(s^2,s) = s^3$

   3.4 $u(s,s^3) = 1$

คำตอบ

1. 1.1 $u(x,y) = f(x^2/y)$

   1.3 $u(x,y) = xf(ye^x)$

2. 2.1 $u(x,y) = [x^2y]^{1/3}$, $y > 0$

   2.3 $u(x,y) = xye^x$

3. 3.1 $X(s,t) = se^t$

   $Y(s,t) = e^{2t-s}$

   $U(s,t) = \sin s$

   3.3 $X(s,t) = s^2e^t$

   $Y(s,t) = s\exp[s^2(1 - e^t)]$

   $U(s,t) = s^3e^t$

2.3 สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรอิสระและสมการกึ่งเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรอิสระ

ที่กล่าวมาแล้วเป็นสมการเชิงเส้นสำหรับ 2 ตัวแปรอิสระ x และ y ในที่นี้จะพิจารณาถึงสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งสำหรับ 3 ตัวแปรอิสระ x,y และ z นั่นคือ $u = u(x,y,z)$ ซึ่งรูปสมการทั่วไป คือ

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = g(x,y,z) \quad \ldots\ldots(1)$$

โดยที่ a,b,c,d M a:: g เป็นฟังก์ชันใด ๆ ดังนั้นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ $(x(t), y(t), z(t))$ ในรูปตัวแปรเสริม คือผลเฉลยของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{dy}{dt} = b(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{dz}{dt} = c(x(t),y(t),z(t)) \quad \ldots\ldots(2)$$

เป็นการสะดวกที่จะเขียนในรูปตัวแปรเสริม x แทนที่จะเป็น t ซึ่งจะลดลงเหลือสองสมการ (สมมติ $a(x,y,z) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))} \quad \text{และ} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))} \quad \ldots\ldots(3)$$

ผลเฉลยของสมการ (3) จะขึ้นกับค่าคงตัวตามใจชอบ 2 ตัว ให้เป็น α และ β และอยู่ในรูป $y(x;\alpha,\beta)$ และ $z(x;\alpha,\beta)$ เส้นโค้งที่เกิดจากจุด $(x,y(x;\alpha,\beta),z(x;\alpha,\beta))$ เมื่อ x แปรเปลี่ยน จะเป็นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะสำหรับแต่ละ α และ β ที่ตรึง

สมมติว่าเราสามารถแก้สมการสองสมการจาก

$$y = y(x;\alpha,\beta) \quad \text{และ} \quad z = z(x;\alpha,\beta) \quad \ldots\ldots(4)$$

พร้อมกันได้ $\alpha = A(x,y,z)$ และ $\beta = B(x,y,z)$ เส้นโค้งลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับแต่ละคู่ของ (α,β) คือ เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของสองระนาบ $A(x,y,z) = \alpha$ และ $B(x,y,z) = \beta$

โดยเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้

$$\bar{x} = x,\ \bar{y} = A(x,y,z),\ \bar{z} = B(x,y,z) \quad \ldots\ldots(5)$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = u(x,y,z)$

$$\begin{aligned} au_x + bu_y + cu_z &= a(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_x + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_x + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_x) + b(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_y + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_y + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_y) \\ &\quad + c(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_z + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_z + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_z) \end{aligned}$$

$$= a(\bar{u}_{\bar{x}} + A_x\bar{u}_{\bar{y}} + B_x\bar{u}_{\bar{z}}) + b(0 + A_y\bar{u}_{\bar{y}} + B_y\bar{u}_{\bar{z}})$$
$$+ c(0 + A_z\bar{u}_{\bar{y}} + B_z\bar{u}_{\bar{z}})$$
$$= (aA_x + bA_y + cA_z)\bar{u}_{\bar{y}} + (aB_x + bB_y + cB_z)\bar{u}_{\bar{z}} + a\bar{u}_{\bar{x}}$$

ให้ (x_0,y_0,z_0) เป็นจุด ๆ หนึ่ง และให้ $(x,y(x),z(x))$ เป็นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะที่ผ่านจุดนี้ (นั่นคือ $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$) เนื่องจาก A มีค่าคงตัวบนเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ ฉะนั้น

$$0 = \frac{d}{dx}A(x,y,z) = A_x + A_y\frac{dy}{dx} + A_z\frac{dz}{dx} = A_x + A_y\frac{b}{a} + A_z\frac{c}{a}$$

$$= \frac{1}{a}(aA_x + bA_y + cA_z)$$

ดังนั้น $aA_x + bA_y + cA_z = 0$ ณ จุด (x_0,y_0,z_0) ใด ๆ

ทำนองเดียวกัน $aB_x + bB_y + cB_z = 0$

ทำให้ได้ $au_x + bu_y + cu_z = a\bar{u}_{\bar{x}}$ ......(6)

จะพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (1) จะกลายเป็นสมการ

$$\bar{a}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{d}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\bar{u} = \bar{g}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \quad .....(7)$$

ซึ่งสามารถแก้สมการหาผลเฉลยได้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ และจากการแปลงผกผันของการแปลงตามสมการ (5) (ถ้ามี) เราจะได้

$$u(x,y,z) = \bar{u}(x,A,B)$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้ เมื่อ $u = u(x,y,z)$

$$2u_x + 3u_y + 5u_z - u = 0 \quad .....(8)$$

วิธีทำ หาเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ จากระบบสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5}{2}$$

จะได้ $y = \frac{3}{2}x + \frac{\alpha}{2}$, $z = \frac{5}{2}x + \frac{\beta}{2}$

ดังนั้นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะคือเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว (ในที่นี้คือระนาบ)

$2y - 3x = \alpha$ และ $2z - 5x = \beta$ เราเปลี่ยนตัวแปร

$$\bar{x} = x \ , \ \bar{y} = 2y - 3x \ , \ \bar{z} = 2z - 5x$$

ซึ่งหาการแปลงผกผันได้

$$x = \bar{x} \ , \ y = 3\bar{x}/2 + \bar{y}/2 \ , \ z = 5\bar{x}/2 + \bar{z}/2$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = u(x,y,z)$ จะได้

$$2u_x + 3u_y + 5u_z = 2\bar{u}_{\bar{x}}$$

สมการ (8) จึงกลายเป็น

$$2\bar{u}_{\bar{x}} - \bar{u} = 0$$

ซึ่งผลเฉลยคือ

$$\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = f(\bar{y},\bar{z})e^{\bar{x}/2}$$

โดย $f(\bar{y},\bar{z})$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบของ $\bar{y}$ และ $\bar{z}$ และผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8) คือ

$$u(x,y,z) = f(2y - 3x, 2z - 5x)e^{x/2} \qquad .....(9)$$

<u>**ข้อสังเกต**</u> ฟังก์ชัน f สามารถกำหนดได้จากเงื่อนไขที่กำหนด เช่น

$$u(x,y,0) = x^2 \sin y$$

จากสมการ (9) ทำให้ได้

$$f(2y - 3x, -5x)e^{x/2} = u(x,y,0) = x^2 \sin y$$

หรือ $$f(2y - 3x, -5x) = e^{-x/2}x^2 \sin y \qquad .....(10)$$

ให้ $r = 2y - 3x$, $s = -5x$ จะได้ $x = -s/5$ และ $y = (r - 3s/5)/2$

จากสมการ (10) จะได้

$$f(r,s) = e^{s/10}(-s/5)^2 \sin(r/2 - 3s/10)$$

ทำให้

$$\begin{aligned} f(2y - 3x, 2z - 5x) &= e^{(2z-5x)/10} [(5x - 2x)/5]^2 \sin \\ &\qquad [(2y - 3x)/2 - 3(2z - 5x)/10]e^{x/2} \\ &= e^{z/5}(x - 2z/5)^2 \sin(y - 3z/5) \end{aligned}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$u_x + zu_y + 6xu_z = 0 \ ; \ u = u(x,y,z)$$

วิธีทำ เส้นโค้งลักษณะเฉพาะ หาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$\frac{dy}{dx} = z \, , \quad \frac{dz}{dx} = 6x$$

ซึ่งสมการแรกไม่สามารถอินทิเกรตเพื่อให้ได้ y เพราะว่า z เป็นฟังก์ชันของ x แต่สมการที่สองสามารถอินทิเกรตได้ $z = 3x^2 + \alpha$ จากนั้นนำไปช่วยหา y โดยแทนค่า z ในสมการแรก แล้วอินทิเกรตจะได้ $y = x^3 + \alpha x + \beta$ ดังนั้น เส้นโค้งลักษณะเฉพาะเกิดจากจุด $(x, x^3 + 2x + \beta, 3x^2 + \alpha)$ เมื่อ x แปรเปลี่ยน เราสามารถแก้สมการหา α และ β ได้คือ $\alpha = z - 3x^2$, $\beta = y - x^3 - (z - 3x^2)x = y + 2x^3 - xz$ และเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $z - 3x^2 = \alpha$ กับ $y + 2x^3 - xz = \beta$ จะเป็นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ โดยเปลี่ยนตัวแปร

$$\bar{x} = x, \; \bar{y} = z - 3x^2 \; , \; \bar{z} = y + 2x^3 - xz$$

ซึ่งการแปลงผกผันคือ

$$x = \bar{x}, \; y = \bar{z} - 2\bar{x}^3 - \bar{x}\,\bar{y} - 3\bar{x}^3 \qquad z = \bar{y} + 3\bar{x}^2$$

ให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = u(x,y,z)$

$$\begin{aligned} u_x + 2u_y + 6xu_z &= \bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_x + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_x + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_x + z(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_y + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_y + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_y) \\ &\quad + 6x(\bar{u}_{\bar{x}}\bar{x}_z + \bar{u}_{\bar{y}}\bar{y}_z + \bar{u}_{\bar{z}}\bar{z}_z) \\ &= \bar{u}_{\bar{x}} - 6x\bar{u}_{\bar{y}} + (6x^2 - z)\bar{u}_{\bar{z}} + z(0 + 0 + \bar{u}_{\bar{z}}) \\ &\quad + 6x(0 + \bar{u}_{\bar{y}} - x\bar{u}_{\bar{z}}) \\ &= \bar{u}_{\bar{x}} - 6x\bar{u}_{\bar{y}} + 6x^2\bar{u}_{\bar{z}} - z\bar{u}_{\bar{z}} + z\bar{u}_{\bar{z}} + 6x\bar{u}_{\bar{y}} - 6x^2\bar{u}_{\bar{z}} \\ &= \bar{u}_{\bar{x}} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมการ (11) จะได้

$$\bar{u}_{\bar{x}}$$

นั่นคือ $\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = f(y,z)$

หรือ $u(x,y,z) = f(z - 3x^2, \; y + 2x^3 - xz)$

เป็นผลเฉลยทั่วไปที่ต้องการ

สมการกึ่งเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เรียกว่า สมการกึ่งเชิงเส้นนั้น มีรูปสมการคือ

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - c(x,y,u) = 0 \; ; \; u = u(x,y) \qquad .....(12)$$

เมื่อ a,b และ c เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร

จะสังเกตเห็นว่า ถ้า a และ b ไม่ขึ้นกับ u และ $c(x,y,u) = C(x,y)u + g(x,y)$ แล้ว สมการ(12) จะกลายเป็นสมการเชิงเส้น $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u=g(x,y)$ แสดงว่าสมการเชิงเส้น เป็นกรณีเฉพาะของสมการกึ่งเชิงเส้น

ในปี ค.ศ. 1779 โชเซฟ ลากรองจ์ (Joseph Lagrange) ได้แสดงว่า ผลเฉลยของสมการ (12) สามารถเขียนในรูปไม่เด่นชัด $\phi(x,y,u) = 0$ โดยที่ $\phi(x,y,z)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นกรณีสามตัวแปรอิสระ

$$a(x,y,z)\phi_x + b(x,y,z)\phi_y + c(x,y,z)\phi_z = 0 \qquad .....(13)$$

ซึ่งสมการ (13) นี้เป็นกรณีเฉพาะของสมการ (1) นั่นเอง

สมมติว่า $u(x,y)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (12) ถ้าเราให้ $\phi(x,y,z) = u(x,y) - z$ (นั่นคือ $z = u(x,y)$ แล้วสำหรับจุดใด ๆ $(x,y,z) = (x,y,u(x,y))$ บนกราฟของ u

$$a(x,y,u(x,y))u_x + b(x,y,u(x,y))u_y + c(x,y,u(x,y))(-1) = 0$$

หรือ $$a(x,y,z)\phi_x + b(x,y,z)\phi_y + c(x,y,z)\phi_z = 0$$

โดยกลับกัน

สมมติว่า $\phi(x,y,z) = 0$ เป็นพื้นผิวที่เป็นผลเฉลยของสมการ (13) ซึ่งเวกเตอร์ปกติ $\nabla\phi$ (คือ $\phi_x\hat{i} + \phi_y\hat{j} + \phi_z\hat{k}$) ไม่อยู่ในแนวระดับ ณ บางจุด $p = (x_0,y_0,z_0)$ นั่นคือ $\phi_2(p) \neq 0$ ดังนั้นพื้นผิวจะเป็นกราฟของบางฟังก์ชัน $u(x,y)$ [นั่นคือ $\phi(x,y,u(x,y)) = 0$] เราสามารถแสดงได้ว่า $u(x,y)$ เป็นผลเฉลยสมการ (12) ดังนี้ หาอนุพันธ์สมการ $\phi(x,y,u(x,y)) = 0$ เทียบกับ x และ y จะได้

$$\phi_x(x,y,u(x,y)) + \phi_z(x,y,u(x,y))u_x(x,y) = 0$$

และ $$\phi_y(x,y,u(x,y)) + \phi_z(x,y,u(x,y))u_y(x,y) = 0$$

หรือ $$u_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z} \quad \text{และ} \quad u_y = -\frac{\phi_y}{\phi_z}$$

แทนค่า u_x และ u_y ในซ้ายมือของสมการ (12) จะได้

$$-a(x,y,u(x,y))\phi_x/\phi_z - b(x,y,u(x,y)\phi_y/\phi_z - c(x,y,u(x,y))$$

$$-[a(x,y,u(x,y))\phi_x - b(x,y,u(x,y))\phi_y + c(x,y,u(x,y)\phi_z]/\phi_z$$

เนื่องจาก ϕ สอดคล้องสมการ (13) ดังนั้นพจน์ในวงเล็บจะเป็นศูนย์แสดงว่า $u(x,y)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (12)

สรุป

ผลเฉลย $u = u(x,y)$ ของสมการกึ่งเชิงเส้น (12) สามารถเขียนในรูปไม่เด่นชัดคือ $\phi(x,y,u) = 0$ โดยที่ $\phi(x,y,z)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นสามตัวแปรอิสระตามสมการ (13) โดย $\phi_z(p) \neq 0$ ณ บางจุด p ซึ่ง $\phi(p) = 0$

ข้อสังเกต

เบื้องหลังของวิธีการลากรองจ์ มีแนวความคิดดังนี้ กำหนดให้ $\vec{V}(x,y,z) = a(x,y,z)\hat{i} + b(x,y,z)\hat{j} + c(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ สมการกึ่งเชิงเส้น $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - c(x,y,u) = 0$ (นั่นคือ $\vec{V}\cdot(u_x\hat{i} + u_y\hat{j} - \hat{k}) = 0$) จึงมีความหมายทางเรขาคณิตคือ $\vec{V}$ สัมผัสกับกราฟของ u ที่ทุก ๆ จุด $(x,y,u(x,y))$

สมมติว่าเราให้กราฟของ u เป็นพื้นผิวซึ่งนิยามโดย $\phi(x,y,z) = 0$ เนื่องจาก $\vec{\nabla}\phi$ ตั้งฉากกับพื้นผิวนี้ ดังนั้นเงื่อนไขที่ว่า $\vec{V}$ สัมผัสกับพื้นผิวทำให้ได้สมการ $\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{V} = 0$ ซึ่งก็คือสมการ (13) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยสมการกึ่งเชิงเส้นที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้ ต่อไปนี้

$$u_x + u.u_y = 6x \text{ , } u(0,y) = 3y \qquad \text{, ...(14)}$$

วิธีทำ สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรอิสระที่สอดคล้องกับสมการกึ่งเชิงเส้น (ตามสมการที่ (13)) คือ

$$\phi_x + z\cdot\phi_y + 6x\phi_z = 0 \qquad \text{.....(15)}$$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกับตัวอย่างที่ 2 (ซึ่งผลเฉลยคือ $u(x,y,z) = f(z - 3x^2, y + 2x^2 - xz))$ ทำให้ได้ผลเฉลยของสมการ (15) คือ

$$\phi(x,y,z) = f(z - 3x^2 , y + 2x^3 - xz)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (14) เขียนในรูปไม่เด่นชัดคือ

$$f(u - 3x^2 , y + 2x^3 - xu) = 0 \qquad \text{.....(16)}$$

จากเงื่อนไข $u(0,y) = 3y$

แทนค่า $u = 3y$ และ $x = 0$ ในสมการ (16)

จะพบว่า

$$f(3y, y) = 0$$

ซึ่งมีหลายฟังก์ชัน f ที่สอดคล้อง $f(3y,y) = 0$ โดยการเลือกง่าย ๆ เช่นให้ $f(r,s) = r - 3s$ ทำให้ $f(u - 3x^2, y + 2x^3 - xu)$ $= u - 3x^2 - 3(y + 2x^3 - xy)$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (16) ผลเฉลยที่ต้องการคือ $u - 3x^2 - 3(y + 2x^3 - xu) = 0$

หรือ $$u(x,y) = \frac{3(y + x^2 + 2x^3)}{1 + 3x}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมของสมการกึ่งเชิงเส้น $u_x + u \cdot u_y = 6x;$ $u(0,y) = G(y)$ โดย $G(y)$ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

วิธีทำ สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรอิสระ ที่สอดคล้องสมการโจทย์คือ

$$\phi_x + z\phi_y + 6x\phi_z = 0$$

และระบบสมการลักษณะเฉพาะสำหรับเส้นโค้ง $(x(t),y(t),z(t))$ คือ

$$\frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = z,\ \frac{dz}{dt} = 6x \qquad .....(17)$$

ซึ่งหาผลเฉลยได้ (แก้สมการหา z ก่อนที่จะหา y)

$$x(t) = t + \alpha,\ y(t) = t^3 + 3\alpha t^2 + \beta t + \gamma,\ z(t) = 3t^2 + 6\alpha t + \beta \qquad .....(18)$$

กราฟของ $u(x,y)$ จะประกอบด้วยวงศ์ของเส้นโค้งลักษณะเฉพาะและเราต้องการให้แต่ละเส้นโค้งลักษณะเฉพาะผ่านจุด ๆ หนึ่ง คือ $(0,s,G(s))$ ดังนั้นให้

$$x = X(s,t),\ y = Y(s,t),\ z = Z(s,t)$$

เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,s,G(s))$ ณ เวลา $t = 0$ โดยให้ $x(0) = 0$, $y(0) = s$ และ $z(0) = G(s)$ จากสมการ (18) จะได้ $\alpha = 0$, $\beta = G(s)$ และ $\gamma = s$ ทำให้

$$X(s,t) = t$$
$$Y(s,t) = t^3 + G(s)t + s$$
$$Z(s,t) = 3t^2 + G(s)$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมคือ

$$x = X(s,t) = t,$$

$$y = Y(s,t) = t^3 + G(s)t + s$$

$$u = U(s,t) = Z(s,t) = 3t^2 + G(s)$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะช่วยให้หาผลเฉลยสมการกึ่งเชิงเส้นได้อีกลักษณะหนึ่ง

ทฤษฎีบท ผลเฉลยทั่วไปของสมการกึ่งเชิงเส้น

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \quad .....(19)$$

คือ $F(A,B) = 0$ หรือ $B = f(A)$ โดยที่ $A(x,y,u) = \alpha$ .....(20)

และ $B(x,y,u) = \beta$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \quad .....(21)$$

พิสูจน์ จาก $A(x,y,u) = \alpha$ และ $B(x,y,u) = \beta$

ดังนั้น $dA = A_x dx + A_y dy + A_u du = 0$

และ $dB = B_x dx + B_y dy + B_u du = 0$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการ หา dx และ dy ได้คือ

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -A_u du & A_y \\ -B_u du & B_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad dy = \frac{\begin{vmatrix} A_x & -A_u du \\ B_x & -B_u du \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}}$$

หรือ

$$dx = du \frac{\begin{vmatrix} A_y & A_u \\ B_y & B_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad dy = du \frac{\begin{vmatrix} A_u & A_x \\ B_u & B_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{du} = \frac{\begin{vmatrix} A_y & A_u \\ B_y & B_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} \frac{\begin{vmatrix} A_u & A_x \\ B_u & B_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}}$$

เนื่องจาก $A = \alpha$ และ $B = \beta$ สอดคล้องระบบสมการ

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

หรือ $\quad \dfrac{dx}{du} = \dfrac{a}{c}$ และ $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{b}{c}$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a}{c} = \frac{\begin{vmatrix} A_y & A_u \\ B_y & B_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}} \quad \text{และ} \quad \frac{b}{c} \frac{\begin{vmatrix} A_u & A_x \\ B_u & B_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}}$$

หรือ

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} A_y & A_u \\ B_y & B_u \end{vmatrix}} = \frac{b}{\begin{vmatrix} A_u & A_x \\ B_u & B_x \end{vmatrix}} = \frac{c}{\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}} \qquad \text{.....(22)}$$

แสดงว่า การที่ A = α และ B = β เป็นผลเฉลยสมการ (2) ทำให้ได้สมการ (22)

เราต้องการพิสูจน์ว่า F(A,B) = 0 เป็นผลเฉลยสมการ (19)

นั่นคือต้องแสดงว่า F(A,B) = 0 สอดคล้องสมการ (19)

จาก F(A,B) = 0

หาอนุพันธ์เทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial B}\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

และ

$$\frac{\partial F}{\partial A}\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial B}\left(\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

เขียนในรูปเมตริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial A} \\ \frac{\partial F}{\partial B} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แต่ $\frac{\partial F}{\partial A}$ และ $\frac{\partial F}{\partial B} \neq 0$ ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial u}u_x & \frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial u}u_x \\ \frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial u}u_y & \frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial u}u_y \end{vmatrix} = 0$$

หรือ

$$\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial u}u_y+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial y}u_x+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial u}u_xu_y$$

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial u}u_x+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial x}u_y+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial u}u_yu_x\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial y}\right)u_x+\left(\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial u}\right)u_y$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\begin{vmatrix} A_y & A_u \\ B_y & B_u \end{vmatrix} u_x + \begin{vmatrix} A_u & A_x \\ B_u & B_x \end{vmatrix} u_y = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \qquad \text{.....(23)}$$

จากสมการ (22) และ (23) จะพบว่า

$$au_x + bu_y = c$$

ดังนั้น $F(A,B) = 0$ สอดคล้องสมการ (19)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงแก้สมการ $u_x + u \cdot u_y = 6x$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

ในที่นี้ $a = 1,\ b = u,\ c = 6x$

ดังนั้น $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{du}{6x}$

พิจารณา

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{6x}$$

$$6xdx = du$$

อินทิเกรต $3x^2 = u + c$

หรือ $A(x,y,u) = u - 3x^2 = \alpha$

พิจารณา $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{du}{u}$

แต่ $u = 3x^2 + \alpha$ ดังนั้น

$(3x^2 + \alpha)dx = dy$

อินทิเกรต $x^3 + \alpha x = y + c$

แทนค่า α

$$x^3 + (u - 3x^2)x = y + \infty$$

หรือ $B(x,y,u) = y + 2x^3 - xu = \beta$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$F(A,B) = F(u - 3x^2 , y + 2x^3 - xy) = 0$$

หรือ $\quad u = 3x^2 + f(y + 2x^3 - xy)$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $3u_x - 2u_y + u = x$; $u = u(x,y)$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่เป็น

$$3u_x - 2u_y = x - u$$

ในที่นี้ $a = 3,\ b = -2,\ c = x - u$

ดังนั้นจากสมการ

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

จะได้ $\quad \dfrac{dx}{3} = \dfrac{dy}{-2} = \dfrac{du}{x - u}$

พิจารณาสมการ $\quad \dfrac{dx}{3} = \dfrac{dy}{-2}$

อินทิเกรต $\quad -2x = 3y + \alpha$

นั่นคือ $\quad A(x,y,u) = -2x - 3y = \alpha$

พิจารณาสมการ $\quad \dfrac{dx}{3} = \dfrac{du}{x - u}$

หรือ $\quad \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{3}u = \dfrac{1}{3}x$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบอินทิเกรต $e^{\frac{1}{3}x}$

$$u = e^{-x/3}\left[\int e^{x/3}\left(\frac{1}{3}x\right)dx\right]$$

$$= e^{-x/3}[(xe^{x/3} - 3e^{x/3} + \beta]$$

$$= x - 3 + \beta e^{-x/3}$$

นั่นคือ $B(x,y,u) = [u - (x - 3)]e^{x/3} = \beta$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $F(A,B) = 0$

$$F(-2x - 3y, [u - (x - 3)]e^{x/3}) = 0$$

หรือ

$$[u - (x - 3)]e^{x/3} = f(-2x - 3y)$$

$$u = x - 3 + e^{-x/3} f(-2x - 3y)$$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงแก้สมการ $u_x + u_y + u_z = u$ สำหรับ $u = u(x,y,z)$ โดยกำหนดเงื่อนไข $u(x,y,0) = x^2 + y^2$

2. จงแก้สมการ $u_x - u_y + u = z$ สำหรับ $u(x,y,z)$ โดย $u(0,y,z) = y^2e^z$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $u_t = u_x + 2u_y - u_z$ สำหรับ $u = u(x,y,z,t)$

4. จงแก้สมการกึ่งเชิงเส้น $2(u \cdot u_x + u \cdot u_y) = 1$ โดยหาผลเฉลยในรูป $f(A(x,y,u),B(x,y,u)) = 0$ สำหรับฟังก์ชันตามใจชอบ f แล้วหาผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไข $u(x,2x) = 1$

5. จงแก้สมการ $xu \cdot u_x - yu \cdot u_y = x^2$ เมื่อกำหนดเงื่อนไข $u(1,y) = y^2 + 1$

6. จงหาผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริม ของสมการในข้อ 4. เมื่อกำหนดเงื่อนไข $u(s,2s) = G(s)$

7. จงหาผลเฉลยในรูปตัวแปรเสริมของสมการในข้อ 5. เมื่อกำหนดเงื่อนไข $u(1,s) = G(s)$

คำตอบ

1. $u(x,y,z) = [x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz]e^z$

2. $u = z + f(x + y, z)e^{-x}$

3. $u(x,u,z,t) = f(x + t,\ y + 2t,\ z - t)$

4. $f(x - u^2,\ y - u^2) = 0$

   $u(x,y) = \sqrt{2x - y + 1}\ ,\ 2x - y + 1 > 0$

5. $f(xy, u^2 - x^2) = 0$

   $u(x,y) = x(x^2y^4 - 2y^2 + 1)^{1/2}$

2.4 การแก้สมการ $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$

ในการแก้สมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรอิสระ และสมการกึ่งเชิงเส้น จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับระบบสมการลักษณะเฉพาะซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))} \quad \text{และ} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x,y(x),z(x))}{a(x,y(x),z(x))}$$

ซึ่งเราสามารถเขียนใหม่เป็น

$$\frac{dx}{a(x,y(x),z(x))} = \frac{dy}{b(x,y(x),z(x))} = \frac{dz}{c(x,y(x),z(x))} \qquad .....(1)$$

โดยที่ผลเฉลยของระบบสมการ (1) นี้ จะอยู่ในรูป

$$A(x,y,z) = \alpha \quad \text{และ} \quad B(x,y,z) = \beta$$

เมื่อ A และ B เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ α และ β เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

วิธีการแก้สมการ (1) มีเทคนิคดังต่อไปนี้

1. โดยการพิจารณาเลือกสมการคู่ใดคู่หนึ่ง ที่สามารถทำให้อยู่ในรูป 2 ตัวแปรเท่านั้น ซึ่งเราจะอินทิเกรตหาผลเฉลยที่หนึ่งได้และถ้าเราสามารถเลือกสมการอีกคู่หนึ่ง (โดยใช้สมการที่เหลือ) ที่อยู่ในรูป 2 ตัวแปรเช่นกัน เราก็จะได้อีกผลเฉลยหนึ่ง
2. แต่ถ้าเราใช้วิธีในข้อ 1 ได้เพียงครั้งเดียว เราอาจนำผลเฉลยที่ได้ (ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ตัวแปร) ไปช่วยหาอีกผลเฉลยหนึ่ง
3. โดยการใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับสัดส่วน คือ

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{l\ dx + m\ dy + n\ dz}{la + mb + nc}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ถ้า $a = 0$ แล้ว เราหมายถึง $dx = 0$

นั่นคือ ถ้าตัวส่วนเป็นศูนย์ แล้วตัวเศษจะต้องเป็นศูนย์

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงแก้สมการ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$

วิธีทำ โดยการพิจารณาเลือกสมการ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

อินทิเกรต จะได้

$$\ln x = \ln y + c$$

ดังนั้น $A(x,y,z) = \frac{x}{y} = \alpha \quad (\alpha = e^{c})$

โดยวิธีการเดียวกัน เลือกสมการ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

อินทิเกรต จะได้

$$\ln y = \ln z + c$$

ดังนั้น $B(x,y,z) = \frac{y}{z} = \beta \ (\beta = e^{c})$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ

$\frac{x}{y} = \alpha$ และ $\frac{y}{z} = \beta$

ตัวอย่างที่ 2 $$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xyz^2(x - y^2)}$$

วิธีทำ โดยการเลือกสมการ

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

หรือ $x\,dx - y\,dy = 0$

อินทิเกรต จะได้

$$x^2 - y^2 = \alpha$$

ดังนั้น $A(x,y,z) = x^2 - y^2 = \alpha$

ต่อไปพิจารณาสมการ

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{xyz^2(x^2 - y^2)}$$

เนื่องจาก $x^2 - y^2 = \alpha$ ดังนั้น

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{xyz^2\alpha}$$

หรือ $\alpha\, xdx = \frac{dz}{z^2}$

อินทิเกรต จะได้

$$\alpha \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{z} + c$$

$$\alpha\, x^2 z = -2 + 2cz$$

$$2 + \alpha x^2 z = 2cz$$

$$\frac{2}{z} + \alpha x^2 = 2c$$

แทนค่า $\alpha = x^2 - y^2$ จะได้

$$B(x,y,z) = \frac{2}{z} + x^2(x^2 - y^2) = \beta \quad (\beta = 2c)$$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$x^2 - y^2 = \alpha \text{ และ } \frac{2}{z} + x^2(x^2 - y^2) = \beta$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3**</u> จงแก้สมการ $\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x - y}$

<u>**วิธีทำ**</u> โดยใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับสัดส่วน เลือกตัวคูณ l,m,n เป็น 1,0,1 จะได้

$$\frac{dx + dz}{x + z} = \frac{dy}{y}$$

อินทิเกรต จะได้

$$\ln(x + z) = \ln y + \ln \alpha$$

ดังนั้น $A(x,y,z) = \frac{x + z}{y} = \alpha$

และโดยการเลือกตัวคูณ l,m,n เป็น $1,-1,0$ จะได้

$$\frac{dx - dy}{z} = \frac{dz}{x - y}$$

หรือ $(x - y)d(x - y) = z\,dz$

อินทิเกรต $(x - y)^2 = z^2 + \beta$

ดังนั้น $B(x,y,z) = (x - y)^2 - z^2 = \beta$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$\frac{x + z}{y} = \alpha \quad \text{และ} \quad (x - y)^2 - z^2 = \beta$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแก้สมการ

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{z + x} = \frac{dz}{x + y}$$

<u>วิธีทำ</u> โดยใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับสัดส่วน เลือกตัวคูณ l,m,n เป็น $1,1,1$ และ $1,-1,0$ จะได้

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)} = \frac{dx - dy}{y - x}$$

อินทิเกรต จะได้

$$\ln(x + y + z) = -2\ln(x - y) + \ln\alpha$$

ดังนั้น $A(x,y,z) = (x + y + z)(x - y)^2 = \alpha$

โดยเลือกตัวคูร l,m,n เป็น $1,1,1$ และ $1,0,-1$ จะได้

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)} = \frac{dx - dz}{z - x}$$

อินทิเกรตจะได้

$$\ln(x + y + z) = -2\ln(x - z) + \ln\beta$$

ดังนั้น $B(x,y,z) = (x + y + z)(x - z)^2 = \beta$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$(x + y + z)(x - y)^2 = \alpha \quad \text{และ}$$

$$(x + y + z)(x - z)^2 = \beta$$

บางครั้งเราสามารถเลือกตัวคูณโดยทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์ ซึ่งจะได้ตัวเศษเป็นศูนย์ ทำให้หาผลเฉลยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{x - y}$

วิธีทำ เลือกตัวคูณ l,m,n เป็น $1,1,1$ จะได้

$\dfrac{dx + dy + dz}{(y - z)(z - x)(x - y)}$ ซึ่งตัวส่วนเป็นศูนย์

ดังนั้น $dx + dy + dz = 0$

อินทิเกรต จะได้

$$x + y + z = \alpha$$

นั่นคือ $A(x,y,z) = x + y + z = \alpha$

และโดยเลือกตัวคูณ l,m,n เป็น x,y,z จะพบว่า

ตัวส่วนคือ $x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = 0$

ดังนั้นตัวเศษเป็นศูนย์

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

อินทิเกรต จะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta$$

นั่นคือ $B(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \beta$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ $x + y + z = \alpha$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $\dfrac{dx}{z(x + y)} = \dfrac{dy}{z(x - y)} = \dfrac{dz}{x^2 + y^2}$

วิธีทำ โดยเลือกตัวคูณ l,m,n เป็น $x,-y,-z$ จะพบว่าตัวส่วนคือ

$xz(x + y) - yz(x - y) - z(x^2 + y^2) = 0$

ดังนั้น ตัวเศษเป็นศูนย์

$$xdx - ydy - zdz = 0$$

อินทิเกรต จะได้

$$x^2 - y^2 - z^2 = \alpha$$

นั่นคือ $A(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 = \alpha$

และทำนองเดียวกัน เลือกตัวคูณเป็น $y, x, -z$ จะพบว่า

ตัวส่วนคือ $yz(x + y) + xz(x - y) - z(x^2 + y^2) = 0$

ดังนั้น $ydx + xdy - zdz = 0$

หรือ $d(xy) - zdz = 0$

อินทิเกรต จะได้

$$xy - \frac{z^2}{2} = c$$

นั่นคือ $B(x,y,z) = 2xy - z^2 = \beta \; (\beta = 2c)$

ผลเฉลยของระบบสมการคือ $x^2 - y^2 - z^2 = \alpha$ และ $2xy - z^2 = \beta$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

1. $$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{y^2 - x^2}$$

2. $$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z - 2y)}$$

3. $$\frac{dx}{x(x + y)} = \frac{dy}{-y(x + y)} = \frac{dz}{-(x - y)(2x + 2y + z)}$$

4. $$\frac{dx}{x(z - 2y^2)} = \frac{dy}{y(z - y^2 - 2x^3)} = \frac{dz}{z(z - y^2 - 2x^3)}$$

5. $$\frac{dx}{y + xz} = \frac{dy}{-(x + yz)} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

6. $$\frac{dx}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{dy}{-y(3x^2 + y^2)} = \frac{dz}{2z(y^2 - x^2)}$$

7. $$\frac{dx}{y(x + y) + az} = \frac{dy}{x(x + y) - ax} = \frac{dz}{z(x + y)y}$$; a เป็นค่าคงตัว

คำตอบ

1. $xy = \alpha$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = \beta$

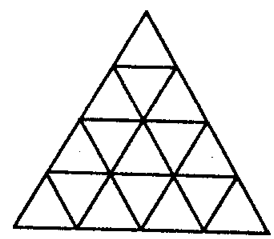
3. $xy = \alpha$ และ $(x + y)(x + y + z) = \beta$

5. $x^2 + y^2 - z^2 = \alpha$ และ $xy + z = \beta$

7. $\dfrac{x + y}{z} = \alpha$ และ $x^2 - y^2 - 2az = \beta$

เวลาพัก

มีรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดกี่รูป



มีรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสทั้งหมดกี่รูป