

คำตอบแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.1

1. เห็นได้โดยชัดเจน การพิสูจน์อยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีบทค่าตัวกลาง
2. เริ่มด้วยการศึกษาค่าศูนย์ของ F
3. ศึกษา $P'(x)$ ที่ศูนย์ของ $P(x)$ และระหว่างศูนย์ของ $P(x)$
4. ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางกับ $f(x+1) - f(x)$
5. วิธีแรกพิสูจน์ $f'(x)$ มีค่าและหาค่า

วิธีที่ 2 ประมาณค่า $|f(b) - f(a)| = \left| \sum_1^N (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \right|$ เมื่อ $x_0 = a, x_n = b$

6. จะต้องพิสูจน์ว่า $(b-a)f(x) \geq (b-x)f(a)$ ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางกับ $f(x) - f(a)$ และ $f(x) - f(b)$ และใช้ผลลัพธ์กับ $(b-a)f(x)$ ในที่สุดใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางกับ f' และใช้สมมติฐานกับ f''
7. (a) ความไม่ต่อเนื่องของ f' ที่ $x = 0$ เป็น removable
8. (a) ซึ่งเห็นได้โดยแน่ชัดจากรูปแต่ต้องการการพิสูจน์ แสดงได้โดยทฤษฎีบทค่าตัวกลาง ว่าถ้า $f'(x_0) < 0$ แล้ว f ต้องเป็นลบในบางแห่งทางขวาของ x_0
(b) ไม่ใช่
9. (a) ไม่เคย
(b) ไม่จำเป็น
(c) ไม่จำเป็น
10. แสดงว่า $\int_0^2 (1 - P'(t)) dt = 0$

11. คุยที่ helix
12. ให้ $f(\theta) = \frac{3b}{2H+B}$ และหาค่า b, H และ B ในพจน์ของ θ แล้วใช้ทฤษฎีบทค่าตัว
13. กลางประมาณ $f(\theta) - f(0)$ แล้วประมาณค่า $|f(\theta) - \theta|$
14. ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางกับ $f(x) = \arctan(x)$ แล้วใช้ $\frac{\pi}{2} - f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
15. (b) ไม่ใช่
16. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) -1
17. เป็นไปไม่ได้ที่จะตัด $\cos x$ และด้วยวิธีนี้สมมติฐานไม่คล้องตามทฤษฎีบท 1.6
18. $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าไม่ได้แต่ $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ มีค่า
19. (b) ไม่ใช่ พยายามทำ $f(x) = xe^x$
20. $f(0) = 0$ และ $f'(0)$ คำนวณจากนิยามดั้งเดิมของอนุพันธ์เป็น 0
21. กรณีแรก : ถ้า $f(a) < f(b)$ แล้วพิสูจน์ว่าจะต้องมีจุด u ซึ่ง $f(a) = f(u)$ ดังนั้นมี c ซึ่ง $f'(c) = 0$
กรณีที่ 2 : $f(a) \geq f(b)$

แบบฝึกหัด 1.2

1. (a) $f_1(x,y) = 2x \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2}$
 $f_2(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}, f_{12}(x,y) = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$
2. $f_2(x, y) = 3x^2y^2 - 2, f_2(2, 3) = 106, f_2(y,x) = 3x^2y^2 - 2$
3. (c) $[-1, -1, -4]$
4. (b) สำหรับไม่มีทิศทางยกเว้นแกนเหล่านั้น (c) ไม่ใช่
5. ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง จงแสดงว่า $|f(p) - f(p_0)| \leq M |p - p_0|$

6. สรุปว่า $f = 0$ บนจุดขอบเขตของเซตเปิดที่มีขอบเขต
7. ใช้ข้อ 6 8. 0 13. $\frac{25}{7}$
8. ไม่มีความหมายที่ F จะต้องคงที่ จงแสดงว่าทำไม

แบบฝึกหัด 1.3

1. (b) $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt}$

(c) $\frac{\partial w}{\partial t} F_1 + F_2 f_1 + F_3 g_1 ; \frac{\partial w}{\partial y} = F_2 f_2 ; \frac{\partial w}{\partial z} = F_3 g_2$

2. $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2}$

3. ที่ $(-1, 2, 1)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2}{3}$, $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{4}{3}$

4. $a ? = - \frac{2x^3 u + 2xy^2 v + x^2 y - 3y^2}{x^4 + 4y^3}$ และเช่นเดียวกัน

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y^5 - 12x^2 y^4 - 9x^4 y^2 + x^6 y}{(x^4 + 4y^3)^2}$

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_1}{F_3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_2}{F_3}$

6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{F_1 F_3 F_{13} + F_1^2 F_{33} - F_3^2 F_{11}}{F_3^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{F_1 F_3 F_{23} + F_2 F_3 F_{13} - F_1 F_2 F_{33} - F_3^2 F_{12}}{F_3^3}$

∴ $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,t)} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \frac{dy}{dt} = - \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$

8. หาคอนุพันธ์สมการมุงค่อ x และให้ $t = 1$

9. ใช้ทฤษฎีบทของเทเลอร์แสดง $f(p + \Delta p)$ ในรูป $f(p) + R(\Delta p)$ สำหรับจุดใดๆ p ใน S แล้วใช้ความจริงที่ว่า f_{11}, f_{12}, f_{22} ต่อเนื่อง (และเพราะฉะนั้นมีขอบเขต) บน S ประมาณค่า $R(\Delta p)$

10. ให้ p และ q อยู่ใน S , ค่าย $p = (\phi(a), \psi(a))$, $q = (\phi(b), \psi(b))$ แบ่งช่วง $[a, b]$ ค่ายจุด t_j โดย $t_0 = a$, $t_n = b$ ให้ $P_j = (\phi(t_j), \psi(t_j))$ แล้ว
- $$|f(p) - f(q)| \leq \sum |f(P_{j+1}) - f(P_j)| \leq M \sum |P_{j+1} - P_j|^2 \quad \text{จงแสดงว่าผลบวก}$$
- สามารถทำให้น้อยอย่างไรก็ได้โดยการเลือก t_j
11. $\phi(1) = 1$, $\phi'(1) = a(1 + b + b^2) + b^3$

แบบฝึกหัด 1.4

- ค่าผิดพลาดไม่เกิน $\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} < .0014$
 - โดยทฤษฎีบทของเทเลอร์ได้ $|ค่าผิดพลาด| < \frac{1}{5}$. ค่าผิดพลาดจริงๆ ไม่เกิน .07
 - 6, 11
 - ใช้ทฤษฎีบทของเทเลอร์ที่ $x = 0$ และประมาณ $f(1)$ และ $f(-1)$ และได้
- $$f^{(3)}(\tau_1) + f^{(3)}(\tau_2) = 6$$
- ใช้ทฤษฎีบทของเทเลอร์ที่ $t = x$ ประมาณค่า $|f'(x)|$ แล้วประมาณค่า $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f'(x)|$
ข้อสังเกตหลายฟังก์ชันที่ $f(x) \rightarrow 0$ โดยที่ $f'(x) \neq 0$ เมื่อ $x \rightarrow \infty$
 - เรามี $\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x^{1+\delta}} + \frac{1}{x^{1-\delta}} \right\}$ สำหรับ δ ใดๆ ที่ $0 < \delta < 1$
อินทิเกรตและหา $\log x < \frac{1}{2\delta} (x^\delta - x^{-\delta})$ แล้วให้ $\delta = \frac{1}{2}$
 - ใช้ $e^x \geq \frac{e^2}{4} x^2$ และเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ที่มากที่สุด
 - $|R_n(x)| \leq \frac{B^n(x-a)^n}{n!} \rightarrow 0$
 - ได้ $f(x) \approx f(a) - f'(a)(x-a) + \frac{f''(\tau)(x-a)^2}{2}$ ให้ $x = 0$,
 $x = 1$ และลบกัน ก็จะได้ $|f'(a)| \leq \frac{\Lambda}{2} [a^2 + (1-a)^2]$

-80

$$10. |f(a)| = \left| \int_0^a f' \right| \leq M \int_0^a |f|$$

11. จงแสดงว่าสำหรับ x_0 ใดๆ มี m และย่านของ x_0 ซึ่ง

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) \equiv 0$$

แบบฝึกหัด 2.1

1. $M - f(p)$ เป็นบวก ดังนั้น $\iint_D (M-f) = MA(D) - \iint_D f \geq 0$
2. เหมือนข้อ 3. แสดงว่า $\iint_D fg$ อยู่ระหว่าง $M \iint_D g$ และ $m \iint_D g$ แล้วใช้ทฤษฎีบทค่าขึ้นสูงเพื่อหาจุด p ที่

$$f(p) = \left\{ \iint_D fg \right\} \left\{ \iint_D g \right\}^{-1}$$

3. มีย่านที่ $f(p) \geq \delta$
4. ใช้, 0
5. เขียนภาพคร่าว ๆ และอธิบายความหมายของการประมาณค่าทั้งสองในรูปเรขาคณิต
6. ใช้ความต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายของ f
7. แบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ และให้ปกคลุมเส้นโดยสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหลายด้วยพื้นที่รวมที่น้อย ๆ ใช้ความต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายของ f และ B เช่นเดียวกับค่าเสมอต้นเสมอปลายของ Lipschitz สำหรับ g

แบบฝึกหัด 2.2

$$1. (a) F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ x & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases} \quad (b) F(x) = (e^x - 1) e^{e^x}$$

2. (c) ไม่ใช่ 3. โดยการแทนค่า $v = \frac{1}{u}$

4. ให้ $F' = f$ และคำนวณค่าทั้งสองข้าง

5. มีค่าตอบมากมายแต่คำตอบหนึ่งคือ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}$$

6. $\int_0^1 dy \int_1^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$

7. ช่วงว่างแรกประกอบด้วย $\sqrt{\frac{y}{2}} f(y)$

8. $\frac{1}{20}$

9. $\int_0^2 dx \int_x^2 dz \int_1^{2-\frac{1}{2}x} f(x, y, z) dy$

$$\int_1^2 dy \int_0^{4-2y} dx \int_x^2 f(x, y, z) dz$$

$$\int_0^2 dz \int_0^z dx \int_1^{2-\frac{1}{2}x} f(x, y, z) dy$$

$$\int_1^2 dy \int_0^{4-2y} dz \int f(x, y, z) dx + \int_1^2 dy \int_{4-2y}^2 dz \int_0^{4-2y} f(x, y, z) dx$$

$$\int_0^2 dz \int_1^{2-\frac{1}{2}x} dy \int_0^z f(x, y, z) dx + \int_0^2 dz \int_{2-\frac{1}{2}x}^2 dy \int_0^{4-2y} f(x, y, z) dx$$

10. $\frac{44}{15}$

11. (a) $\frac{e-1}{2}$; (b) $\frac{1}{2} e^4 - e^2$

12. สลับลำดับการอินทิเกรตคือ $\int_{-\sqrt[3]{6}}^0 dy \int_{-6}^{y^3} xy dx + \int_0^2 dy \int_{7y-6}^{y^3} xy dx$

13. ใช้ความต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายของ f

14. แบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมผืนผ้าในครึ่งหนึ่งประมาณ .17558 ซึ่งตีใน .015 ให้เล็กลงไปอีกได้ .17447 คำตอบที่ถูกต้อง

$$13 \log 13 + 10 \log 10 - 12 \log 12 - 11 \log 11$$

เขียนใหม่ได้ $2 \log \frac{13}{12} + \log \frac{13}{11} - 10 \log \left[1 + \frac{2}{130} \right]$ และใช้ออนุกรมกำลังจะได้

.174465 ตีในหลักสุดท้าย

15. พิจารณา $\int_a^b (f + \lambda g)^2$ ซึ่งไม่เป็นลบ
16. (a) น้อยกว่า $\sqrt{\frac{5}{2}}$; (b) น้อยกว่า $\sqrt{2\pi}$
17. พิสูจน์สำหรับ $P(x) = 1, x, x^2$ และ x^3 ในทางกลับ
18. (a) $\frac{3e^{x^3} - 2e^{x^2}}{x}$; (b) $3 \cos(12x) - 2 \cos(8x)$
19. จำนวน $\int_0^1 dx \int_0^1 |y - x| dy$

แบบฝึกหัด 2.4

- พื้นที่ $= \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
- (a) ลู่ออก (b) ลู่ออก (c) ลู่ออก (d) ลู่เข้า (e) ลู่เข้า (f) ลู่เข้า (g) ลู่เข้า (h) ลู่ออก
- (a) ลู่ออก (b) ลู่เข้า (c) ลู่เข้า (ไม่ใช่อินทิกรัลไม่ตรงแบบ) (d) ลู่เข้า (e) ลู่เข้า (f) ลู่เข้า (g) ลู่ออก (h) ลู่เข้า
- ไม่ $\infty < 1$ และ $\beta > 1$ ก็ $\infty > 1$ และ $\beta < 1$
- ทุกช่วง (∞, β) ซึ่ง $\infty > -1, \beta > -1$ และ $\infty + \beta < -1$
- ใช้คำนวณค่าครั้งแรกของ $\int_r^R dx \int_0^x x^{-\frac{2}{3}} e^{y-x} dy$ และทดสอบผลลัพธ์อินทิกรัลเมื่อ $r \rightarrow 0^+, R \rightarrow \infty^-$
- ลู่ออก 8. ลู่เข้า 9. ใช้ทฤษฎีบทค่าชั้นสูง
- (b) ลำดับ $\int dx \int dy$ ยาก

แบบฝึกหัด 3.1

- (a) ลู่ออก (b) ลู่ออก (c) ลู่เข้า
- (a) $a_n = \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \approx \frac{1}{2n}$ ลู่เข้า
(b) $a_n \approx \frac{1}{n}$ ลู่ออก
- (b) ใช้ $b_n = \frac{1}{n-1}$ สำหรับ $n \geq 2$
(c) ใช้ $b_n = \frac{1}{n-A-1}$ สำหรับ $n \geq A+2$
- แบ่งอนุกรมเป็นช่วงโดยมีความยาว 1, 2, 4, 8, ...
- ใช้ logs
- (b) ไม่จริง (c) จริง (d) จริง ใช้ Schwarz inequality (f) ผลบวกจาก $n+1$ ถึง $2n$
- ให้ $a_k = \frac{ak}{\sqrt{k}}$ แล้วใช้ Schwarz inequality

แบบฝึกหัด 3.2

- ใช้การทดสอบแบบโครีชเลต
- (a) $-1 \leq r < 1$ (b) $x = 0$ (c) $-3 \leq x \leq -1$
(d) $|x| \leq \frac{1}{4}$ (e) $|x-1| \leq \sqrt{3}$ (f) $s > 0$
(g) $-e^{-1} \leq \beta < e^{-1}$ (h) $\gamma > \alpha + \beta$ (i) $-1 < x \leq 1$
(j) $-\infty < x < \infty$ (k) $x > -1$ หรือ $x \leq -2$
(l) $x \leq 0$ หรือ $x > 2$ (m) ทุก x
- (a) 0 (b) e (c) ∞ ถ้า $c < 1$, 1 ถ้า $c = 1$, 0 ถ้า $c > 1$
- พิจารณา $\sum (p_n +, - p_n)$

แบบฝึกหัด 3.3

1. $\frac{2^n + 1 + (-1)^n}{3}$
2. $-2 < x < 1$

แบบฝึกหัด 3.4

1. ประมาณ 10^{9559} พจน์
2. (b) $\frac{(\log n)^2}{2} + o(1)$ เมื่อ $o(1)$ หมายถึงพจน์ขอบเขต
3. รัศมีของการหมุนรอบ $2L$
4. (a) $S = -.0826$ ผิดพลาดน้อยกว่า .0005
(b) $S = .904412$ ผิดพลาดน้อยกว่า .005
5. $\sum_1^N k^3 = P(N)$ เมื่อ P เป็นพหุนามกำลัง 4
6. เขียนพจน์ต่างๆ ไปเป็น $\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n-b}$
7. ใช้สูตรของสเตอร์ลิง
16. ทดสอบผลบวกในบางส่วน

แบบฝึกหัด 4.1

1. ใช่, ไม่ใช่, ใช่
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^2} = \sum \frac{1}{n^2}$
3. ทดสอบ $\int_0^L f_n$ และ $\int_L^\infty f_n$
4. แบ่งช่วงในการอินทิเกรตเป็น $[-1, -c]$, $[-c, c]$ และ $[c, 1]$ และแสดงว่าอันแรกและอันสุดท้ายมีค่าน้อยมากเมื่อ n มีค่ามากในขณะที่อินทิกรัลที่เหลือเข้าใกล้ $g(0)$
5. ถ้า g อยู่ในทุกเซต C_n แล้วจะปรากฏข้อขัดแย้ง ดังนั้นเซตร่วม (intersection of finitely many) เป็นเซตเปล่า

แบบฝึกหัด 4.2

1. (b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots$

(c) $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \dots$

2. (a) $x \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \right\} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$; (c) $\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

3. (a) ไม่ใช่ (b) ใช่ 4. ใช้บทแทรกของทฤษฎีบท 4.1 1

5. ถ้า $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ แล้ว $w^2 + w + 1 = 0$

6. $\frac{y}{F(x)} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots - 96x^7 + \dots$

7. $\frac{1}{F(x)}$ เป็นพหุนาม

8. ถ้า $\phi = \angle QPC$ แล้ว $\tan \phi = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{72} + \dots$, จาก

แต่ละอันอาจหาว่า $\phi = \frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{648} + \dots$

แบบฝึกหัด 4.3

1. 0 2. ∞ 3. $\frac{\pi}{2} |x|$ 4. $\frac{\pi}{2}$ (พยายามการแทนต่าง ๆ)

5. หาอนุพันธ์แล้วอินทิเกรตทีละส่วน

6. หาค่าต่ำสุดของ $g(t)$ สังเกตแต่ละ $x \geq 1$

7. วนวนแต่ละข้าง (แม้ว่า $|G(x,y)| \leq \frac{1}{x^2}$ สำหรับ $1 \leq y$

ดังนั้นภายในอินทิกรัลคู่เข้าเสมอทันเสมอปลาย)

แบบฝึกหัด 4.4

1. ให้ $t = \frac{s}{y}$

2. (b) ให้ $A(x) = \theta$

3. (a) $\frac{\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{1}{2})}{3 \Gamma(\frac{11}{6})}$ (b) $\sqrt{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2\pi}$ (c) $-\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})$

(b) $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})$

4. $\frac{1}{q} \Gamma(\frac{p+1}{q})$ 5. $\frac{\Gamma(s+1)}{(r+1)^s + 1}$

6. (a) $\text{Le}^{-\frac{1}{L^2}} + \sqrt{\pi} \text{erf} \left(\frac{1}{L} \right) - \sqrt{\pi}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{erf} (1) - \frac{1}{2c}$

(c) $F(x)$ อยู่ในรูป $\frac{A}{\sqrt{x}}$