บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความหมาย

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือสมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ

ถ้าให้ u เป็นตัวแปรตาม และ $x, y, \ldots$ เป็นตัวแปรอิสระ (นั่นคือ $u = u(x, y, \ldots)$) แล้วสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะเขียนได้ในรูป

$$F(x, y, \ldots u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันของปริมาณที่ระบุ และอย่างน้อยต้องมีอนุพันธ์ย่อยหนึ่งตัว

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เมื่อกำหนด $u = u(x, y)$ เช่น

$$u_x + u_y = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = u + x^2 + y^2$$

$$u_{xxx} = u_{yy} + u^2$$

อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฎในสมการ เพราะฉะนั้น

$u_x + yu_y = 0$ เป็นสมการอันดับหนึ่ง

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ เป็นสมการอันดับสอง

$u_{xxxx} + u_{tt} = 0$ เป็นสมการอันดับสี่

ผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือฟังก์ชัน $u(x,y,\ldots)$ ที่สอดคล้องสมการนั้น ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $u(x,y) = e^x \sin y$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

วิธีทำ เนื่องจาก $u(x,y) = e^x \sin y$

ดังนั้น

$$u_x = e^x \sin y$$
$$u_{xx} = e^x \sin y$$
$$u_y = e^x \cos y$$
$$u_{yy} = -e^x \sin y$$

ซึ่งจะพบว่า

$$u_{xx} + u_{YY} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

นั่นคือ $u(x,y) = e^x \sin Y$ สอดคล้องสมการ $U_{xx} + U_{[illegible]}$ [illegible]

ตัวอย่างที่ [illegible] จงแสดงว่า u([illegible]) = [illegible]$^{x+2y}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$U_X - U_Y + u = e^{x+2y}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $u(x,y) = -ye^{x+2y}$

ดังนั้น

$$u_x = -ye^{x+2y}$$
$$U_Y = -y(2e^{x+2y}) + e^{x+2y}(-1)$$

ซึ่งจะพบว่า

$$U_X - u_y + u = -ye^{x+2y} - (-2ye^{x+2y} - e^{x+2y}) - ye^{x+2y}$$
$$= e^{x+2y}$$

นั่นคือ $u(x,y) = -y\,e^{x+2y}$ สอดคล้องสมการดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $u(x,t) = Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 6\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $u(x,t) = Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2}$

ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial t} = -3Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3}{2} Ae^{-3t} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{9}{4} Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2}$$

ซึ่งจะพบว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 6\frac{\partial u}{\partial t} = -9Ae^{-3t} \sin \frac{3x}{2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $u(x,y) = xf(2x + y)$

เป็นผลเฉลยของสมการ $xu_x - 2xu_y = u$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนดเงื่อนไข $u(1,y) = y^2$

วิธีทำ จาก $u = xf(2x + y)$

ดังนั้น $u_x = f(2x + y) + xf'(2x + y) \cdot 2$

$$u_y = xf'(2x + y)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} xu_x - 2xu_y &= xf(2x + y) + 2x^2 f'(2x + y) - 2x^2 f'(2x + y) \\ &= xf(2x + y) \\ &= u \end{aligned}$$

นั่นคือ $u = xf(2x + y)$ เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว

จากเงื่อนไข $u(1,y) = y^2$ แทนในผลเฉลย

$$u(x,y) = xf(2x + y)$$

จะได้

$$u(1,y) = 1 \cdot f(2 + y) = y^2$$

หรือ

$$f(2 + y) = y^2$$

เพื่อที่จะหาฟังก์ชัน f ให้ $r = 2 + y$ จะได้

$$f(r) = (r - 2)^2$$

ดังนั้น $f(2x + y) = (2x + y - 2)^2$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $u(x,y) = x(2x + y - 2)^2$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในแต่ละข้อนั้น

1. $u(x,y) = x + y$; $u_{xx} + u_{yy} = 0$

2. $u(x,y) = f(x) + g(y)$; $u_{xy} = 0$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่หาอนุพันธ์ได้

3. $u(x,y) = f(x + y) + g(x - y)$; $u_{xx} - u_{yy} = 0$

4. $u(x,t) = x^2 + 2t$; $u_{xx} = u_t$

5. $u(x,y) = \sin x \cosh y$; $u_{xx} + u_{yy} = 0$

6. u(x,t) ❑ sin(x - ct) ; u_{tt} 📭♍◆^{2} ☒☒ ❑ 🗀 เมื่อ ♍ เป็นค่าคงตัว

1.2 การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ในเรื่องของสมการเชิงอนุพันธ์ เราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้โดยการกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ ดังนี้

ให้ $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

$$y' = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x}$$

$$= 4(Ae^{2x} + Be^{-2x})$$

$$= 4y$$

ฉะนั้น $y'' - 4y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยก็เช่นเดียวกัน เราสามารถสร้างสมการจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

พิจารณาความสัมพันธ์

$$f(x,y,u,a,b) = 0 \qquad .....(1)$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad .....(2)$$

และ

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad .....(3)$$

จากสมการ (1),(2) และ (3) เราสามารถกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ a และ b ได้ความสัมพันธ์ของ x,y,u,u_x และ u_y ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง คือ

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad .....(4)$$

ถ้า ค่าคงตัวตามใจชอบในสมการ (1) มีมากกว่านี้ จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงขึ้นอีกเพื่อที่จะเพียงพอในการกำจัดค่าคงตัวเหล่านั้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ติดค่าคงตัวตามใจชอบตามสมการ (1) เรียกว่า<u>**ผลเฉลยบริบูรณ์**</u> และถ้าค่าคงตัวตามใจชอบของผลเฉลยบริบูรณ์ถูกกำหนดเราจะได้<u>**ผลเฉลยเฉพาะ**</u>ของสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจากสมการ

$$u = ax + by + ab$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวตามใจชอบ

วิธีทำ จาก $u = ax + by + ab$

ดังนั้น $u_x = a$

$u_y = b$

นั่นคือ

$$u = xu_x + yu_y + u_x u_y$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 2 จงกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ จากสมการ $u = ax + \frac{y}{a}$

วิธีทำ ถ้าเราหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x จะพบว่า

$$u_x = a$$

ดังนั้นจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u = xu_x + \frac{y}{u_x}$$

หรือ

$$xu_x^2 - uu_x + y = 0$$

แต่ถ้าเราหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y จะพบว่า

$$u_y = \frac{1}{a}$$

ซึ่งจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$u = \frac{x}{u_y} + yu_y$$

หรือ

$$yu_y^2 - uu_y + x = 0$$

ตัวอย่างที่ 3 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจากสมการ $axu + byu + abxy = 0$

วิธีทำ จาก $axu + byu + abxy = 0$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้

$$a(xu_x + u) + byu_x + aby = 0$$

และ $$axu_y + b(yu_y + u) + abx = 0$$

ซึ่งเขียนในรูปเมตริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} xu & yu & xy \\ xu_x+u & yu_x & y \\ xu_y & yu_y+u & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เราสามารถกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบได้ โดยให้ดีเทอร์มิแนนต์เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} xu & yu & xy \\ xu_x+u & yu_x & y \\ xu_y & yu_y+u & x \end{vmatrix} \square\ \square$$

ในที่สุดจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$xu_x + yu_y = u$$

ตัวอย่างที่ 4 จงกำจัด a, b และ c จากสมการ

$$u = a(x + y) + b(x - y) + abt + c$$

วิธีทำ จาก $u = a(x + y) + b(x - y) + abt + c$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $x, y,$ และ t จะได้

u_x □ $a+b$

$u_y = a - b$

u_t □

แต่เนื่องจาก $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

เพราะฉะนั้น $(u_x)^2 - (u_y)^2 = 4u_t$

ตัวอย่างที่ 5 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจาก

$$u = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y$$

วิธีทำ โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y

$$u_x = 2a_1x + a_2y + a_4$$

$$u_y = a_2x + 2a_3y + a_5$$

ซึ่งจะพบว่าไม่เพียงพอที่จะกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ จึงต้องหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง

$$u_{xx} = 2a_1$$

$$u_{xy} = a_2$$

$$u_{yy} = 2a_3$$

ดังนั้น $a_1 = \dfrac{u_{xx}}{2}$, $a_2 = u_{xy}$, $a_3 = \dfrac{u_{yy}}{2}$

$$a_4 = u_x - xu_{xx} - yu_{xy} \ , \ a_5 = u_y - xu_{xy} - yu_{yy}$$

แทนค่า a เหล่านี้ในสมการโจทย์ จะได้สมการ

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y + 2u = 0$$

นอกจากจะสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจากความสัมพันธ์ที่ติดค่าคงตัวตามใจชอบแล้ว เรายังสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจากความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตามใจชอบอีกด้วย และเราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตามใจชอบนี้ว่า **ผลเฉลยทั่วไป**

พิจารณาความสัมพันธ์

$$\phi(v,w) = 0 \qquad .....(5)$$

โดย ϕ เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ v และ w ต่างก็เป็นฟังก์ชันของ x, y และ u หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

และ

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

หรือ

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}u_x\right)+\frac{\partial\phi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}u_x\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(6)$$

และ

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}u_y\right)+\frac{\partial\phi}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}u_y\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(7)$$

จะกำจัดฟังก์ชัน "ϕ" จากสมการ (6) และ (7)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}u_x & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}u_x \\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}u_y & \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi}{\partial w} \end{bmatrix} = 0$$

จากความรู้เกี่ยวกับเมตริกซ์ จะพบว่า

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}u_x & \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}u_x \\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}u_y & \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}u_y \end{vmatrix} = 0$$

หรือ

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}u_x\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}u_y\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}u_y\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}u_x\right) = 0$$

นั่นคือ

$$Pu_x + Qu_y = R \qquad \ldots\ldots(9)$$

โดยที่

$$P = \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial(v,w)}{\partial(u,y)}$$

$$Q = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(v,w)}{\partial(x,u)} \qquad \ldots\ldots(10)$$

$$R = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,x)}$$

ซึ่งสมการ (9) ก็คือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง แต่ถ้าสมการ (5) ประกอบด้วยฟังก์ชันตามใจชอบมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันแล้ว สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้จะต้องมีอันดับมากกว่าหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 6 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจากความสัมพันธ์

$$u = f(x^2 + y^2)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันตามใจชอบ

วิธีทำ จาก $u = f(x^2 + y^2)$

เขียนในรูปแบบสมการ (5) คือ

$$\phi(u, x^2 + y^2) = 0$$

โดยที่ $v = u$

$w = x^2 + y^2$

จากสมการ (10)

$$P = \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$= 1(2y) - 0$$

$$Q = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= 0 - 1(2x)$$

$$R = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$= 0 - 0$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$Pu_x + Qu_y = R$$

จะได้

$$2yu_x - 2xu_y = 0$$

หรือ

$$yu_x - xu_y = 0$$

วิธีที่ 2 เราสามารถกำจัดฟังก์ชันตามใจชอบ f จาก โจทย์ได้เลย ดังนี้

$$u = f(x^2 + y^2)$$

เพื่อความสะดวกในการหาอนุพันธ์

ให้ $v = x^2 + y^2$

ดังนั้น

$$u = f(v) \quad , \quad v = x^2 + y^2$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y โดย $f'(v) = \frac{df}{dv}$

จะได้ $u_x = 2xf'$ และ $u_y = 2yf'$

กำจัด f' จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y}$$

หรือ $yu_x = xu_y$

หมายเหตุ $u = f(x^2 + y^2)$ เรียกว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ $yu_x - x u_y = 0$

ดังนั้น $u = x^2 + y^2 - 1$

$u = \sin(x^2 + y^2)$

หรือ $u = 4\sqrt{x^2 + y^2} + \cos(x^2 + y^2)$

ต่างก็เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

ตัวอย่างที่ 8 จงกำจัดฟังก์ชันตามใจชอบ จากความสัมพันธ์

$$u = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

วิธีทำ ให้ $u = xf(v) \quad , \quad v = \frac{y}{x}$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y จะได้

$$u_x = xf'(v)\frac{\partial v}{\partial x} + f(v)$$

$$= -\frac{y}{x} f'(v) + f(v)$$

$$u_y = xf'(v)\frac{\partial v}{\partial y} = f'(v)$$

โดยกำจัด $f(v)$ และ $f'(v)$ จะได้

$$xu_x + yu_y = u$$

<u>**ตัวอย่างที่ 9**</u> จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจาก

$$u = f(x - at) + g(x + at)$$

วิธีทำ ให้ $v = x - at,\ w = x + at$

ฉะนั้น $u = f(v) + g(w)$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x และ t จะได้

$$u_x = f'(v) + g'(w)$$

$$u_t = -af'(v) + ag'(w)$$

ซึ่งพบว่าไม่เพียงพอที่จะกำจัด f, g, f', g' จากสามสมการข้างต้น ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง

$$u_{xx} = f''(v) + g''(w)$$

$$u_{xt} = -af''(v) + ag''(w)$$

$$u_{tt} = a^2f''(v) + a^2g''(w)$$

ปรากฏว่าจะมีแต่ f'' และ g'' ในสมการทั้งสาม ทำให้กำจัดปริมาณดังกล่าวได้โดยง่าย

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยการกำจัดค่าคงตัวตามใจชอบ (a,b) จากสมการต่อไปนี้

   1.1 $u = (x + a)(y + b)$

   1.2 $2u = (ax + y)^2 + b$

   1.3 $u = axy + b$

   1.4 $ax^2 + by^2 + u^2 = 0$

   1.5 $ax^2 + by^2 + u^2 = 1$

   1.6 $ax^2 + by^2 = xyu$

   1.7 $u^2 = (x + a)(y + b)$

   1.8 $u = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4$

2. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยการกำจัดฟังก์ชันตามใจชอบ (f,g) จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $u = xf(y)$

   2.1 $u = (x + y)f(xy)$

   2.3 ◆ ▫ $f(x + ay)$

   2.4 $u = f(x^2 - y^2)$

   2.5 ⊠⊠◆ ▫ $f(x + y + u)$

   2.6 $u = f(x) + g(y) + xy$

   2.7 $u = f(3x + 2y) + g(2x - 3y)$

   2.8 $u = f(x).g(y)$

คำตอบ

1. 🗁🖂🗁 ◆◆$_x$ $_y$ ❑ ◆

   1.2 $xu_x + yu_y = u_y^2$

   1.3 $xu_x = yu_Y$

   1.4 $u = xu_x + yu_y$

   1.5 $u^2 = 1 + xu_x u + yu_Y u$

   1.6 $xu_x + yu_Y = 0$

   1.7 $4u_x u_y = 1$

   1.8 $u_x = xu_{xx} + yu_{xy}$ หรือ $u_y = x u_{xy} + yu_{YY}$

2. 2.1 $u = xu_x$

   2.2 $(x$ ☒ $y)(xu_x - yu_y)$ ❑ $(x - y)u$

   2.3 $u_y = au_x$

   2.4 $yu_x + xu$✡ ❑ ▯

   2.5 $x(u - y)u_x + y(x - u)u_y = u(y - x)$

   2.6 $u_{xy} = 1$

   2.7 $6u_{xx} - 13u_{xy} + 6u_{YY} = 0$

   2.8 $uu_{xy} = u_x u_y$

1.3 ตัวดำเนินการเชิงเส้น และหลักการรวมผลเฉลย

โดยทั่วไปแล้วตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ จะกระทำบนฟังก์ชันหนึ่งแล้วได้อีกฟังก์ชันหนึ่ง เช่น

$$L[u] = u_{xx} + u_{yy}$$

$$M[u] = u_{xx} - xu_x + u_y$$

โดยที่ $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ และ $M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$

ซึ่งเรียกว่าตัวดำเนินการแบบอนุพันธ์

ตัวดำเนินการเชิงเส้น คือตัวดำเนินการที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. $L[cu] = cL[u]$ สำหรับค่าคงตัว c ใด ๆ .....(1)
2. $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$ .....(2)

เราสามารถรวมสมการ (1) และ (2) เข้าด้วยกัน เป็น

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2] \quad .....(3)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว และเรายังสามารถขยายสมบัตินี้ได้เป็น

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_iu_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_iL[u_i] \quad .....(4)$$

ถ้าให้ L และ M เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นแบบอนุพันธ์ แล้ว ผลบวกของตัวดำเนินการ

$$(L + M)[u] = L[u] + M[u]$$

จะเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

และทำนองเดียวกันสำหรับผลคูณของตัวดำเนินการ

$$(LM)[u] = L(M[u])$$

ก็จะเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วย

นอกจากนี้ตัวดำเนินการเชิงเส้นแบบอนุพันธ์ยังมีสมบัติอื่นอีกคือ

1. $L + M = M + L$
2. $(L + M) + N = L + (M + N)$
3. $(LM)N = L(MN)$

4. $L(M + N) = LM + LN$

และสำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้นแบบอนุพันธ์ที่ ส.ป.ส. เป็นค่าคงตัว

5. $LM = ML$

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> ให้ $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}$ และ $M = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial x}$

$$LM[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} - y\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - x\left(y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$ML[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2} + x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - y\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - y\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2} + x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - y\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial y}$$

ซึ่งจะพบว่า $LM \neq ML$

พิจารณาสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งของสองตัวแปรอิสระ $u = u(x,y)$ ในรูป

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = g(x,y)$$

เขียนในรูปตัวดำเนินการเชิงเส้นคือ

$$L[u] = g \qquad \text{.....(5)}$$

เมื่อ

$$L = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c \qquad \text{.....(6)}$$

สำหรับสมการเชิงเส้นอันดับสอง จะอยู่ในรูป

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$$

เขียนในรูปตัวดำเนินการเชิงเส้นคือ

$$L[u] = g$$

เมื่อ

$$L = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2} + d\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{\partial}{\partial y} + f \qquad \text{....(7)}$$

ซึ่งถ้า $g(x,y) = 0$ จะเรียกสมการ (5) ว่า สมการเอกพันธ์

$g(x,y) \neq 0$ จะเรียกสมการ (5) ว่า สมการไม่เอกพันธ์

ตัวอย่างสมการเชิงเส้นอันดับสองที่ควรรู้จัก คือ

$u_t = kU_{xx}$; $u = u(x,t)$ เรียกว่าสมการความร้อน

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$; $u = u(x,t)$ เรียกว่าสมการคลื่น

u_{xx} $+u$ ✡✡ ❑ ☐ ▤ ♦ ◘ $u(x,y)$ เรียกว่าสมการลาปลาซ

หลักการรวมผลเฉลย

สิ่งที่สำคัญเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นก็คือหลักการรวมผลเฉลยกล่าวคือ ถ้าให้ u_i ; $i = 1,2,\ldots,n$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องสมการ $L[u_i] = g_i$

แล้ว $u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$; $i = 1,2,\ldots,n$ จะสอดคล้องสมการ $L[u] = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$

เมื่อ c_i ; $i = 1,2,\ldots,n$ เป็นค่าคงตัว

กรณีเฉพาะคือ เมื่อ $g_i = 0$ นั่นคือ ถ้า u_i เป็นผลเฉลยของสมการ

$L[u] = 0$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ ก็จะเป็นผลเฉลยของสมการ $L[u] = 0$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $u_1(x,y) = x^3$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเชิงเส้น $u_{xx} - u_y = 6x$ และ $u_2(x,y) = y^2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $u_{xx} - u_y = -2y$ จงหาผลเฉลยของสมการ $u_{xx} - u_y = 18x + 8y$

วิธีทำ เนื่องจาก $L[u] = u_{xx} - u_y$

$g_1(x,y) = 6x$

$g_2(x,y) = -2y$

และจะพบว่า $18x + 8y = 3g_1 - 4g_2$

ดังนั้น $c_1 = 3$, c_2 ❑ ▤

โดยหลักการรวมผลเฉลยทำให้เราทราบว่า

$3u_1(x,y) - 4u_2(x,y)$ (หรือ $3x^3 - 4y^2$) จะเป็นผลเฉลยของสมการ $u_{xx} - u_y = 18x + 8y$ ซึ่งเราสามารถตรวจสอบได้โดยตรง

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $u_1(x,t) = \sin(t)\cos(x)$ และ $u_2(x,t) = \cos(3t)\sin(3x)$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการคลื่น $u_{tt} = u_{xx}$ จงหาผลเฉลยอื่น ๆ ของสมการคลื่นนี้

วิธีทำ เนื่องจาก $u_{tt} = u_{xx}$ สามารถเขียนในรูป $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ได้ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่เป็นเอกพันธ์ ตามหลักการรวมผลเฉลยสำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใด ๆ

$$c_1\sin(t)\cos(x) + c_2\cos(3t)\sin(3x)$$

ก็จะเป็นผลเฉลยสมการคลื่นด้วยโดยการเลือก c_1 และ c_2 เราสามารถได้ผลเฉลยต่าง ๆ กัน เช่นให้ $c_1 = 1$ และให้ c_2 เปลี่ยนไปเรื่อย ๆ เราจะได้ผลเฉลยมากมาย

ในการศึกษาสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ความยากลำบากจะอยู่ที่เราไม่สามารถใช้หลักการรวมผลเฉลยได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาสมการอันดับหนึ่งที่ไม่เป็นเชิงเส้น $u_xu_y - u(u_x + u_y) + u^2 = 0$ ซึ่งเขียนได้เป็น $(u_x - u)(u_y - u) = 0$ จะสังเกตได้ว่ามีผลเฉลยเป็น e^x และ e^y จงแสดงว่า $c_1e^x + c_2e^y$ ไม่ได้เป็นผลเฉลยสมการนี้ นอกเสียจาก $c_1 = 0$ หรือ $c_2 = 0$

วิธีทำ ให้ $N[u] = (u_x - u)(u_y - u)$

สำหรับฟังก์ชัน v และ w ใด ๆ

$$N[v + w] = (v_x + w_x - v - w)(v_y + w_y - v - w)$$

$$= N[v] + N[w] + (v_y - v)(w_x - w) + (v_x - v)(w_y - w)$$

แสดงว่า $N[v + w] \neq N[v] + N[w]$

ถ้าให้ $v = c_1e^x$ และ $w = c_2e^y$ เราจะได้

$$N[c_1e^x + c_2e^y] = N[c_1e^x] + N[c_2e^y] + (-c_1e^x)(-c_2e^y)$$

$$= c_1c_2e^{x+y}$$

ซึ่ง $N[c_1e^x + c_2e^y] = 0$ ก็ต่อเมื่อ $c_1 = 0$ หรือ $c_2 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ว่าเป็นเชิงเส้นหรือไม่และถ้าเป็นบอกด้วยว่าเป็นชนิดเอกพันธ์ หรือไม่

   1.1 $x^2u_{xxy} + y^2u_{yy} - \log(1 + y^2)u = 0$

   1.2 $u_x + u^3 = 1$

   1.3 $u_{xxyy} + e^xu_x = y$

   1.4 $uu_{xx} + u_{yy} - u = 0$

   1.5 $u_{xx} + u_t = 3u$

2. จะสังเกตพบว่า $u_1(x,y) = x^2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $u_{xx} + u_{yy} = 2$ และ $u_2(x,y) = cx^3 + dy^3$ เป็นผลเฉลยของสมการ $u_{xx} + u_{yy} = 6cx + 6dy$ สำหรับค่าคงตัว c และ d จงหาผลเฉลยของสมการ $u_{xx} + u_{yy} = Ax + By + C$ สำหรับค่าคงตัว A,B และ C

คำตอบ

1. 1.1 เป็นสมการเชิงเส้น , สมการเอกพันธ์

   1.2 ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

   1.3 เป็นสมการเชิงเส้น , สมการไม่เอกพันธ์

   1.4 ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

   1.5 เป็นสมการเชิงเส้น , สมการเอกพันธ์

2. $\frac{1}{2} Cx^2 + \frac{1}{6} Ax^3 + \frac{1}{6} By^3$

เวลาพัก

จงเขียนรูปต่อไปนี้ โดยไม่ยกดินสอหรือลากซ้ำ