บทที่ 4

การลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย
Uniform Convergence

4.1 คำนำ

บทนี้เป็นบทที่เริ่มเพิ่มพูนความรู้ในทางคณิตศาสตร์ให้ละเอียดและแน่นขึ้นเพื่อเป็นการเร่งเร้าในบทนี้จะเริ่มด้วยตัวอย่างที่มีตัวเลขที่มีความหมายสองความหมาย (a number of paradoxical examples) แสดงการกระทำด้วยขบวนการที่มีเหตุผลแต่ได้คำตอบผิด แต่ละอันขบวนการเปลี่ยนแปลงภายใน ในขบวนการลิมิต

หัวใจของเนื้อเรื่องคือความเสมอต้นเสมอปลาย (uniformity) สำหรับอนุกรมและลำดับในหัวข้อ 4.4 สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบอนุกรมของฟังก์ชันที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย (uniformly convergent) ได้นำมาศึกษาให้เด่นชัดซึ่งอาจกล่าวในแง่ของจุดลู่เข้า รวมทั้งในแง่พจน์ในทำนองค่าลิมิตภายใต้เครื่องหมายผลบวก (Σ) และอื่น ๆ ขอบเขตของสิ่งเหล่านี้กระทำโดยร่างการพิสูจน์ทฤษฎีบทนำไปสู่การขยายออกของ Tietze (สำหรับเซตของ n–ปริภูมิ)และโดยการสร้างตัวอย่างมาตรฐานของฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุดใด ๆ เลย

ส่วนที่สำคัญของหัวข้อ 4.3 และ 4.4 จะแสดงในวิธีการที่เป็นประโยชน์สำหรับหาค่าของอินทิกรัลและผลบวกของอนุกรมกำลัง เช่นเดียวกันสำหรับหัวข้อ 4.5 (ซึ่งไม่เป็นประโยชน์ใด ๆ กับเรื่องอื่น ๆ อีกแล้ว คือจบในตัวของมันเอง) จะกล่าวถึงฟังก์ชันแกมมาและเบตา (gamma and beta functions) และประกอบด้วยความแปรปรวนของสูตรของสเตอร์ลิงซึ่งแสดงว่าจะหาความเป็นไปของแอเซมโทตของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

4.2 อนุกรมและลำดับของฟังก์ชัน

Series and seguences of functions

ในบทที่แล้วได้ศึกษาการลู่เข้าของอนุกรมซึ่งพจน์มีอิทธิพลต่อตัวแปรเสริมหรือตัวแปรตัวเดียวและมากกว่าตัวเดียว ในแง่ของประโยชน์ที่จะได้รับจะประกอบด้วยสัญการของการลู่เข้าของฟังก์ชันซึ่งสามารถให้สูตรได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 4.1 *ให้แต่ละฟังก์ชันที่กำหนดค่าได้* u_n *ของจุดของเขต* D *แล้ว* Σu_n *กล่าวได้ว่าลู่เข้าในแง่ของจุดบนเขต* $E \subseteq D$ *ต่อเมื่อ* $\Sigma u_n(p)$ *ลู่เข้าสำหรับทุก* $p \in E$ *เท่านั้น*

ถ้ากำหนดผลบวกของ $\Sigma u_n(p)$ ด้วย $F(p)$ แล้วกล่าวได้ว่า Σu_n ลู่เข้าในแง่ของจุดเข้าสู่ F บน E สำหรับลำดับใช้นิยามเช่นเดียวกัน $\{f_n\}$ ลู่เข้าในแง่ของจุดสู่ F บน E ถ้าสำหรับแต่ละจุด $p \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p) = (p)$

จำนวนที่มีความสำคัญอื่น ๆ และใช้เป็นการลู่เข้าของอนุกรมและลำดับของฟังก์ชันก่อนที่จะได้แนะนำจำนวนเหล่านี้กลับมาสังเกตสั้น ๆ เกี่ยวกับการลู่เข้าในแง่ของจุด แต่ละตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวแทนที่น่าจะเป็นไปได้แต่โชคร้ายไม่สมเหตุสมผล ข้ออภิปรายกระทำกับอนุกรมหรือลำดับของฟังก์ชัน

พิจารณาอนุกรม

$$(4-1) \qquad \sum_{1}^{\infty} x(1-x)^n = x(1-x) + x(1-x^2) + x(1-x^3) + \ldots$$

วิธีการมาตราฐานจากบทเรียนที่แล้วแสดงว่าลู่เข้าสำหรับแต่ละ x ซึ่ง $0 \leqslant x < 2$ สำหรับค่าเหล่านี้ ให้ผลบวกของอนุกรมเป็น $F(x)$ สังเกตว่า $(4-1)$ ลู่เข้าสำหรับ $x = 0$ และดังนั้น $F(0) = 0$ พิจารณาคำถามต่อไป

(4–2) ค่าใดคือ $\lim_{x \to 0^+} F(x)$

ทดสอบจาก (4–1) สังเกตว่า $\lim_{x \to 0} x(1-x)^n = 0$ หมายความว่าถ้าปล่อยให้ x เข้าใกล้ 0 ในอนุกรมในแต่ละพจน์โดยแยกกันก็จะได้อนุกรม 0 + 0 + 0+ . . ข้อความข้างบนนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ ปัญหาก็อยู่ที่ว่าสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นโดยอนุกรมโดยการหาค่าลิมิตในแง่ของพจน์หรือไม่ จาก (4–1)

$$F(x) = x(1-x) + x(1-x)^2 + x(1-x)^3 + \ldots$$

$$= x(1-x)\left[1-(1-x)+(1+x)^2+(1-x)^3+\ldots\right]$$

ซึ่งอนุกรมเรขาคณิตจึงได้

$$F(x) = x(1-x)\ \frac{1}{1-(1-x)}$$

$$= 1-x$$

ดังนั้นค่าที่ถูกต้องสำหรับ $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1$ ไม่ใช่ 0

ตัวอย่างที่สองพิจารณาอนุกรม

(4–3) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} = \frac{x^2}{1+x^3} + \frac{2x^2}{8+x^3} + \frac{3x^2}{27+x^3} + \ldots$$

ลู่เข้าสำหรับทุก x, $0 \leqslant x < \infty$ เนื่องจาก

$$\frac{n\,x^2}{n^3+x^3} \leqslant \frac{n\,x^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}$$

และอนุกรม $\Sigma\ \frac{n^2}{x^2}$ ลู่เข้า ถ้าให้ F(x) แทนผลบวกของ (4–3) ครั้งนี้ถามว่า

(4–4) ค่า $\lim_{x \to \infty} F(x)$ มีค่าเท่าไร

ถ้ามองดูความเป็นไปของแต่ละพจน์ของอนุกรมแยกกันพบว่า
$\lim_{x\to\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} = 0$ ดังนั้นในแง่ของพจน์อนุกรมสำหรับ F(x) มีค่าเข้าใกล้ 0 ก็เสนอได้ว่า
คำตอบของ (4–4) เป็น 0 ความจริงผิดเนื่องจากสำหรับ $x > 0$ ใด ๆ แล้วสำหรับทุก n ซึ่ง
$\frac{x}{2} < n < 2x$ เราได้

$$\frac{nx^2}{n^3+x^2} \geqslant \frac{\left(\frac{x}{2}\right)x^2}{(2\ x)^3 + x^3} - \frac{1}{18}$$

ในอนุกรมสำหรับ F(x) เพราะฉะนั้น $(2x - \frac{x}{2})$ พจน์แต่ละพจน์มากกว่า $\frac{1}{18}$ เนื่องจากแต่ละ
พจน์ของอนุกรมเป็นบวก $F(x) \geqslant \frac{3x}{2}\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{x}{12}$ เป็นจริงสำหรับทุก x ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty^-} F(x) = \infty$$

สำหรับตัวอย่างที่สามพิจารณา

(4–5) $$\sum_{1}^{\infty}\left[(n+1)x - n\right]x^n = (2x-1)x + (3x-2)x^2 + (4x-3)x^3 + \ldots$$

ผลบวกของ F(x) นี้ ค่า $\lim_{x\to 1} F(x)$ มีค่าเท่าไร ในแง่ของพจน์จึงพบว่า
$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ ก็แน่ใจว่า $\lim_{x\to 1} F(x) = \infty$ อย่างไรก็ดีถ้ากระจายแต่ละพจน์ของ
อนุกรมเดิมจึงได้

$$(2x^2 - x) + (3x^3 - 2x^2) + (4x^4 - 3x^3) + \ldots$$

ซึ่งเป็นอนุกรม telescoping ซึ่งผลบวกย่อยเป็น $-x + nx$" เพราะฉะนั้นลู่เข้า $F(x) = -x$
สำหรับทุก $|x| < 1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 1} F(x) = -1$$

ตัวอย่างต่อไปอีกสองตัวอย่างเกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรต
พิจารณาอนุกรม

(4–6) $\quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2} = F(x)$

ซึ่งลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์สำหรับทุก x ถ้าหาอนุพันธ์ในแง่ของพจน์ก็จะได้

$$\sum_{1}^{\infty} \cos(n^2x) = F'(x)$$

อย่างไรก็ดีความจริงอันนี้เป็นข้อสงสัยเนื่องจากอนุกรมสามารถทราบได้ว่าลู่ออกสำหรับทุก x (พจน์ไม่เข้าใกล้ 0)

สุดท้ายเราจะคำนวณค่าของ

(4–7) $\quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2xe^{-nx}dx$

สำหรับทุกค่าของ x ซึ่ง n^2xe^{-nx} มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ n เพิ่มขึ้น เนื่องจาก e^{nx} มีค่าเพิ่มเร็วกว่า n^2 ดังนั้นตัวถูกอินทิเกรต มีค่าเข้าใกล้ 0 ในแง่ของจุดสำหรับทุก x ซึ่ง $0 \leqslant x \leqslant 1$ และอาจสรุปได้ว่าค่าลิมิต (4–7) ต้องเป็น 0 อย่างไรก็ดีถ้าให้ $u = nx$ อินทิกรัลก็กลายเป็น

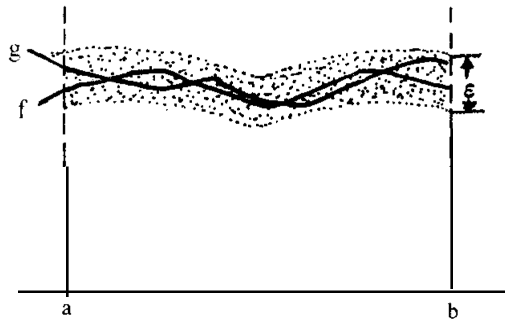
$$\int_0^n ue^{-n}du = 1 - (n+1)e^{-n} \to 1 \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

ตัวอย่างที่ให้เข้าใจเป็นสองแง่เหล่านี้ทำให้ได้ค่าลิมิตสองค่าสำหรับวิธีการคำนวณสองอย่าง ในขั้นต้นเราถูกให้ยอมรับความเท่ากันของ

(4–8) $\quad \lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} u_k(x)$ และ $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} \sum_{1}^{n} u_k(x)$

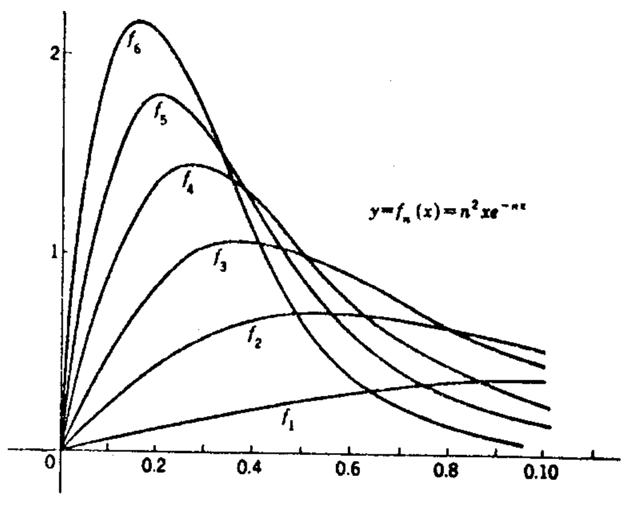
ในสองตัวอย่างสุดท้าย อาจจะไม่ใคร่ปรากฏแต่การอินทิเกรตและการหาอนุพันธ์ทั้งสองแตกออกไปจากวิธีการลิมิตทั้งสิ้น

ในแวดวงเหล่านี้ความรู้เกี่ยวกับการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมหรือของลำดับของฟังก์ชันจำเป็นจะต้องนำมาใช้ประโยชน์เพื่อให้ง่ายในการศึกษาจะได้แนะนำสัญลักษณ์พิเศษถ้า f เป็นฟังก์ชันก์ซึ่งกำหนดบนเซต E แล้ว $\|f\|_E$ แทนขอบเขตข้างบนต่ำสุด (least upper bound) ของเซตของค่า $\left|f(p)\right|$ สำหรับ $p \in E$ เมื่อ f ต่อเนื่องบน E และ F เป็นเซตปิดและมีขอบเขต ก็คือค่าสูงสุดของ $\left|f(p)\right|$ บน E ถ้า f และ g กำหนดค่าได้บน E แล้ว $\left\|f-g\right\|_E$ ก็คือการวัดระยะทางระหว่าง f และ g เบื้องบน (over) เซต E ถ้า $\left\|f-g\right\|_E < \varepsilon$ แล้ว $\left|f(p)-g(p)\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $p \in E$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันประมาณฟังก์ชัน g ภายใน ε คงตัวบน E ดังรูป 4–1



รูป 4–1 $\left\|f-g\right\|_{[a,b]} < \varepsilon$

นิยาม 4.2 *ลำดับของฟังก์ชัน* $\{f_n\}$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายเข้าสู่ฟังก์ชัน* F *บนเซต* E *ต่อเมื่อ* $\lim_{n\to\infty} \left\|F-f_n\right\|_E = 0$



รูป 4.2 ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย

ถ้าจะกล่าวเสียใหม่ซึ่งไม่ใช้สัญลักษณ์พิเศษก็กลายเป็น $\{f_n\}$ **ลู่เข้าสู่** F **อย่างเสมอต้นเสมอปลายบน** E **ก็ต่อเมื่อสำหรับ** $\varepsilon > 0$ **ใด ๆ มีจำนวน** N **ซึ่งสำหรับ** $n \geqslant N$ **ใด ๆ และ** p **ใด ๆ ซึ่ง** $p \in E, \left| F(p) - f_n(p) \right| < \varepsilon$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนเซต E แล้วจะต้องลู่เข้าในแง่ของจุดอย่างน้อยทุกจุดของ E อย่างแน่นอน อย่างไรก็ดีอาจจะลู่เข้าในแง่ของจุดบน E และอาจไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน E ตัวอย่างลำดับ

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx}$$

พบว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าในแง่ของจุดเข้าสู่ 0 บนช่วง $E = [0, 1]$ การลู่เข้าไม่เสมอต้นเสมอปลายบน E ค่าสูงสุดของ f_n บน E ปรากฏเมื่อ $x = \frac{1}{n}$ และที่จุดนี้ $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e}$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n \|_E$ ไม่ใช่ 0 ความเป็นไปเช่นนี้ก็คือความเป็นไปตามกราฟของ $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ดังรูป 4–2 **นิยามของการลู่เข้าในแง่ของจุดสามารถจะกล่าวได้ว่า** $\{f_n\}$ **ลู่เข้าสู่** F **ในแง่ของจุดบน** E **ก็ต่อเมื่อสำหรับ** $\varepsilon > 0$ **ใด ๆ และจุด** p **ใด ๆ ซึ่ง** $p \in E$ **มีจำนวนเต็ม** N **ซึ่งเมื่อใดก็ตามที่** $n \geqslant N$ **แล้ว** $\left| F(p) - f_n(p) \right| < \varepsilon$ เมื่อเปรียบเทียบกับนิยามของการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายจะพบว่าข้อแตกต่างที่เป็นประโยชน์อยู่ที่ N ขึ้นอยู่กับ ε ในขณะที่การลู่เข้าในแง่ของจุด N ขึ้นอยู่กับทั้ง ε และ p

สำหรับการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมกำหนดได้โดยการโยนกลับไปยังอนุกรมของผลบวกย่อย **ดังนั้น** $\sum\limits_1^\infty u_k$ **ลู่เข้าสู่** F **อย่างเสมอต้นเสมอปลายบน** E **ต่อเมื่อ** $\{f_n\}$ **ลู่เข้าสู่** F **อย่างเสมอต้นเสมอปลายเมื่อ** $f_n = \sum\limits_1^n u_k$ **เท่านั้น กล่าวอีกอย่างว่า** $\sum u_n$ **ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน** E **ต่อเมื่อ** $\sum u_n$ **ลู่เข้าในแง่ของจุดบน** E **และ** $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_n^\infty u_k \right\|_E = 0$ **เท่านั้น**

บ่อยครั้งที่คัดลอกจุดนี้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นบนเซต E ร่วมกับสามารถยอมรับว่าเป็นจุดในทางเรขาคณิตที่เรียกกันตามธรรมดาว่าฟังก์ชันปริภูมิและการวัด (metric) หรือวัดระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดขึ้นโดย $\| f - g \|_E$ ก็สามารถจะให้เราใช้คำในทางเรขาคณิตและ

วิเคราะห์เพื่อช่วยให้เข้าใจและการคำนวณ ตัวอย่างเช่นลำดับของฟังก์ชัน f_n กล่าวได้ว่ามีคุณสมบัติโคชี (Cauchy Property) เสมอต้นเสมอปลายบนเซต E ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ มีจำนวนเต็ม N ซึ่ง $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N$ และ $m > N$ ก็จะได้ว่า $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \| f_n - f_m \| = 0$ ลำดับที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายใด ๆ ย่อมมีคุณสมบัติโคชีสำหรับถ้า

$\{f_n\} \to F$ เสมอต้นเสมอปลายบน E แล้วสำหรับจุดใด ๆ $p \in E$,

$$\begin{aligned} | f_n(p) - f_m(p) | &= | f_n(p) - F(p) + F(p) - f_m(p) | \\ &\leq \| f_n - F \|_E + \| F - f_m \|_E \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \| f_n - f_m \| = 0$ และบทกลับเป็นจริงด้วย

ทฤษฎีบท 4.1 *ถ้า* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \| f_n - f_m \| = 0$ *แล้วย่อมมีฟังก์ชัน* F *ซึ่งลำดับ* $\{f_n\}$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน* E

พิสูจน์ เนื่องจาก $| f_n(p) - f_m(p) | \leq \| f_n - f_m \|_E$ สำหรับแต่ละจุด $p \in E$ ลำดับ $\{f_n(p)\}$ เป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ของจำนวนและเพราะฉะนั้นลู่เข้า กำหนด F โดย $F(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(p)$, F เป็นค่าลิมิตในแง่ของจุดของ f_n บน E การแสดงว่าลู่เข้าซึ่งก็คือการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับจุด p ใด ๆ ซึ่ง $p \in E$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} | F(p) - f_n(p) | &= | F(p) - f_k(p) + f_k(p) - f_n(p) | \\ &\leq | F(p) - f_k(p) | + | f_k(p) - f_n(p) | \\ &\leq | F(p) - f_k(p) | + \| f_k - f_n \|_E \end{aligned}$$

เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ ขึ้นเลือก N ดังนั้น $\| f_k - f_n \|_E < \varepsilon$ เมื่อใดก็ตามที่ $n \geqslant N, k \geqslant N$ สำหรับแต่ละ $p \in E$, $\lim_{k\to\infty} f_k(p) = F(p)$ แล้วสามารถเลือก k ที่มีค่ามากกว่า N และขึ้นอยู่กับ p และ ε ดังนั้น $\left| F(p) - f_k(p) \right| < \varepsilon$ กระทำการเลือก k ด้วยวิธีนี้ในความไม่เท่ากับข้างบนจึงได้

$$\left| F(p) - f_n(p) \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ยึดสำหรับแต่ละ $n \geqslant N$ และแต่ละจุด $p \in E$ ดังนั้น

$$\| F - f_n \|_E < 2\varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geqslant N$ และ $\{f_n\}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายเข้าสู่ F บน E □

ปริภูมิของฟังก์ชันบริบูรณ์ (Complete) มุ่งต่อการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับอนุกรมสิ่งที่สมนัยกันอาจกล่าวได้ดังนี้

บทแทรก *ถ้า* $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left| \sum_{n}^{m} u_k \right|_E = 0$ *แล้ว* Σu_k *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย*

การทดสอบที่ง่ายและมีประโยชน์มากสำหรับการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายเป็นการทดสอบแบบเปรียบเทียบและบางทีก็เรียกว่า M test

ทฤษฎีบท 4.2 (Weierstrass Comparison Test) *ถ้า* $\| u_k \| \leqslant M_k$ *สำหรับทุก* k *และ* $\sum_{1}^{\infty} M_k$ *ลู่เข้าและ* $\sum_{1}^{\infty} u_k$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน* E

พิสูจน์ สำหรับจุด p ใด ๆ ที่ $p \in E$, $|u_k(p)| \leqslant M_k$ ดังนั้นโดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบธรรมดา (ทฤษฎีบท 3.5) $\sum_{1}^{\infty} u_k(p)$ ลู่เข้าในแง่ของจุดบน E การประมาณค่าในตอนท้าย ๆ ของอนุกรมเสมอต้นเสมอปลายจึงได้

$\left| \sum_{n}^{\infty} u_k(p) \right| \leqslant \sum_{n}^{\infty} M_k$ สำหรับทุก $p \in E$

และดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum_{n}^{\infty} u_k \right\|_E \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n}^{\infty} M_k = 0$ □

นั่นคือเป็นการพิสูจน์การลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของ $\Sigma\, u_k$ บน E □

ตัวอย่างการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของ $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ สำหรับทุก x ซึ่ง $-\infty < x < \infty$ เนื่องจาก $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ และ $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า ทฤษฎีบทต่อไปเป็นคุณสมบัติที่สำคัญของการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย

ทฤษฎีบท 4.3 *ถ้า* $\{f_n\}$ *ลู่เข้าสู่* F *เสมอต้นเสมอปลายบน* E *และแต่ละ* f_n *ต่อเนื่องบน* E *แล้ว* F *ต่อเนื่องบน* E *ด้วย*

พิสูจน์ การพิสูจน์ว่า F ต่อเนื่องที่จุดใด ๆ $p_0 \in E$ ก็ต้องกำหนด $\varepsilon > 0$ ประการแรกก็เลือก N ซึ่ง $\| F - f_N \|_E < \varepsilon$ สำหรับจุดใด ๆ $p \in E$ จะเขียนได้ว่า

$$\left|F(p) - F(p_0)\right| = \left|F(p) - f_N(p) + f_N(p) - f_N(p_0 + f_N(p_0) - F(p_0)\right|$$

$$\leqslant 2\| F - f_N \|_E + \left|f_N(p) - f_N(p_0)\right|$$

$$< 2\varepsilon + \left|f_N(p) - F_N(p_0)\right|$$

เนื่องจาก f_N ต่อเนื่องบน E ก็สามารถเลือก $\delta > 0$ ซึ่ง $\left|f_N(p) - f_N(p_0)\right| < \varepsilon$ เมื่อ $p \in E$ และ $\left|p - p_0\right| < \delta$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$\left| F(p) - F(p_0) \right| < 3\varepsilon$

เมื่อใดก็ตามที่ $p \in E$ และ $\left| p - p_0 \right| < \delta$

นั่นคือ F ต่อเนื่องที่จุด p_0 □

จึงสร้างบทแทรกได้ว่า

บทแทรก *ถ้าแต่ละฟังก์ชัน* u_k *ต่อเนื่องบนเซต* E *และ* $\sum u_n$ *ลู่เข้าสู่* F *อย่างเสมอต้นเสมอปลายบน* E *แล้ว* F *ต่อเนื่องบน* E

ทฤษฎีบท 4.3 และบทแทรกสามารถจะให้รายละเอียดในพจน์ของโทโปโลยี ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน E และทฤษฎีบท 4.3 กล่าวว่าเซต $\mathcal{C}$ เป็นเซตปิดในปริภูมิของทุกฟังก์ชันบน E

บทแทรกมีคำอธิบายอีกอันหนึ่งว่า ความสัมพันธ์กับตัวอย่างซึ่งเราเริ่มต้นไว้ในหัวข้อนี้สำหรับข้อความที่สมมูลย์กันคือ

$$\lim_{p\to p_0} \sum_1^{\infty} u_n(p) = \sum_1^{\infty} u_n(p_0)$$

ซึ่งมีความหมายเดียวกันกับ (4 – 8) ประกอบด้วยความเปลี่ยนแปลงภายในการลิมิต

หันกลับมายังตัวอย่างซึ่งได้เปิดไว้ในตอนเริ่มต้นอนุกรม (4 – 1) เป็นอนุกรมของฟังก์ชันต่อเนื่องแต่ผลบวกไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งกำหนดขึ้นโดย $F(x) = 1$, $0 < x < 1$, $F(0) = 0$ อนุกรมนี้ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ ความจริงไม่สามารถลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนช่วงเปิด $0 < x < 1$ แม้ว่า F จะต่อเนื่องที่นั้นก็ตาม ที่แสดงได้โดยทฤษฎีบททั่ว ๆ ไป

ทฤษฎีบท 4.4 *ให้* E *เป็นโคลเชอร์ของเซตเปิด ให้* $\{f_n\}$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในเซตของจุดข้างในของ* E *สมมติว่าแต่ละฟังก์ชัน* f_n *ต่อเนื่องบน* E *แล้ว* $\{f_n\}$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน* E *ด้วย*

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก N ดังนั้น $|f_n(p) - f_m(p)| < \varepsilon$ เมื่อใดก็ตามที่ $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ และจุด p เป็นจุดข้างในของ E

เนื่องจาก f_n และ f_m ทั้งสองต่อเนื่องบน E ดังนั้น $\phi(p) = \left| f_n(p) - f_m(p) \right|$ และเนื่องจาก ϕ มี ε เป็นขอบเขตบนเซตของจุดข้างในของ E คือถูกจำกัดขอบเขตด้วย ε บนทุกจุดของ E

นั่นคือ $\| f_n - f_m \|_E < \varepsilon$ สำหรับทุก n และ m ซึ่ง $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ และ $\{ f_n \}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายโดยทฤษฎีบท 4.1 □

การประยุกต์ที่เป็นประโยชน์กับอนุกรมของฟังก์ชันต่อเนื่องคือ

บทแทรก *ให้* $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ *ลู่เข้าสู่* $F(x)$ *อย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก* x *ซึ่ง* $c \leqslant x < \infty$ *ให้* $\lim_{x \to \infty^-} u_n(x) = b_n < \infty$ *สำหรับ* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *แล้ว* $\sum_1^{\infty} b_n$ *ลู่เข้า และ* $\lim_{x \to \infty} F(x) = \sum_1^{\infty} b_n$

พิสูจน์ ให้ $x = \frac{1}{t}$ คำนวณอนุกรมของฟังก์ชันซึ่งลู่เข้าคงตัวสำหรับ $0 < t \leqslant a$ เนื่องจาก $\lim_{t \to 0} u_n\left(\frac{1}{t}\right) = b_n$ สามารถกำหนดที่ต่อเนื่องที่ $t = 0$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4.4 อนุกรมลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $0 < t \leqslant a$ และหาค่า

$$\lim_{t \to 0^+} F\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to \infty^-} F(x) \text{ ในแง่ของพจน์}$$

นั่นคือ $\lim_{x \to \infty^-} F(x) = \sum_1^{\infty} b_n$ □

กลับไปพิจารณาอนุกรม $(4-3)$ อนุกรม $F(x) = \sum_1^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนแต่ละช่วง $[0, R]$ เนื่องจาก $\left| \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \right| \leqslant \frac{nR^2}{n^3} = \frac{R^2}{n^2}$ และ $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า อย่างไรก็ดีก็ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนทั้งช่วงไม่มีขอบเขต $0 \leqslant x < \infty$ เนื่องจาก $\lim_{x \to \infty^-} F(x) = \infty$ แม้ว่า $\lim_{x \to \infty^-} \frac{nx^2}{n^3 + x^3} = 0$ สำหรับแต่ละ n

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นผลลัพธ์พื้นฐานซึ่งกระทำกับการอินทิเกรตอนุกรม หรือลำดับที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย ซึ่งจะได้กล่าวไว้ในสองมิติ

ทฤษฎีบท 4.5 *ให้ D เป็นเขตปิดที่มีขอบเขตในระนาบซึ่งมีพื้นที่และให้ฟังก์ชัน f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D ถ้า $\{f_n\}$ ลู่เข้าสู่ F เสมอต้นเสมอปลายบน D แล้ว*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D f_n = \iint_D F$$

พิสูจน์ $\iint_D F$ หาค่าได้เนื่องจาก F ต่อเนื่องบน D สำหรับ n ใด ๆ จึงได้

$$\left| \iint_D F - \iint_D f_n \right| = \left| \iint_D (F - f_n) \right|$$

$$\leqslant \iint_D \left| F - f_n \right|$$

$$\leqslant \left\| F - f_n \right\|_D A(D)$$

เนื่องจาก $\left\| F - f_n \right\|_D$ เป็นค่ามากที่สุดของ $\left|F(p) - f_n(p)\right|$ สำหรับ $p \in D$ และ

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| F - f_n \right\|_D = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_D f_n = \iint_D F$ □

ถ้า $\{f_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum\limits_1^\infty u_k$ แล้ว

$$\iint_D f_n = \iint_D (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)$$

$$= \iint_D u_1 + \iint_D u_2 + \iint_D u_3 + \ldots + \iint_D u_n$$

ซึ่งจะนำไปสู่บทแทรกต่อไป

บทแทรก *ถ้าแต่ละฟังก์ชัน* u_n *ต่อเนื่องบน* D *และ* $\sum_1^\infty u_k$ *ลู่เข้าสู่* F *เสมอต้นเสมอปลายบน* D *แล้ว* $\iint_D F = \sum_1^\infty \iint_D u_n$

โดยปกติอาจกล่าวสั้น ๆ ว่า อนุกรมที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายอาจอินทิเกรตในแง่ของพจน์ได้ ตัวอย่างเช่นพิจารณา $\sum_0^\infty (-t)^n$ ซึ่งลู่เข้าสู่ $\frac{1}{1+t}$ เสมอต้นเสมอปลายบนช่วง $-r \leqslant t \leqslant r$ สำหรับ $r < 1$ อินทิเกรตอนุกรมในแง่ของพจน์ระหว่าง 0 และ x, $|x| < 1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) = \sum_0^\infty (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ดังนั้นสำหรับ x ใด ๆ ซึ่ง $|x| < 1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

พิจารณาที่จุดปลายทั้งสองข้าง ที่ $x = 1$ ทราบแล้วว่าอนุกรมลู่เข้า ถ้า $x > 0$ อนุกรม $\sum_0^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ เป็นอนุกรมที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ และลู่เข้าสำหรับ $0 \leqslant x \leqslant 1$ โดยใช้ความจริงนี้ (ดูแบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 4) ผลบวกย่อยของอนุกรมที่มีผลบวกย่อยขึ้น ๆ ลง ๆ และลู่เข้าสู่ผลบวกและอยู่ระหว่างค่ามากน้อยเหล่านี้ ค่าความผิดพลาดจะไม่เลยผลบวกย่อยที่พจน์ถัดไปซึ่งจะกล่าวได้ว่า

$$\left| \log(1+x) - \sum_1^n (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

สำหรับแต่ละ x ซึ่ง $0 \leqslant x < 1$ อย่างไรก็ดีเนื่องจากทุกฟังก์ชันที่เปลี่ยนไปดังที่กล่าวแล้วต่อเนื่องที่ $x = 1$ และความไม่เท่ากันข้างบนเป็นจริงเมื่อ $x = 1$ ด้วย จึงแสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนช่วงปิด $[0, 1]$ และการอินทิเกรตในแง่ของพจน์เป็นจริงสำหรับทุก x ซึ่ง $0 \leqslant x \leqslant 1$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อให้ $x = 1$ จึงได้

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

ฟังก์ชัน $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$ ใน (4 – 7) ลู่เข้าสู่ 0 ในแง่ของจุดบนช่วง $[0, 1]$ แต่ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ และอินทิกรัล $\int_0^1 f_n$ ลู่เข้าสู่ 1 ไม่ใช่ 0 ทดสอบจากกราฟในรูป 4–2 พบว่า f_n มีความชันมากเมื่อเข้าใกล้จุดกำเนิดเข้าใกล้ได้เร็วกว่าการเพิ่มขึ้นของ n จะทิ้งพื้นที่ใต้เส้นเมื่อ n คงที่ไว้ก่อน

เพื่อให้เห็นความแตกต่างชัดเจนพิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = nxe^{-nx}$ ฟังก์ชันเหล่านี้ในแง่ของความเหมือนกันก็คือลู่เข้าสู่ 0 ในแง่ของจุด แต่ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ แต่อย่างไรก็ดีก็พบได้โดยง่ายจากการคำนวณ (4 – 7) ว่า $\int_0^1 g_n \to 0$ ข้อแตกต่างในที่นี้ก็คือ g_n เป็นขอบเขตเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ ไม่มีการหักเข้าของฟังก์ชัน g_n มากกว่า $\frac{1}{e}$

ตัวอย่างนี้เป็นความเข้าใจเบื้องต้นของทฤษฎีบทการลู่เข้าทั่ว ๆ ไปสำหรับฟังก์ชันที่มีขอบเขต ในขณะที่เป็นประโยชน์อย่างมาก การพิสูจน์ต้องการเทคนิคโดยต้องนำส่วนหนึ่งของทฤษฎีการวัดของเลอเบสจ์ (Lebesgue) ทฤษฎีบทจึงกล่าวแต่ผลลัพธ์โดยไม่ได้พิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.6 *ถ้าฟังก์ชัน* f_n *และ* F *สามารถอินทิเกรตได้บนเซตปิดที่มีขอบเขต* E *และ* $\{f_n\} \to F$ *ในแง่ของจุดบน* E, *และถ้า* $\|f_n\|_E < M$ *สำหรับบาง* M *และทุก* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *แล้ว* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E F$

ทฤษฎีบทนี้ใช้บ่อย ๆ เมื่อไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย ให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (เพราะฉะนั้นมีขอบเขต) บน $[-1, 1]$ แล้วลำดับ $\{f_n\}$ ซึ่ง $f_n(x) = e^{-nx^2}g(x)$ มีขอบเขตเสมอต้นเสมอปลายบน $[-1, 1]$ และลู่เข้าในแง่ของจุดสู่ฟังก์ชัน F

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ เมื่อ } x \neq 0 \\ g(0) \text{ เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

ซึ่งไม่ต่อเนื่องเมื่อ $g(0) \neq 0$ ดังนั้น $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายทั่วๆ ไป อย่างไรก็ดี ถ้าใช้ทฤษฎีบท 4.6 ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} e^{-nx^2} g(x)\, dx = 0$$

เช่นเดียวที่ได้พบแล้วใน (4 – 6) ขบวนการหาอนุพันธ์ของอนุกรมไม่ใคร่จะดีนัก ได้พบแล้วว่าอนุกรม เช่น $\sum_{1}^{\infty} n^{-2} \sin(n^2 x)$ อาจจะลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายทุกที่และยังไม่ได้ ติดตามการหาอนุพันธ์พจน์ในแง่ของพจน์การอินทิเกรตดีกว่ามาก นี่ก็คือการคำนวณผลลัพธ์ที่ สมเหตุสมผลสำหรับการหาอนุพันธ์เพื่อแสดงว่าการหาอนุพันธ์ในแง่ของพจน์จะถูกปรับค่า ถ้า อนุกรมผลลัพธ์ของอนุพันธ์ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย

ทฤษฎีบท 4.7 *ให้* $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ *ลู่เข้าสู่* $F(x)$ *สำหรับแต่ละ* x *ในช่วง* $[a, b]$ *ให้* $u'_n(x)$ *หาค่าได้และต่อเนื่องสำหรับ* $a \leqslant x \leqslant b$ *และให้* $\sum u'_n(x)$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน* $[a, b]$ *แล้ว* $\sum_{1}^{\infty} u'_n(x) = F'(x)$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = \sum u'_n(x)$ อินทิเกรตในแง่ของพจน์ระหว่างพจน์ a แล x

$$\text{ดังนั้น} \int_a^x g = \int_a^x \sum_{1}^{\infty} u'_n(x)$$
$$= \sum_{1}^{\infty} \int_a^x u'_n(x)$$
$$= \sum_{1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$
$$= F(x) - F(a)$$

แสดงว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์ (อินทิกรัลไม่จำกัดเขต) ของ g

ดังนั้น $F'(x) = g(x) = \sum_{1}^{\infty} u'_n(x)$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ □

ในการแสดงทฤษฎีบทนี้ด้วยตัวอย่าง พิจารณาอนุกรม $F(x) = \sum_{1}^{\infty} e^{-e^{n}x}$ ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุก $x > 0$ จะแสดงว่า F ต่อเนื่องและอยู่ใน C^{∞} บนช่วงนี้ นั่นคือ $F^{(k)}(x)$ มีค่าสำหรับทุก $x > 0$ อนุพันธ์ในแง่ของพจน์ของอนุกรมนี้คือ $(-1) \sum_{1}^{\infty} n^2 e^{n^2 x}$ ถ้า $\delta > 0$ แล้วสำหรับทุก $x \leqslant \delta$, $\left| n^2 e^{-n^2 x} \right| \leqslant n^2 e^{-n^2 \delta}$ ดังนั้นอนุกรมใหม่นี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x ซึ่ง $\delta \leqslant x < \infty$ แสดงว่า $F'(x)$ กำหนดค่าได้ และกำหนดได้โดย $(-1) \sum_{1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 x}$ สำหรับทุก $x > 0$ เมื่อทำเช่นนี้ติดต่อกันไปก็จะได้

$$F^{(k)}(x) = (-1)^k \sum^{\infty} e^{2k} e^{-n^2 x}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่ออนุกรมลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $\delta \leqslant x < \infty$ และ δ ใด ๆ ซึ่ง $\delta > 0$

จะพิจารณาตัวอย่างพิเศษต่อไปนี้

ให้

$$(4\text{–}9) \qquad F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$$

เนื่องจาก $\left| \frac{x}{n(x+n)} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ สำหรับทุก x ใน $[0, 1]$ อนุกรมนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ และสามารถอินทิเกรตในแง่ของพจน์ได้จึงได้ผลลัพธ์เป็น

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{n(x+n)}$$

ต้องลู่เข้า ให้ค่าผลบวกเป็น γ ดังนั้น

$$\gamma = \sum_{1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right\} dx$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right\}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left\{ \sum_{1}^{N} \frac{1}{n} - \log (N + 1) \right\}$$

เนื่องจาก $\lim_{N\to\infty}\left[\log(N+1)-\log N\right]=0$ จึงได้ว่ามีจำนวนจริงบวก γ ซึ่ง

$$\sum_{1}^{N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma + \sigma_N$$

เมื่อ $\lim_{N\to\infty}\sigma_N = 0$ จำนวน γ เรียกว่าจำนวนคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant) ซึ่งมีค่าโดยประมาณ .57721 . . .

ให้

$$(4\text{–}10) \qquad F(x) = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} \quad \text{ลู่เข้าสำหรับทุก } x \neq 0$$

สำหรับ δ ใดๆ ซึ่ง $\delta > 0$ และ $x \geqslant \delta$ พบว่า $\frac{1}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2\delta^2}$ ดังนั้นอนุกรมนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x ซึ่ง $x \geqslant \delta$ โดยใช้บทแทรกของทฤษฎีบท 4.4, $\lim_{x\to\infty^-}F(x) = 0$, F มีค่าอย่างไรใกล้ ๆ จุดกำเนิด เมื่อ $x = 0$ อนุกรมกลายเป็น $1 + 1 + 1 + \ldots$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^+}F(x) = \infty$$

โดยการคำนวณอีกทางหนึ่งก็ถูกต้อง สำหรับ N ใดๆ

$$F(x) \geqslant \sum_{1}^{N}\frac{1}{1+n^2x^2} = g(x) \text{ และ } g(0) = N$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+}\inf F(x) \geqslant N$ และให้ N เพิ่มขึ้นจะพบว่า $\lim_{x\to 0^+}F(x) = \infty$ การมีค่าเข้าใกล้เช่นนี้มักไม่ใคร่ใช้กันและขึ้นอยู่กับความจริงที่ว่าพจน์ของอนุกรมเป็นบวก (สำหรับการเปรียบเทียบที่แสดงในการคำนวณ (4–5) ซึ่งเราได้อนุกรมซึ่งพจน์มีค่าเข้าใกล้ $1 + 1 + 1 + ..$ แต่สำหรับกรณีนี้ไม่ได้หมายความว่าฟังก์ชันในคำถามนั้นมีค่าเข้าใกล้อนันต์)

ศึกษาต่อไปสำหรับฟังก์ชัน F โดยพิจารณา

$$x^2F(x) = \sum_{1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

เนื่องจาก $\frac{x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ สำหรับทุก x ซึ่ง $-\infty < x < \infty$ อนุกรมนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุกจุดบนแกน x โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$\lim_{x \to 0} x^2F(x) = \Sigma\, 0 = 0 \text{ และ}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^2F(x) = \sum_{1}^{\infty} \lim_{x \to \infty^-} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

สุดท้าย พิจารณา $x\,F(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ อนุกรมนี้ลู่เข้าบนช่วง $\delta \leqslant x < \infty$ สำหรับ δ ใดๆ ซึ่ง $\delta > 0$ ก็จะมีคำถามถามว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายหรือไม่บนช่วง $0 \leqslant x \leqslant \delta$ ถ้าเป็นเช่นนั้นแล้ว $\lim_{x \to 0^+} x\,F(x)$ จะต้องเป็น 0 จะแสดงว่า

$$\lim_{x \to 0^+} x\,F(x) = \frac{\pi}{2} \text{ สำหรับ n ใดๆ}$$

$$\frac{x}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt \leqslant \frac{x}{1+n^2x^2}$$

บวกพจน์เหล่านี้เข้าด้วยกัน

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

หรือ
$$x\,F(x) \leqslant \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt \leqslant x + F(x)$$

แต่ $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt = \frac{1}{2}\pi$

ดังนั้น $\frac{1}{2}\pi - x \leqslant x\,F(x) \leqslant \frac{1}{2}\pi$ สำหรับทุก $x > 0$ ให้ x เข้าใกล้ 0 จึงได้

$\lim_{x \to 0} x\,F(x) = \frac{1}{2}\pi$ สรุปว่าเราได้พบอะไรบ้าง พบว่าฟังก์ชัน F เมื่อ x อยู่ใกล้ ๆ จุดกำเนิดมีค่าคล้าย ๆ จะเป็น $\frac{\pi}{2x}$ เมื่อ x มีค่ามาก ๆ มีค่าคล้าย ๆ Ax^{-2} เมื่อ $A = \Sigma \frac{1}{n^2} \quad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$

ทฤษฎีบท 4.3 ในเรื่องความต่อเนื่องของผลบวกที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมของฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งใช้กันบ่อย ๆ ในการสร้างฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีคุณสมบัติแปลก ๆ ตัวอย่างเช่น

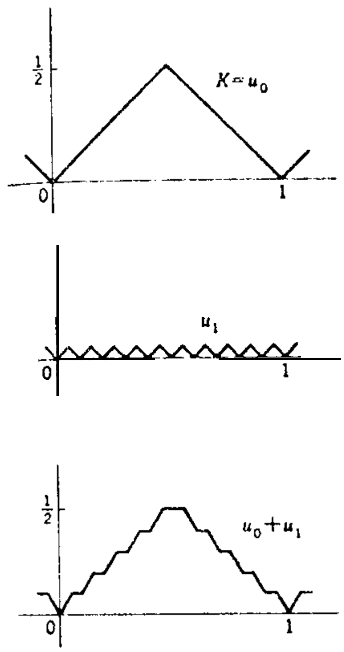
$$\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{1+x^2} = g(x)$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก x แม้ที่ $x = 0, g'(0) = 0$ สังเกตว่า $|g(x)| \leqslant 1$ สำหรับทุก x ฟังก์ชัน g ไม่เพิ่มหรือลดอย่างเดียวบนย่านใด ๆ ของ $x = 0$ เนื่องจากค่าของไซน์เปลี่ยนแปลงค่าไปเร็วมากที่ x มีค่าใกล้ ๆ 0 แทนค่า g ในรูป $g_c(x) = g(x - c)$ จึงมีฟังก์ชันลักษณะคล้ายคลึงกันที่ $x = c$ ถ้า c_n เป็นลำดับของจำนวนจริงแล้ว

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, g_{c_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, g(x - c_n)$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เพิ่มหรือลดอย่างเดียวบนย่านของ $c_1, e_2, c_3, \ldots$ จุด c_n เหล่านี้อาจจะหนาแน่นทุกที่บนเส้นตรงจริง (everywhere dense on the line)

วิธีการที่คล้ายคลึงกันที่จะสร้างตัวอย่างของฟังก์ชันที่ไม่มีที่ใดหาอนุพันธ์ได้และต่อเนื่อง ให้ K เป็นฟังก์ชันพิเศษนั้นกำหนดขึ้นโดย $K(x)$ เป็นระยะทางจาก x ไปยังจำนวนเต็มที่ใกล้ที่สุด K ต่อเนื่องทุกที่ และมีความยาวหนึ่งช่วงคลื่น (Period) เป็น 1 หน่วย ดังรูป 4–3 สังเกต



รูปที่ 4--3

สังเกตว่า K มีคุณสมบัติ

$$\left| K(b) - K(a) \right| = \left| b - a \right|$$

เมื่อ a และ b อยู่ในครึ่งช่วงเดียวกันของ $[m, m+1]$ ให้ $u_n(x) = 10^{-n} K(10^n x)$ สำหรับ n = 0, 1, 2. . . . แล้วกำหนดฟังก์ชัน H(x) สำหรับทุก x โดย

(4–11) $$H(x) = \sum_0^{\infty} u_j(x)$$

ฟังก์ชัน K มีมุมซึ่งหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่มุมเหล่านั้นและฟังก์ชัน u_n ก็มีความเป็นไปเช่นกันคือมีมุมหักต่าง ๆ มาก ๆ อาจยอมรับได้ว่า H(x) อาจหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุดใดเลย (กราฟของ u_0, u_1 และ $u_0 + u_1$ แสดงไว้ในรูป 4 – 3) เนื่องจาก $0 \leqslant u_j(x) \leqslant 10^{-j}$ สำหรับทุกอนุกรมสำหรับ H(x) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x เนื่องจากแต่ละพจน์ u_j ต่อเนื่องที่ทุกจุดและคล้องตามความสัมพันธ์ $u_j(x+1) = u_j(x)$, H ต่อเนื่องทุกที่และมีช่วงคลื่นยาว 1 หน่วย จะแสดงว่าสำหรับจุด b ใด ๆ ในช่วง $[0, 1]$

$$H'(b) = \lim_{x \to b} \frac{H(x) - H(b)}{x - b}$$

หาค่าไม่ได้ เลือกลำดับพิเศษ $\{x_n\}$ ให้เข้าใกล้ b ให้ง่ายในการพิสูจน์ ให้ b เป็นจุดทศนิยม ซึ่งแทนได้ด้วย

$$.b_1 b_2 b_3 \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{b_j}{10^j}$$

เพื่อให้เห็นข้อแตกต่าง ตัดทิ้งค่าท้ายๆ โดยใช้ . . . 0000 . . . มากกว่าจะเป็น . . . 9999. . . ดังนั้น เราจะใช้ .241000 . . . ในที่ของ 240999. . . ให้จำนวนเต็มบวกn = 1, 2, 3, . . . กำหนดค่าจำนวนจริง x_n ให้ใกล้ b โดย

$$x_n = \begin{cases} b + 10^{-n} & \text{ถ้า } b_n \text{ ที่ต่างจาก 4 และ 9} \\ b - 10^{-n} & \text{ถ้า } b_n \text{ เป็นอย่างอื่นที่ไม่ใช่ 4 หรือ 9} \end{cases}$$

ดังนั้นเลือกคู่ x_n และ b, $10x_n$ และ 10b, . . . , $10^{n-1}x_n$ และ $10^{n-1}b$ จะต้องอยู่ในครึ่งเดียวกันของช่วงใดๆ $[m, m+1]$ ซึ่งจะต้องประกอบด้วยหนึ่งคู่ ยิ่งกว่านั้นสำหรับ $j \geqslant n$, $10^j x_n$ และ $10^j b$ จะต้องแตกต่างกับบางจำนวนเต็ม คุณสมบัติที่เศษของ K(x) แสดงว่า

$$|u_j(x_n) - u_j(b)| = \begin{cases} 10^{-n} = |x_n - b| & \text{สำหรับ } j = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{สำหรับ } j \geqslant n \end{cases}$$

$$\text{เมื่อบวกเพื่อ } \frac{H(x_n) - H(b)}{x_n - b} = \overbrace{\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1 \pm 1}^{n \text{ เทอม}}$$

เมื่อเครื่องหมายคำนวณได้โดยแต่ละหลักในเลขหลังจุดทศนิยมที่แทน b อย่างไรก็ดีเพื่อป้องกันในเรื่องเครื่องหมายพบว่าผลหารเป็นเลขคู่ สำหรับ n เป็นเลขคู่คือ n = 2, 4, 6, . . . และเลขคี่เมื่อ n = 1, 3, 5, . . . แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{H(x_n) - H(b)}{x_n - b}$ หาค่าไม่ได้และ H ไม่มีอนุพันธ์ที่ b

ตัวอย่างสุดท้ายสำหรับประโยชน์ใช้สอยของเทคนิคเหล่านี้ไม่ได้มุ่งที่จะสร้างฟังก์ชัน แปลก ๆ แต่จะแสดงคุณสมบัติที่มีประโยชน์สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องกันบนเซตปิด

ทฤษฎีบท 4.8 (Tietze Extension) *ให้* E *เป็นเซตปิดใน* n- *ปริภูมิและให้* f *เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน* E *และมีคุณสมบัติว่า* $|f(p)| \leqslant M$ *สำหรับทุก* $p \in E$ *แล้วย่อมมีฟังก์ชันต่อเนื่อง* F *กำหนดบนทุกจุดบน* n- *ปริภูมิ และมีขอบเขต* M *ซึ่ง* F *คือฟังก์ชันเดียวกับ* f *บน* E

โดยคุณค่าของผลลัพธ์นี้ก็คือ ฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีขอบเขตใด ๆ บนเซตมักจะถูกนำมาพิจารณาเช่นมีขอบเขตและต่อเนื่องบน n–ปริภูมิ

การพิสูจน์สำหรับผลลัพธ์นี้ขึ้นอยู่กับการใช้ฟังก์ชันพิเศษช่วยซึ่งกำหนดขึ้นด้วยวิธีเรขาคณิต

บทนำ *ถ้า* C *เป็นเซตปิดและ* $\phi(p) = d(p, C)$ *เป็นระยะทางจาก* p *ไปยัง* C *แล้ว* ϕ *ต่อเนื่องทุกที่และต้องมีค่าเป็นบวกจาก* C *ออกไป* $(p \notin C)$

พิสูจน์ ให้ p, q และ c เป็นจุดสามจุดที่ $c \in C$ คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมแสดงว่า

$$|p-c| \leqslant |p-q| + |q-c|$$

เนื่องจาก $d(p, C) = \inf_{c \in C} |p-c|$

จึงได้ $\phi(p) \leqslant |p-q| + |q-c|$ เป็นจริงสำหรับทุก $c \in C$

ดังนั้น $\phi(p) \leqslant |p-q| + \phi(q)$

ในทำนองเดียวกัน $\phi(q) \leqslant |q \quad p| + \phi(p)$

จากทั้งสองข้างบนจึงได้ $-|p-q| \leqslant \phi(p)-\phi(q) \leqslant |p-q|$

ดังนั้น $|\phi(p) - \phi(q)| \leqslant |p-q|$

แสดงว่า ϕ ต่อเนื่อง (เสมอต้นสมอปลาย) ทุกแห่ง

ถ้า $\phi(p) = 0$ แล้ว $p = \lim_{n\to\infty} c_n$ สำหรับลำดับ $\{c_n\}$ ของจุดในเซต C เนื่องจาก

C เป็นเซตปิดดังนั้น $p \in C$ □

พิสูจน์ สำหรับทฤษฎีบท 4.8

สร้างอนุกรม $\sum_1^\infty F_n$ ของฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย ในระนาบ

ซึ่งผลบวกบนเซต E คือ f

สมมติว่า $|f(p)| \leqslant M$ สำหรับ $p \in E$ แบ่ง E ออกเป็นสามเซต

$$A = \left\{ p : p \in E \wedge \frac{M}{3} \leqslant f(p) \leqslant M \right\}$$

$$C = \left\{ p : p \in E \wedge -\frac{M}{3} < f(p) < \frac{M}{3} \right\}$$

$$B = \left\{ p : p \in E \wedge -M \leqslant f(p) \leqslant -\frac{M}{3} \right\}$$

และสร้างฟังก์ชัน F_1 โดย

$$F_1(p) = \frac{M}{3} \frac{d(p, B) - d(p, A)}{d(p, B) + d(p, A)}$$

เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $A \cap B = \phi$, F_1 กำหนดค่าได้และต่อเนื่องทุกที่

สำหรับทุก p ในระนาบ $|F_1(p)| \leqslant \frac{M}{3}$

บน E, F_1 มีลักษณะดังต่อไปนี้

ถ้า $p \in A$, $d(p, A) = 0$ และ $F_1(p) = \frac{M}{3}$

ถ้า $p \in B$, $d(p, B) = 0$ และ $F_1(p) = -\frac{M}{3}$

ถ้า $p \in C$, แล้ว $-\frac{M}{3} \leqslant F_1(p) \leqslant \frac{M}{3}$

ทดสอบค่าของ f บน E แสดงว่า

$$\left|f(p) - F_1(p)\right| \leqslant \frac{2}{3} M \text{ สำหรับทุก } p \in E$$

เมื่อสอบซ้ำกับ $f - F_1$ โดยใช้ f พบว่าบน E, $f - F_1$ มีขอบเขตโดย $\frac{2M}{3}$

สร้าง F_2 ให้ต่อเนื่องทุกที่ ซึ่ง $F_2(p) \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2M}{3}\right)$ สำหรับทุก p

ในขณะที่ $\left|\left[f(p) - F_1(p)\right] - F_2(p)\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2M}{3}\right)$ สำหรับ $p \in E$

ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จึงได้ลำดับของฟังก์ชัน $\{F_n\}$ ซึ่งคล้องตามเงื่อนไขสองประการคือ

$$\left|F_n(p)\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M \text{ สำหรับทุก } p \text{ และ}$$

$$\left|f(p) - \left\{F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) + \ldots + F_n(p)\right\}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n M$$

สำหรับทุก $p \in E$

เงื่อนไขแรกเพื่อให้แน่ใจว่า $\sum_1^\infty F_n$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก p ผลบวก F โดยทฤษฎีบท 4.3 ต่อเนื่องในระนาบและเงื่อนไขที่สองแสดงว่า

$$F(p) = \sum_1^\infty F_n(p) = f(p) \text{ สำหรับทุก } p \in E \text{ สุดท้ายสำหรับทุก } p$$

$$\left|F(p)\right| \leqslant \sum_1^\infty \left|F_n(p)\right| \leqslant \frac{M}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) \leqslant \frac{M}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} = M$$

ดังนั้น F มีขอบเขตบนระนาบขอบเขตเดียวกับ f บน E □

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงแสดงว่าถ้า f_n ลู่เข้าในแง่ของจุดสู่ f บน E แล้ว $f_n \to f$ เสมอต้นเสมอปลายบนทุกเซต ส่วนหนึ่งของ E ที่จำกัด

2. จงแสดงลำดับ $\{f_n\}$ ซึ่งลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนช่วง $[0, L]$ สำหรับทุก $L > 0$, แต่ไม่เสมอต้นเสมอปลายบนช่วง $0 \leqslant x < \infty$

3. ให้ $f_n(x) = x^n$ สำหรับ $0 \leqslant x \leqslant 1$ ถามว่า

   $\{f_n\}$ ลู่เข้าในแง่ของจุดบน $[0, 1]$ หรือไม่

   $\{f_n\}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ หรือไม่

   $\{f_n\}$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, \frac{1}{2}]$ หรือไม่

4. ให้ $f_n(x) = nx^n(1-x)$ สำหรับ $0 \leqslant x \leqslant 1$ จงแสดงว่า

   $\{f_n\}$ ลู่เข้าในแง่ของจุดแต่ไม่เสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ และ

   $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n$

5. ให้ $F(x) = \sum\limits_1^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2}$ จงศึกษาการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมนี้ และสำรวจความเป็นไปได้ของ $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty^+} \frac{F(x)}{x}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty^-} F(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{F(x^2)}{x^2}$ และ $\lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{F(x)}{x}$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $0 \leqslant x < \infty$ และให้ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

   แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f(nx)dx$ จะเป็นอย่างไร

7. ให้ g ต่อเนื่องบน [0, I] ด้วย $g(1) = 0$ จงแสดงว่า $\{x^n g\ 0\ \ )$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ x au $[0, 1]$

8. จงพิสูจน์บทแทรกของทฤษฎีบท 4.4 โดยไม่ต้องเปลี่ยนตัวแปร $x = \frac{1}{t}$

9. ขยายทฤษฎีบท 4.5 ไปยังอินทิกรัลไม่ตรงแบบดังต่อไปนี้ สมมติว่า $\{f_n\}$ เป็นลำดับของพึงก์ชันต่อเนื่องบน $0 \leq x < \infty$ ซึ่ง $|f_n(x)| \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \geq 0$ สมมติว่า $\int_0^\infty g$ ลู่เข้า และ $f_n \to f$ เมื่อการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนทุกช่วง $[0, L]$ สำหรับ L ใด ๆ ที่ $L > 0$ จงพิสูจน์ว่า $\int_0^\infty f_n \to \int_0^\infty f$

10. ให้ $\phi_n(x)$ มีค่าเป็นบวกและต่อเนื่องสำหรับทุก x ใน $[-1, 1]$ ด้วย $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \phi_n = 1$ สมมติต่อไปว่า $\{\phi_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0 เสมอต้นเสมอปลายบนช่วง $[-1, -c]$ และ $[c, 1]$ สำหรับ $c > 0$ ให้ g เป็นพึงก์ชันใด ๆ ที่ต่อเนื่องบน $[-1, 1]$ จงแสดงว่า

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\ \phi_n(x)dx = g(0)$$

11. ให้ f_n เป็นพึงก์ชันต่อเนื่องบนเซตบีดและมีขอบเขต E สำหรับแต่ละ n ให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าในแง่ของจุดสู่พึงก์ชันต่อเนื่อง F สมมติว่าสำหรับ p ใด ๆ ที่ $p \in E$ ลำดับ $\{f_n(p)\}$ เป็นลำดับเพิ่มอย่างเดียวของจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $\{f_n\}$ ความจริงลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน E (คำแนะนำ : สำหรับ ε ที่กำหนดให้พิจารณาเซต

$$C_n = \{p : p \in E \wedge F(p) - f_n(p) \geq \varepsilon\}$$

และใช้คุณสมบัติ (nested set)

12. โดยใช้ผลลัพธ์จากข้อ 11 พิสูจน์ผลลัพธ์ต่อไปนี้
ให้ $\{u_n\}$ เป็นลำดับของพึงก์ชันต่อเนื่องที่ค่าไม่ติดลบกำหนดค่าได้บนช่วง $[a, b]$ และสมมติว่าอนุกรม $\sum_1^\infty u_n x$ ลู่เข้าในแง่ของจุดเข้าสู่พึงก์ชันต่อเนื่อง $F(x)$ แล้วการอินทิเกรตในแง่ของพจน์เป็น

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n(x)dx$$

13. จงใช้ทฤษฎีบท Tietze extension แสดงว่า ถ้า C เป็นเซตปกคลุมแน่นใน n–สเปซ ๑ เป็นเซตเปิดที่ประกอบด้วย C และ f เป็นพังก์ชันค่าจำนวนจริงที่ต่อเนื่องและกำหนดค่าได้บน C แล้ว f มี extension ต่อเนื่องไปยังทุก n–ปริภูมิ ซึ่ง f เป็น 0 ทุกแห่งในส่วนเติมเต็ม (Complement) ของ ๑

14. จงแสดงว่าตัวดำเนินการพิเศษ $\| \ \ \|_E$ ที่กำหนดขึ้นโดยหัวข้อนี้ โดย

$$\| f \|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

มีคุณสมบัติต่อไปนี้ของค่าประจำยูคลิด (Euclidean norm) ใน n–ปริภูมิ

(a) $\| f+g \|_E \leqslant \| f \|_E + \| g \|_E$

(b) $\| f-g \|_E = 0$ ก็ต่อเมื่อ $f = g$

15. ความหมายของ $\| f - g \|_E$ มีความหมายทำนองระยะทางระหว่าง f และ g จงแสดงว่า $\frac{1}{2}(f+g)$ ห่างจาก f และ g เท่ากัน

16. ถ้า M เป็นเซตของพังก์ชัน f แล้วระยะทางจาก F ไปยังเซต M กำหนดได้โดย

$$d(F, M) = \inf_{f \in M} \| F - f \| E$$

จงหาระยะทางระหว่าง F, เมื่อ $F(x) = x^2$ และเซต M ของทุกพังก์ชันกำลังหนึ่งในรูป $f(x) = Ax$ เลือก E เป็นเซต $[0, 1]$ (สามารถจะพบการประมาณค่าเสมอต้นเสมอปลายบนช่วงนี้ของ F โดยพังก์ชันในเซต M)

4.3 อนุกรมกำลัง

ความจริงพื้นฐานเกี่ยวกับการลู่เข้าในแง่ของจุดของอนุกรมกำลังได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 3.3 จะทดสอบอนุกรมกำลังเป็นเสมือนว่าเป็นพังก์ชันที่กำหนดขึ้นโดยอนุกรมซึ่งพจน์เป็นพหุนาม คือจะต้องศึกษาคุณสมบัติการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมกำลัง

ทฤษฎีบท 4.9 *ถ้า* $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ *มีรัศมีการลู่เข้าสู่* R *แล้วย่อมลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนทุกเขตส่วนหนึ่งของ* $-R < x < R$ *ที่ปกคลุมแน่น*

พิสูจน์ เซตที่ปกคลุมแน่นใด ๆ ที่อยู่ในช่วง $[-b,b]$ เมื่อ $b < R$ อนุกรมกำลังลู่เข้าเมื่อ $x = b$ และความจริงลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ดังนั้น $\sum_{0}^{\infty} |a_n| b^n$ ลู่เข้า ถ้า $|x| \leqslant b$ แล้ว $|a_n x^n| \leqslant |a_n b^n|$ โดยใช้การทดสอบของ Weierstass และอนุกรมลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $[-b,b]$ □

ถ้านำผลนี้รวมเข้ากับทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่าอนุกรมกำลังมักจะหาอนุพันธ์ได้ในแง่ของพจน์บนช่วงของการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 4.10 *ให้* $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ *ลู่เข้าสำหรับ* $|x| < R$ *แล้ว* f' *มีค่า และ*

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n+1} \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x| < R$$

พิสูจน์ พิจารณา $x \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^n$ เนื่องจากการคูณด้วย x ไม่เป็นผลต่อคุณสมบัติลู่เข้า อนุกรมที่หาอนุพันธ์แล้วมีรัศมีการลู่เข้าสู่ $\frac{1}{L}$ เมื่อ

$$L = \limsup_{n\to\infty} |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \text{ เพราะว่า } \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

ดังนั้นอนุกรมกำลังเดิมและอนุพันธ์ในแง่ของพจน์มีรัศมีของการลู่เข้าเท่ากัน อนุกรมที่ได้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $|x| \leqslant b$ และ b ใด ๆ ซึ่ง $b < R$, และโดยทฤษฎีบท 4.7 จึงได้ว่า $f'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$ □

เมื่อกลับไปพิจารณาอีกครั้งจะเห็นว่าฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นด้วยอนุกรมกำลังที่ลู่เข้า อาจหาอนุพันธ์ได้หลายครั้งตามแต่จะต้องการ และอนุพันธ์คำนวณได้ในแง่ของพจน์ภายในช่วงของการลู่เข้า

บทแทรก 1 *ถ้า* $f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *ลู่เข้าสำหรับบางช่วงรอบ ๆ* c *แล้ว*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

พิสูจน์ เรามี $f^{(n)}(x) = n!a_n + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)\, a_{n+1}(x-c)$

$$+\, 3\cdot 4\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n+2)\, a_{n+2}(x-c)^2 + \ldots$$

ในช่วงรอบ ๆ c และให้ $x = c$ จึงได้ $f^{(n)}(c) = n!a_n$ □

บทแทรก 2 *ถ้า* $\sum_{0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *สำหรับทุก* x *ในย่านของ* c *แล้ว*

$a_n = b_n$ *สำหรับ* $n = 1, 2, 3, \ldots$

พิสูจน์ ให้ค่าร่วมกันเป็น f (x) แล้ว a_n และ b_n จำเป็นต้องกำหนดได้ด้วย $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ □

สังเกตได้ว่าฟังก์ชันที่วิเคราะห์บนย่านของ c ซึ่งมีการกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมสำหรับ f(x) ได้เพียงอนุกรมเดียวคือ $\Sigma a_n(x-c)^n$ และอนุกรมนั้นก็คืออนุกรมเทเลอร์ซึ่งคำนวณเช่นเดียวกับลิมิตของพหุนามเทเลอร์ โดยกลับกันฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งกำหนดได้โดยอนุกรมกำลังย่อมวิเคราะห์ได้ในช่วงของการลู่เข้า

การหาอนุพันธ์สำหรับอนุกรมกำลังไม่เปลี่ยนแปลงรัศมีของการลู่เข้า แต่สามารถเปลี่ยนแปลงการลู่เข้าที่จุดปลายทั้งสองข้าง พิจารณาอนุกรม

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

ซึ่งมีรัศมีการลู่เข้า R = 1 ความจริงอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ เมื่อหาอนุพันธ์ครั้งที่ 1 ได้

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \text{ ลู่เข้าสำหรับ } -1 \leqslant x < 1$$

และเมื่อหาอนุพันธ์ต่อไปอีก จึงได้

$$f''(x) = \sum_{2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2} \text{ ลู่เข้าเมื่อ } -1 < \infty < 1$$

อนุกรมแรกของอนุกรมทั้งสามนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย สำหรับทุก x ซึ่ง $-1 \leqslant \infty \leqslant 1$ เนื่องจากแต่ละพจน์มีค่าน้อยกว่า $\frac{1}{n^2}$ โดยทฤษฎีบท 4.9 แสดงว่าอนุกรมที่สองลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในช่วง $|x| \leqslant b$ ซึ่ง $b < 1$ เนื่องจากอนุกรมนี้ลู่เข้า (ในแง่ของจุด) บนช่วงที่ใหญ่ที่สุดก็คือ $-1 \leqslant x \leqslant b$ ซึ่งลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย ความจริงอันนี้จะต้องติดตามผลลัพธ์ทั่ว ๆ ไปคือทฤษฎีบทของ Abel

ทฤษฎีบท 4.11 *ให้* $\sum_{0}^{\infty} a_n x_n$ *มีรัศมีของการลู่เข้า* R *และให้อนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับ* $x = R$ $\left[\textit{หรือสำหรับ } x = -R\right]$ *แล้วย่อมลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนช่วง* $0 \leqslant x \leqslant R$ $\left[\textit{หรือช่วง } -R \leqslant x \leqslant 0\right]$

พิสูจน์ ไม่ให้เกิดผลเสียใด ๆ สมมติว่า $R = 1$ และอนุกรม $\sum a_n x^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x = 1$ ให้

$B_n = \sum_{n}^{\infty} a_k$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$ แล้วสำหรับ x ใด ๆ ซึ่ง $0 \leqslant x < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n}^{\infty} a_k x^k &= a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots \\
&= (B_n - B_{n+1}) x^n + (B_{n+1} - B_{n+2}) x^{n+1} + \dots \\
&= B_n x^n + B_{n+1} (x^{n+1} - x^n) + B_{n+2} (x^{n+2} - x^{n+1}) + \dots \\
&= B_n x^n + (x-1) x^n \left\{B_{n+1} + B_{n+2} x + B_{n+3} x^2 + \dots\right\}
\end{aligned}$$

กำหนด ε เลือก N ซึ่ง $|B_j| < \varepsilon$ เมื่อ $j \geqslant N$ แล้วสำหรับ $0 \leqslant x < 1$ และ $n \geqslant N$

$$\left|\sum_{n}^{\infty} a_k x^k\right| \leqslant \varepsilon x^n + (1-x)x^n (\varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon x^2 + \ldots)$$

$$= \varepsilon x^n + \varepsilon x^n(1-x)[1 + x + x^2 + \ldots]$$

$$= 2\varepsilon x^n < 2\varepsilon$$

เป็นจริงเมื่อ $x = 1$ ด้วย เนื่องจาก $B_n < \varepsilon < 2\varepsilon$ ดังนั้น

$\left|\sum_{n}^{\infty} a_k x^k\right| < 2\varepsilon$ เสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x ซึ่ง $0 \leqslant x < 1$ และทุก

$n \geqslant N$

นั่นคือ $\sum_{0}^{\infty} a_n x_n$ ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบน $0 \leqslant x \leqslant 1$ □

บทแทรก *ถ้าอนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุดปลายของช่วงของการลู่เข้า แล้วฟังก์ชันที่กำหนดด้วยอนุกรมกำลังนั้นต่อเนื่องที่จุดปลายนั้นด้วย : ถ้า* $\sum_{0}^{\infty} a_n r^n$ *ลู่เข้าเมื่อ* $r > 0$ *แล้ว* $\lim\limits_{x \to r-} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n r^n$

หมายเหตุ ในขณะที่ผลลัพธ์เกี่ยวกับการลู่เข้าในแง่ของจุดและผลลัพธ์ทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย นำไปใช้กับอนุกรมของฟังก์ชันค่าจำนวนจริงและค่าจำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีบทของ Abel (ทฤษฎีบท 4.11) เกี่ยวกับการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายที่จุดปลายโดยทั่ว ๆ ไปไม่ตรงนัก ดังนั้นอนุกรมกำลัง $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน z ซึ่ง $|z| = R$ แต่ไม่จำเป็นต้องลู่เข้าในจานปิด (closed disc) $|z| \leqslant R$ แต่อย่างไรก็ดีอาจลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในทุกหลายเหลี่ยมปิดซึ่งมีจุดยอดจำกัดที่บรรจุอยู่ในจานดังกล่าว

เนื่องจากอนุกรมกำลังมักจะลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในช่วงปิดซึ่งอยู่ในช่วงของการลู่เข้า สามารถอินทิเกรตในแง่ของพจน์บนช่วงใด ๆ ขบวนการอินทิเกรตหรือการหาอนุพันธ์มักจะรวมด้วยการดำเนินการทางพีชคณิต และการคำนวณโดยการแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมกำลัง แม้ว่าสัมประสิทธิ์ของการกระจายฟังก์ชัน f สามารถหาได้จากสูตร $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ ซึ่งมักจะยาวและซับซ้อนตัวอย่างต่อไปนี้จะแก้ข้อสงสัยเหล่านี้

เริ่มจากอนุกรมเรขาคณิตธรรมดา

(4–12) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับ $-1 < x < 1$ ทำการหาอนุพันธ์ จึงได้

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \ldots + (n+1)(n+2)x^n + \ldots$$

และทั่ว ๆ ไป

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = k! + \frac{(k+1)!}{1!}x + \frac{(k+2)!}{2!}x^2 + \ldots$$

ซึ่งลู่เข้าสำหรับ $-1 < x < 1$ ถ้าทำการอินเกรต (4 – 12) จะได้

(4–13) $$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

ลู่เข้าสำหรับ $-1 < x < 1$ เนื่องจากอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับ $x = -1$ ด้วย จากบทแทรกของทฤษฎีบท 4.11 แสดงว่า (4–13) เป็นจริงสำหรับ $x = -1$ ซึ่งลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $-1 \leqslant x \leqslant b,\ b < 1$ ใน (4–13) แทน x ด้วย $-x$ จึงได้

(4–14) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

หารตลอดด้วย x และอินทิเกรตในช่วง $(0, x]$, $x \leqslant 1$ ย่อมได้

$$\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\,dt = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

ในอนุกรมแรก (4 – 12) แทน x ด้วย $-x^2$ จึงได้

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

ลู่เข้าสำหรับ $-1 < x < 1$ อินทิเกรตจาก 0 ถึง x, $|x| < 1$ ย่อมได้

(4-15) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

เนื่องจากอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับ $x = 1$ และ $x = -1$ ดังนั้นจึงลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าให้ $x = 1$ จึงได้

(4–16) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

ซึ่งก็ใช้บทแทรกของทฤษฎีบท 4.11 เช่นกัน

ให้กำหนดฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล E ด้วยอนุกรมกำลัง

(4-17) $$E(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

แล้วเนื่องจากอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุก x และลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในทุกช่วง $|x| \leqslant R$, $R < \infty$ เมื่อหาอนุพันธ์ จึงได้

$$E'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x)$$

แสดงว่าฟังก์ชัน E เป็นผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ของมันเองด้วย คือ $y' = y$ คุณสมบัติอื่น ๆ ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลสามารถคำนวณจากนิยามของอนุกรม คำนวณความสัมพันธ์

$$E(a)\,E(b) = E(a + b)$$

โดยสร้างผลคูณโคชีของอนุกรมสำหรับ E(a) และ E(b)

$$E(a)\ E(b) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{0}^{\infty} \frac{b^n}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a^n b^0}{n!0!} + \frac{a^{n-1} b}{(n-1)!} + \ldots + \frac{a^0 b^n}{0!n!} \right\}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n$$

$$= E(a+b)$$

ด้วย $e = E(1)$, $e^n = E(n)$ และอาจกำหนด c^x สำหรับกำลังของ e เป็นจำนวนจริงว่า $E(x)$ สมมติว่าต้องการขยาย e^x ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ $x-c$ ก็เขียนได้ว่า

$$e^x = E(x-c+c)$$

$$= E(x-c)E(c)$$

$$= e^c \left\{ 1 + \frac{x-c}{1} + \frac{(x-c))^2}{2!} + \frac{(x-c)^3}{3!} + \ldots \right\}$$

ถ้าแทนที่ x ด้วย $c - x^2$ ก็จะได้

$$c^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

ลู่เข้าสำหรับทุก x โดยอินทิเกรตอนุกรมนี้ย่อมได้

(4–18) $$\int_0^t e^{x^2}\,dx = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \ldots$$

สังเกตว่าการกระจายนี้ไม่สามารถหาค่าของอินทิกรัล ความน่าจะเป็น $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากไม่สามารถหาค่าลิมิตในแง่ของพจน์ได้จากการกระจายทางขวาของ (4 – 18) [ในหัวข้อ 2.5 ใช้วิธีการแสดงว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบนี้มีค่าแน่นอนเป็น $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

อนุกรมที่กำหนดขึ้นด้วยฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (4 – 17) ซึ่งลู่เข้าเหมือนกันถ้า x เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ เช่นให้ $z = x + iy$ และถ้าวิเคราะห์โดยการคูณอนุกรมกำลังก็ยังคงเป็นจริง ดังนั้นในการเขียนแทนด้วย e^z สำหรับ $E(z)$ จึงได้

(4–19) $$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

โดยใช้ (4–17) จึงได้

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right)$$

โดยใช้แบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 5 ก็จะได้ความสัมพันธ์

(4–20) $$e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

เมื่อเป็นเช่นนี้ก็จะได้นิยามของเอกซ์โปเนนเชียลมาตรฐานเป็น

(4–21) $$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

จากสูตรข้างบนอาจจะหาสูตรตรีโกณมิติอื่น ๆ และจะได้ว่าคล้องตามสูตรตรีโกณมิติอื่น ๆ ด้วย

การหารอนุกรมกำลังเป็นไปได้ แต่ยากที่จะหาออกมานอกจากกรณีง่าย ๆ การทดสอบง่าย ๆ ทางทฤษฎี ตัวอย่างเช่น

$$\frac{\sum_0^\infty a_n x^n}{\sum_0^\infty b_n x^n} = \sum_0^\infty c_n x^n$$

ในเมื่อมีช่วงเปิดรวมกัน I ของการลู่เข้าสำหรับทุกอนุกรม และเมื่อบน I เป็นจริงสำหรับผลคูณ $\Sigma\, c_n x^n$ และ $\Sigma\, b_n x^n$ คือ $\Sigma\, a_n x^n$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาอนุกรมกำลังเพื่อแทนฟังก์ชันต่อไปนี้ ที่ลู่เข้าในบางช่วงที่ประกอบด้วยจุดที่กำหนดให้

(a) $\sin(x^2)$ ใกล้ ๆ จุด $x = 0$ (b) $\frac{1}{x}$ ใกล้ ๆ จุด $x = 1$

(c) $\log(1 + x^2)$ ใกล้ ๆ จุด $x = 0$ (d) $\cosh(x)$ ใกล้ ๆ จุด $x = 0$

2. โดยการอินทิเกรตและการหาอนุพันธ์ หรือการดำเนินการอื่น ๆ ที่สมเหตุสมผล จงหาฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดยอนุกรมกำลังต่อไปนี้

(a) $\sum_{1}^{\infty} n^2 x^n$ (b) $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

(c) $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (d) $x + x^4 + x^7 + x^{10} - x^{13} + \ldots$

3. สามารถแสดงฟังก์ชันต่อไปนี้ในรูปของอนุกรมกำลังซึ่งลู่เข้าในผ่านของ 0 หรือไม่

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

4 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) ลำดับศูนย์กำหนดโดย

$$J_0(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

จงหารัศมีของการลู่เข้าและแสดงว่า $y = J_0(x)$ เป็นฟังก์ชันผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ $xy'' + y' + xy = 0$

5. ให้ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ และ $f(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n x^n$ จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1^-} (1 - x) f(x) = L$

6. จงหาอนุกรมกำลังสำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้รอบ ๆ จุดที่กำหนดให้

(a) $f(x) = xe^{-x}$ ใกล้ ๆ $x = 0$ (b) $f(x) = e^{2x} - e^x$ ใกล้ ๆ $x = 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ ใกล้ ๆ $x = 0$ (d) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ ใกล้ ๆ $x = 1$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ใกล้ ๆ $x = 0$

7. จงแสดงว่า $(\sin\ x)^2 + (\cos\ x)^2 = 1$ โดยแสดงโดยตรงว่า $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

8. จากความจริงที่ว่า $e^{i\alpha}\ e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ จงคำนวณสูตรสำหรับ $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha+\beta)$

9. จงแสดงว่า $F(x) = 1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$ สามารถแสดงได้ในในพจน์ e^x และจำนวนเชิงซ้อน $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

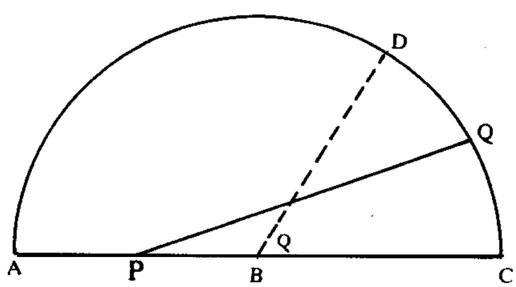
10. ให้ $F(x) = 1+2x+x^2+2x^3+x^4+2x^5+\ldots$ โดยการหาร จงหาอนุกรมกำลังใกล้ ๆ $x = 0$ สำหรับ $\frac{1}{F(x)}$

11. จงหาอนุกรมกำลังสำหรับ $\frac{1}{F(x)}$ เมื่อ $F(x) = \sum_0^\infty (n+1)\ x^n$

12. ถ้า $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ แล้ว

$$\frac{1}{f(x)} = 1 - a_1x + \left\{(a_1)^2 - a_2\right\}x^2 + \left\{2a_1a_2 - (a_1)^3 - a,\right\}\ x^3 + Ax^n + \ldots,$$

จงหาค่า A



รูป 4.4

13. วิธีการแบ่งมุมออกเป็นสามมุมเท่า ๆ กันโดยประมาณของ d'Ocange โดยกำหนดมุม θ ในครึ่งวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย (ดังรูป 4.4) ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งของวงกลม CD จงแสดงว่ามุม Q P C $\approx \frac{\theta}{3}$

14. **ให้** $y = f(x)$ **เป็นสมการที่ได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์**

$$x^2\frac{dy}{dx} - xy = \sin x$$

โดย $f(0) = C$ จงหาอนุกรมกำลังสำหรับ f ใกล้ ๆ $x = 0$

15. **ให้** $y = f(x)$ **เป็นสมการที่ได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์**

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

โดยการหาอนุพันธ์ซ้ำ ๆ จงหา $f^{(n)}(0)$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$ และดังนั้นจงหาสองสามพจน์แรกของอนุกรมกำลังสำหรับ f รอบ ๆ $x = 0$ สามารถที่จะตัดสินได้หรือไม่ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้า

4.4 อินทิกรัลไม่ตรงแบบกับตัวแปรเสริม

สัญลักษณ์ของการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายมิได้จำกัดอยู่แต่เพียงลำดับและอนุกรมเท่านั้น ตัวอย่างเช่นแทนที่จะเป็นลำดับ $\{f_n(p)\}$ อาจพิจารณา $f(p, t)$ และศึกษาความเป็นไปของสิ่งนี้เมื่อ $t \to t_0$ หรือ $t \to \infty$ ถ้า $\lim\limits_{t \to t_0} f(p,t) = F(p)$ แต่ละตัวเลือก p ใน E แล้วอาจกล่าวได้ว่าค่าลิมิตเป็นในแง่ของจุดใน E โดยใช้พื้นฐานบนความแตกต่างกับลำดับ เลือกนิยามต่อไปนี้สำหรับความลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย

นิยาม 4.3 $\lim\limits_{t \to t_0} f(p,t) = F(p)$ *เสมอต้นเสมอปลายสำหรับ* $p \in E$ *ถ้ากำหนด* $\varepsilon > 0$ *ขึ้นย่อมมี* (delated neighbourhood N of t_0) *ย่าน* N *ใกล้เคียงจุด* t_0 *ซึ่ง* $|F(p) - f(p,t)| < \varepsilon$ *สำหรับทุก* t *ใน* N *และทุก* $p \in E$

โดยตัวอย่างให้ $f(x,t) = \dfrac{\sin xt}{t(1+x^2)}$ แล้วให้ $t \to 0^+$ และคำนวณค่าลิมิต (ในแง่ของจุด) โดยใช้ l'Hospital's rule จึงได้

$$\lim_{t \to 0^+} f(x,t) = \frac{x}{1+x^2}$$

สำหรับทุก $x, -\infty < x < \infty$ ลองพิสูจน์ว่าการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย สำหรับ x และ t ใดๆที่ $t \neq 0 = t_0$ จึงได้

$$\left| f(x,t) - F(x) \right| = \left| \left|\frac{\sin xt}{t(1+x^2)}\right| - \frac{x}{1+x^2} \right|$$

$$= \frac{|x|}{1+x^2} \left| \frac{\sin xt}{xt} - 1 \right|$$

เนื่องจาก $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ จึงเลือก β ซึ่ง $\left| \frac{\sin\theta}{\theta} - 1 \right| < \varepsilon$

เมื่อ $\left| \theta \right| < \beta$ สำหรับ R ใดๆให้ $\delta = \frac{R}{\beta}$ แล้วถ้า $\left| x \right| \leqslant R$ และ $\left| t \right| < \delta$,

$$\left| xt \right| < R\left(\frac{R}{\beta}\right) = \beta$$

ดังนั้น $\left| f(x,t) - F(x) \right| \leqslant R \left| \frac{\sin xt}{xt} - 1 \right| \leqslant R\varepsilon$

แสดงว่า $\lim_{t \to 0} f(x,t) = \frac{x}{1+x^2}$ เสมอต้นเสมอปลายบนแต่ละช่วง $[-R, R]$

ในการพิสูจน์ว่าลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนทั้งแกน จำเป็นต้องการประมาณการบวก

เนื่องจาก $\left| \frac{\sin\theta}{\theta} \right| \leqslant 1$ สำหรับทุก θ จึงพบว่าสำหรับแต่ละ x และ t

$$\left| f(x,t) - F(x) \right| \leqslant \frac{2|x|}{1+x^2}$$

เนื่องจาก $\lim_{|x| \to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$ เลือก R_0 ดังนั้นสำหรับ t ใดๆ

$$\left| f(x,t) - F(x) \right| < \varepsilon$$

เมื่อใดก็ตามที่ $\left| x \right| \geqslant R_0$ เมื่อรวมความไม่เท่ากันเหล่านี้จึงได้

$$\left| f(x,t) - F(x) \right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก x และ t ใดๆซึ่ง $\left| t \right| < \frac{\beta}{R_0}$

ความแตกต่างต่อไปของอนุกรมอนันต์ $\sum_{1}^{\infty} u_n(p)$ ของฟังก์ชัน คืออินทิกรัลไม่ตรง

แบบ $\int_c^{\infty} f(p, t)dt$ ในเมื่อ p เป็นตัวแปรเสริม และบางคนอาจกล่าวว่าเป็นการลู่เข้าในแง่ของจุดสำหรับ $p \in E$ ถ้าเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่ลู่เข้าสำหรับแต่ละตัวเลือก $p \in E$

นิยาม 4.4 *อินทิกรัล* $\int_c^{\infty} f(p,t)dt$ *ลู่เข้าสู่* $F(p)$ *เสมอต้นเสมอปลายสำหรับ* $p \in E$ *ถ้ากำหนด* $\varepsilon > 0$ *ใด ๆ ย่อมมี* r_0 *ขึ้นอยู่กับ* ε *แต่ไม่ขึ้นกับ* p *ซึ่ง*

$$\left| F(p) - \int_c^{r} f(p,t)dt \right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $r > r_0$ และทุก $p \in E$

ทฤษฎีบทส่วนใหญ่ในหัวข้อ 4.2 กระทำกับลำดับและอนุกรมมีข้อแตกต่างสำหรับค่าลิมิตต่อเนื่องและอินทิกรัลไม่ตรงแบบการพิสูจน์บางอันเป็นแบบเดียวกันแต่ก็มีข้อแตกต่างที่เป็นประโยชน์ซึ่งจะนำไปสู่ความแตกต่างระหว่างผลบวกที่รู้จบและอินทิกรัล จะให้การพิสูจน์อย่างสั้น ๆ สำหรับทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกัน

ทฤษฎีบท 4.12 *ให้* $\lim_{t \to t_0} f(p,t) = F(p)$ *เสมอต้นเสมอปลายสำหรับ* $p \in E$ *และสมมติว่าสำหรับแต่ละ* t, $f(p,t)$ *ต่อเนื่องสำหรับทุก* $p \in E$ *แล้ว* F *ต่อเนื่องบน* E

(การพิสูจน์ดูจากทฤษฎีบท 4.3)

ผลลัพธ์คือบนแทรกของทฤษฎีบท 4.3

ทฤษฎีบท 4.13 *ให้* $\int_c^{\infty} f(p,t)dt$ *ลู่เข้าสู่* $F(p)$ *เสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก* p *ในเซตเปิด* E *และสมมติว่า* $f(p,t)$ *ต่อเนื่องสำหรับทุก* (p,t) *ด้วย* $p \in E$ *และ* $t \geqslant c$ *แล้ว* F *ต่อเนื่องใน* E

พิสูจน์ กุญแจไปยังความจริงก็คือความจริงที่ว่าความต่อเนื่องเป็นคุณสมบัติเฉพาะและทุกจุดใน E มีย่านนั้นคือปกคลุมแน่น

กำหนด $p_0 \in E$ และ $\varepsilon > 0$ เลือก $r = r(\varepsilon)$ ดังนั้น

$\left| F(p) - \int_c^r f(p,t)dt \right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $p \in E$ แล้วจึงมาถึงจุดที่ว่า

$$\left| F(p) - F(p_0) \right| < 2\varepsilon + \left| \int_c^r f(p,t)dt - \int_c^r f(p_0,t)dt \right|$$

อย่างไรก็ดี $f(p,t)$ ต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก (p,t) ด้วย

$\left| p - p_0 \right| \leqslant \delta$, $c \leqslant t \leqslant r$ ดังนั้นโดยแบบฝึกหัด 4.2 ข้อ 18

$$\lim_{p \to p_0} \int_c^r f(p,t)dt = \int_c^r f(p_0,t)dt$$

นั่นคือ F ต่อเนื่องที่ p_0 □

การทดสอบการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายของอินทิกรัลไม่ตรงแบบตามมาตราฐานง่าย ๆ ด้วยตัวแปรเสริมก็คือ Weierstrass comparison test การพิสูจน์ก็คล้าย ๆ กับทฤษฎีบท 4.2

ทฤษฎีบท 4.14 *สมมติว่า* f *ต่อเนื่องและ* $\left| f(p,t) \right| \leqslant g(t)$ *สำหรับทุก* $t \geqslant c$ *และทุก* $p \in E$ *สมมติว่า* $\int_c^\infty g(t)dt$ *ลู่เข้าแล้ว* $\int_c^\infty f(p, t)dt$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก* $p \in E$

การทดสอบอันแรกในเรื่องนี้ซึ่งดูจะไม่เป็นจริงเสมอไปเมื่อกระทำกับอินทิกรัลไม่ตรงแบบพิจารณา

$$(4\text{–}22) \qquad F(x) = \int_1^\infty \frac{x^2}{1 + x^2t^2}\, dt$$

เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรตคล้องตาม $\left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ สำหรับทุก x และเนื่องจาก $\int_1^\infty t^{-2}dt$ ลู่เข้า จึงทราบว่า (4 – 22) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x เพราะฉะนั้นสรุปโดยทฤษฎีบท 4.13 ว่า F ต่อเนื่องสำหรับทุก x โดยเฉพาะอย่างยิ่งเนื่องจาก $F(0) = 0$ จึงทราบว่าอินทิกรัลใน (4 – 22) ซึ่ง $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$

กลับมายัง (4 – 22) และสังเกตว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 + x^2t} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-2} + t^2} = \frac{1}{t^2}$$

สามารถสรุปได้โดยตรงว่า

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_1^\infty t^{-2}\,dt = 1 \text{ ได้หรือไม่}$$

นั่นคือสามารถหาค่าลิมิตที่อนันต์โดยการลิมิตค่าภายในอินทิกรัลได้หรือไม่ โดยทั่ว ๆ ไป คำตอบก็คือไม่ได้ (ดูแบบฝึกหัด 4.3 ข้อ 3)

คำถามก็คือจะทำอะไรได้บ้างในขณะกลับข้อความจากเซต E ซึ่งความคงตัวได้สร้างขึ้นแล้วบนขอบเขตของ E เนื่องจาก ∞ กระทำเกี่ยวกับช่วงที่ไม่มีขอบเขต $0 \leqslant x < \infty$ (ถ้าไม่พอใจกับการเปลี่ยน ∞ สำหรับ 0 โดยแทน $s = \frac{1}{x}$)

สถานการณ์ขณะนี้ความแตกต่างระหว่างอนุกรมและอินทิกรัลยังไม่สมบูรณ์ จะมีคำถามอะไรบ้างสำหรับความแตกต่างโดยตรงสำหรับข้อความในผลลัพธ์ ในบทแทรกของทฤษฎีบท 4.4 ความแตกต่างเกี่ยวกับทฤษฎีบทเป็นจริงแต่สำหรับบทแทรกไม่จริง พิจารณาอินทิกรัล

(4–23) $\quad F(x) = \int_0^\infty x^2te^{-xt}dt\ ,\ x \geqslant 1$

สำหรับ t ใด ๆ ที่ $t \geqslant 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x,t) = 0$ เนื่องจาก e^{xt} มีค่ามากขึ้นได้เร็วกว่า x^2 สำหรับ t ใด ๆ ที่ $t > 0$ ดังนั้นอาจหวังได้ว่า $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ แต่อย่างไรก็ดีถ้าให้ $s = xt$ แล้วอินทิกรัล (4–23) ก็กลายเป็น

$$(4\text{–}24) \qquad F(x) = \int_0^\infty se^{-s}\,ds = 1$$

ในความจริงที่ว่า $F(x) = 1$ สำหรับทุก $x \geqslant 0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

สามารถตรวจสอบได้ว่า (4–23) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก $x \geqslant 1$ ด้วยวิธีเดียวกัน

$$\int_0^r x^2te^{-xt}dt = \int_0^{rx} se^{-s}\,ds$$

$$= -(1 + s)e^{-s}\Big|_0^r$$

$$= 1 - (1 + rx)e^{-rx}$$

ดังนั้น $\left| F(x) - \int_0^r f(x,t)dt \right| = (1 + rx)e^{-rx}$

$$\leqslant (1 + r)e^{-r}$$

สำหรับทุก $x \geqslant 1$ เนื่องจาก $\lim\limits_{r\to\infty} (1 + r)e^{-r} = 0$ ได้พิสูจน์การลู่เข้าคงตัวสำหรับ (4–23) โดยตรง [หมายเหตุ ตัวอย่างนี้ Weierstrass test ใช้ไม่ได้ดูแบบฝึกหัด 4.3 ข้อ 10)

ดังนั้นใน (4–32) ทราบได้ทันทีว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก $x \geqslant 1$ ในขณะที่ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ ไม่สามารถคำนวณโดยเคลื่อนเอาลิมิตเข้าไปไว้ในเครื่องหมายอินทิกรัลได้ ข้อนี้คือความแตกต่างไปจากความเป็นไปของอนุกรมในบทแทรกของทฤษฎีบท 4.4 คำถามก็คือทำไมจึงแตกต่างกันคำตอบก็อยู่ที่ความเป็นไปของผลบวกรู้จบกับอินทิกรัล ในกรณีของอนุกรม ใช้ความจริงที่ว่า $\sum\limits_1^N u_k(x)$ ต่อเนื่องในเซตใดเซตหนึ่งซึ่งฟังก์ชัน u_k ต่อเนื่องความแตกต่างอาจอยู่ที่ว่า $\int_c^r f(x, t)dt$ ต่อเนื่องสำหรับทุก x เมื่อ $f(x,t)$ ต่อเนื่อง การพิสูจน์ข้อความนี้ (อยู่ในแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 18) ขึ้นอยู่กับ $f(x,t)$ ต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายซึ่งจะกลับมาสู่การมีอยู่ของ x ในเซตปกคลุมแน่นอย่างไรก็ดีสิ่งที่เรากล่าวถึงคือเซตของ x ซึ่งสนับสนุนเราคือ $1 \leqslant x < \infty$ ซึ่งไม่ปกคลุมแน่น

ความจริงปัญหานี้ไม่สามารถแก้ได้ในการพิสูจน์ที่แตกต่างออกไปแต่ในการแทนค่าโดยให้ $s = xt$ ก็แสดงว่า

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^r x^2te^{-xt}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^{rx} se^{-s}\,ds = 1$$

ซึ่งเห็นแน่ชัดว่าไม่เหมือนกัน

$$\int_0^r \lim_{x\to\infty} x^2te^{-tx}\,dt = \int_0^r o\,dt = 0$$

วิธีการที่คุ้นเคยกันเป็นความต้องการอย่างมากในเรื่องความเป็นไปของลิมิตของตัวถูกอินทิเกรตเมื่อ $x\to\infty$ กล่าวคือ $\lim_{x\to\infty} f(x,t)$ ใน t บนทุกช่วง $[c, L]$

ทฤษฎีบท 4.15 *ให้* $f(x,t)$ *ต่อเนื่องสำหรับ* $x \geqslant b,\ t \geqslant c$ *และสมมติว่า* $\int_c^\infty f(x,t)dt$ *ลู่เข้าสู่* $F(x)$ *เสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก* $x \geqslant b$ *สมมติเช่นเดียวกันว่า* $\lim_{x\to\infty} f(x,t) = g(t)$ *เมื่อการลู่เข้านี้เสมอต้นเสมอปลายใน* t *บนทุกช่วงที่มีขอบเขต* $c \leqslant t \leqslant L$ *สำหรับแต่ละ* L *แล้ว*

(4–25) $$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_c^\infty g(t)dt$$

พิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ สมมติว่า $r_0 = r_0(\varepsilon)$ ดังนั้น

$$\left| F(x) - \int_c^{r_0} f(x,t)dt \right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } x \geqslant b$$

แล้วเลือก $x_0 = x_0(r_0, \varepsilon) = x_0(\in)$ ดังนั้น

$$\left| f(x,t) - g(t) \right| < \in \text{ สำหรับทุก } x \geqslant x_0$$

และทุก t, $c \leqslant t \leqslant t_0$

สำหรับจุด x_1 และ x_2 ใด ๆ ซึ่ง $x_i > x_0$ จึงได้ว่า

$$\left| F(x_1) - F(x_2) \right| \leqslant 2\,\varepsilon + \int_c^{r_0} \left| f(x_1,t) - s(t) \right| dt$$

$$+ \int_c^{r_0} \left| f(x_2,t) - g(t) \right| dt$$

$$\leqslant 2\varepsilon + 2(r_0 - c)\,\frac{\varepsilon}{r_0 - c} = 4\,\varepsilon$$

แสดงว่า $F(x)$ มีคุณสมบัติ Cauchy เมื่อ $x \to \infty$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ มีค่า □

โดยทฤษฎีบทนี้จึงแน่ใจว่า

$$\lim_{x\to\infty} \int_c^{r} f(x,t)\,dt = \int_c^{\infty} \lim_{x\to\infty} f(x,t)\,dt$$

ซึ่งมีรูปเดียวของทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างมีขอบเขตของ Lebesgue การปรับปรุงธรรมชาติเหล่านี้ทิ้งไว้ให้การวิเคราะห์จำนวนจริงขั้นสูงขึ้นไป

ตามบทแทรกของทฤษฎีบท 4.5 อนุกรมของฟังก์ชันที่ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายบนเซตปกคลุมแน่น สามารถอินทิเกรตในแง่ของพจน์บนเซตนั้น อันนี้มีข้อแตกต่างโดยตรงสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบซึ่งสามารถกระทำเช่นเดียวกับข้อความเกี่ยวกับการเปลี่ยนลำดับภายในของการอินทิเกรตไม่ตรงแบบ (ในทางต่อเนื่องกันกับทฤษฎีบท 4.16 สังเกตได้ว่าการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายยังไม่เพียงพอที่จะตัดสินได้เพียงแต่การเปลี่ยนแปลงภายในเมื่อทั้งอินทิกรัลที่ไม่ตรงแบบดังได้แสดงในข้อ 16 แบบฝึกหัด 4.3 นี่ก็เป็นการต่อเนื่องกับการหายไปของทฤษฎีบทเกี่ยวกับอินทิกรัลไม่ตรงแบบสองชั้นที่ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขที่ได้อธิบายไว้แล้วในตอนท้ายของหัวข้อ 2.5)

ทฤษฎีบท 4.16 $\int_a^b dx \int_c^\infty f(x,u)du = \int_c^\infty du \int_a^b f(x,u)dx$ *ถ้า* $f(x,u)$ *ต่อเนื่อง สำหรับ* $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant u \leqslant \infty$ *และ* $\int_c^\infty f(x,u)du$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ* x *บน* $[a, b]$

พิสูจน์ โดยการใช้ทฤษฎีบท 2.9 กับลำดับการอินทิเกรต จึงได้

$$\int_c^r du \int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b dx \int_c^r f(x,u)du$$

ดังนั้น $\int_c^\infty du \int_a^b f(x,u)du = \lim_{r\to\infty} \int_a^b dx \int_r^\infty f(x,u)du$

อีกทางหนึ่ง

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f(x,u)du = \int_a^b dx \int_c^r f(x,u)du + \int_a^b dx \int_r^\infty f(x,u)du$$

เนื่องจาก $\int_c^\infty f(x,u)du$ ลู่เข้าคงตัว

$$\lim_{r\to\infty^-} \int_r^\infty f(x,u)du = 0$$

เสมอต้นเสมอปลายสำหรับ $x\varepsilon [a,b]$ และ

$$\lim_{r\to\infty^-} \int_a^b dx \int_r^\infty f(x,u)du = 0 \quad \square$$

ถ้าไม่คำนึงถึงฟังก์ชันที่นำมาอินทิเกรตและช่วงของการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ การสลับลำดับของการอินทิเกรตเป็นไปไม่ได้ พิจารณาตัวอย่างของฟังก์ชัน F กำหนดโดย

$$F(x) = \int_0^\infty (2xu - x^2u^2)e^{-xu}du \tag{4-26}$$

สำหรับ $x = 0$, $F(0) = 0$ ก็คำนวณ F ได้โดยตรงโดย

$$F(x) = \lim_{R\to\infty} \left[xu^2e^{-xu}\right|_{u=0}^{u=R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} xR^2e^{-xR} = 0$$

ดังนั้น $F(x) = 0$ สำหรับทุก $x \geqslant 0$ ถ้าเป็นเช่นนี้แล้ว

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 dx \int_0^\infty (2xu - x^2u^2)e^{-xu}\,du = 0$$

พิจารณาโดยการสลับลำดับของการอินทิเกรตจึงได้

$$\int_0^\infty du \int_0^1 (2xu - x^2u^2)e^{-xu}dx = \int_0^\infty du \left[x^2ue^{-xu}\right|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u}du = 1$$

นี่เป็นการอธิบายด้วยความจริงที่ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบเดิม (4–26) ลู่เข้าไม่เสมอต้นเสมอปลายสำหรับ x ในช่วง $[0, 1]$ ภายใต้ความต้องการที่จะอินทิเกรตเราได้

$$F(x) = \lim_{R\to\infty} x\ R^2\ c^{-xR} = \lim_{R\to\infty} g(x, R)$$

และลู่เข้าไม่เสมอต้นเสมอปลาย เนื่องจาก $g(\frac{1}{R}, R) = \frac{R}{c}$ ซึ่งไม่มีขอบเขต (กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้สำหรับค่าต่าง ๆ ของ R ดังรูป 4–1)

เมื่อประสบเงื่อนไขต่าง ๆ สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่มีตัวแปรเสริมสามารถหาอนุพันธ์ได้ซึ่งกระทำกับตัวแปรเสริมภายในเครื่องหมายอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 4.17 *ถ้า* $\int_c^{\infty} f(x,u)\,du$ *ลู่เข้าสู่* $F(x)$ *สำหรับทุก* $x,\ a \leqslant x \leqslant b$ *และถ้า* f *และ* $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ *ต่อเนื่องสำหรับ* $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant u < \infty$ *และถ้า* $\int_c^{\infty} f_1(x,u)\,du$ *ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับ* $x \in [a,b]$ *แล้วสำหรับ* x *ใดๆ ใน* $[a,b]$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^{\infty} f_1(x,u)\,du = \int_c^{\infty} f_1(x,u)\,du$$

พิสูจน์ การพิสูจน์ที่ได้ผลก็เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.12 โดยให้

$$g(x) = \int_c^{\infty} f_1(x,u)\,du$$

เนื่องจากอินทิกรัลนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย และ f_1 ต่อเนื่อง g ต่อเนื่อง และสำหรับ $\bar{x}$ ใดๆ $a \leqslant \bar{x} \leqslant b,$

$$\int_a^{\bar{x}} g = \int_a^{\bar{x}} g(x)dx = \int_a^{\bar{x}} dx \int_c^{\infty} f_1(x,u)\,du$$

$$= \int_c^{\infty} du \int_a^{\bar{x}} f_1(x,u)\,dx$$

แต่ $\int_a^{\bar{x}} f_1(x,u)du = \int_a^{\bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\,dx = f(x,u) - f(a,u)$

และ $\int_a^{\bar{x}} g = \int_c^{\infty} [f(\bar{x},u) - f(a,u)]\,du$

$$= F(\bar{x}) - F(a)$$

เนื่องจาก g ต่อเนื่องแสดงว่า F หาอนุพันธ์ได้ และ $F' = g$ □

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่จะแสดงถึงเงื่อนไขสำหรับทฤษฎีบทเหล่านี้และความเป็นไปในการคำนวณค่าซึ่งจะนำไปใช้ในการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตพิเศษบางอันได้ด้วย

เริ่มด้วยสูตร

(4–27) $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xu}\,du$

เป็นจริงสำหรับทุก $x \geqslant 0$ ถ้าหาอนุพันธ์ก็จะได้

(4–28) $\frac{1}{x^2} = \int_0^\infty ue^{-xu}\,du$

ตรวจสอบความเป็นไปได้ของขบวนการนี้ พบว่า

$\left|ue^{-xu}\right| \leqslant ue^{-\delta u}$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x \geqslant \delta > 0$

เนื่องจาก $\int_0^\infty ue^{\delta u}\,du$ ลู่เข้าอินทิกรัลใน (4–28) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอต้นเสมอปลาย สำหรับทุก x ซึ่ง $\delta \leqslant x < \infty$ นี้เป็นเครื่องตัดสินการหาอนุพันธ์ และสูตร (4–28) เป็นจริงสำหรับทุกจุด x ที่อยู่ในช่วงเหล่านี้ นั่นคือสำหรับทุก x ซึ่ง $x > 0$

กรณีทั่ว ๆ ไปก็อาจแสดงได้ว่าสำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

4-29) $\frac{n!}{x^{n+1}} = \int_0^\infty u^n e^{-xu}\,du$

ตัวอย่างต่อไปพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

(4–30) $\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx$

เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรต $\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ สามารถเขียนแทน

ได้ด้วย $\int_1^2 e^{-xu}du$ ก็อาจเขียน (4 – 30) เสียใหม่เป็นอินทิเกรตซ้ำ

$\int_0^\infty dx \int_1^2 e^{-xu}\,du$ แล้วสลับลำดับการอินทิเกรตจึงได้

(4–31) $\int_1^2 du \int_0^\infty e^{-xu}\,dx$

โดยไม่เปลี่ยนแปลงค่าเนื่องจากภายในเครื่องหมายอินทิกรัลลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก u ซึ่ง $1 \leqslant u \leqslant 2$ โดยใช้ (4 – 27) จึงได้ค่าที่แท้จริงของ (4 – 30) คือ

$$\int_1^2 u^{-1} \, du = \log 2$$

บางครั้งการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตอาจนำมาต่อเนื่องกันเช่นตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้ ได้แสดงไว้แล้วในหัวข้อ 2.5 ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty x^{-1} \sin x \, dx$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขจะได้แสดงว่าค่าของมันเป็น $\frac{1}{2}\pi$ ให้

$$(4\text{–}32) \qquad F(u) = \int_0^\infty e^{-xu} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

อินทิกรัลนี้ลู่เข้าสำหรับ $u \geqslant 0$ และ $F(0)$ เป็นค่าจะหาเมื่อหาอนุพันธ์ (4–32) จึงได้

$$(4\text{–}33) \qquad F'(u) = -\int_0^\infty e^{-xu} \sin x \, dx$$

แล้วทำอินทิเกรตจึงได้ $F'(u) = -(1+u^2)^{-1}$ ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุก $u > 0$ เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรต ใน (4–33) ขึ้นอยู่กับ e^{-xu} และเช่นเดียวกับที่เคยพบแล้ว อินทิกรัลลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก u ด้วย $\delta \leqslant u < \infty$ และ $\delta > 0$ ใด ๆ ในการอินทิเกรตพบว่า $F(u) = C - \arctan u$ สำหรับทุก $u > 0$ สมมติให้ u มีค่าเพิ่มขึ้นจาก (4–32) พบว่า $\lim_{u\to\infty} F(u) = 0$ ดังนั้น

$$0 = C - \lim_{u\to\infty} \arctan u = C - \frac{1}{2}\pi$$

และ $C = \frac{1}{2}\pi$ จึงได้ $F(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u$ ดังนั้น

$$F(0) = \int_0^\infty x^{-1} \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi$$

เลยมีช่องว่างสำหรับปัญหานี้ ได้สรุปแล้วว่า

(4–34) $$\lim_{u\to\infty} \int_0^\infty e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx = 0$$

และ

(4–35) $$\lim_{u\to 0} \int_0^\infty e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

ก็ยังไม่ชัดที่จะสรุปได้แม้จะได้สรุปไปทั้งสองปัญหาอาจมองดูโดยเร็ว เนื่องจาก

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos (xs)\, ds$$

ซึ่งจะติดตามมาด้วย $\left| x^{-1} \sin x \right| \leqslant 1$ สำหรับทุก x ดังนั้นสำหรับ u ใด ๆ

$$\left| \int_0^\infty e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-ux}\, dx = \frac{1}{u}$$

และเพราะฉะนั้น $\lim_{u\to\infty} F(u) = 0$ ซึ่งก็คือ (4–34) นั่นเอง

พิจารณา (4–35) พบว่าอินทิกรัลซึ่งกำหนด F(u) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก $u \geqslant 0$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4.13 อินทิกรัลที่กำหนด F(u) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก $u \geqslant 0$ โดยทฤษฎีบท 4.13 ให้ความมั่นใจว่า (4–35) ได้แสดงว่าสามารถทำลิมิตเข้าไปในเครื่องหมายอินทิกรัลได้การทดสอบแบบ Weierstrass จะไม่แสดงการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายในตัวอย่างนี้เนื่องจากฟังก์ชันที่จะอินทิเกรต (4–35) ให้

$$\left| e^{-xu} \frac{\sin x}{x} \right| \leqslant \frac{|\sin x|}{x}$$

และ $\int_0^\infty x^{-1} \left| \sin x \right| dx$ ลู่ออก ถ้าจะใช้วิธีการทดสอบแบบ Dirichlet (ทฤษฎีบท 2.17) และ intigrate by parts ครั้งหนึ่งจึงได้

$$\int_r^\infty e^{-xu} \frac{\sin x}{x}\, dx = \Big[- e^{-ux} x^{-1} \cos x \Big]_{x=r}^{x=\infty} - \int_r^\infty \frac{(1 + xu)\, e^{-xu} \cos x}{x^2}\, dx$$

และโดยการประมาณค่าอินทิกรัลจึงได้

$$\left|\int_r^{\infty} e^{-xu}\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{e^{-ux}|\cos r|}{r} + \int_r^{\infty} x^{-2}dx$$

$$\leqslant \frac{2}{r}$$

สำหรับ $u \geqslant 0$ ใดๆ เนื่องจาก $\lim_{r\to\infty} \frac{2}{r} = 0$, (4–32) ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย สำหรับเซตของค่าของ u และได้พิสูจน์แล้วว่า $\int_0^{\infty} x^{-1}\sin x\, dx$ มีค่าแน่นอนคือ $\frac{\pi}{2}$

อินทิกรัลพิเศษอีกอันหนึ่งที่ใช้วิธีการเดียวกัน คือ

(4–36) $$\int_0^{\infty} \exp\,(-x^2 - x^{-2})\,dx$$

พิจารณาอินทิกรัลที่สัมพันธ์กันคือ

(4–37) $$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-\frac{u^2}{x^2}}\,dx$$

พบว่า F(1) เป็นอินทิกรัลที่ต้องการหาค่า ในขณะที่ F(0) ก็คืออินทิกรัลที่เคยพบมาแล้วในหัวข้อ 2.5 คือ $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ ซึ่งมีค่า $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ เมื่อหาอนุพันธ์ (4–37) จึงได้

(4–38) $$F'(u) = -2\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{x^2}\right) e^{-x^2} e^{-\frac{u^2}{x^2}}\,dx$$

เพื่อจะตัดสินต้องแสดงว่าอินทิกรัลนี้ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย เขียนตัวถูกอินทิเกรตใน (4–38) เสียใหม่เป็น $u^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)^2 e^{-\left(\frac{u}{x}\right)^2} e^{-x^2}$ และใช้ความจริงที่ว่า $s^2e^{-s^2}$ มีค่าสูงสุดเป็น e^{-1} พบว่าตัวถูกอินทิเกรตมีค่าขึ้นอยู่กับ $\frac{1}{eu}\,e^{-x^2}$ ดังนั้นอินทิกรัลลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก $u \geqslant \delta > 0$ ไม่สามารถจะอินทิเกรต (4–38) ได้ง่ายๆ อย่างไรก็ดีลองแทนค่าโดยใช้ $t = \frac{u}{x}$ และคำนวณสำหรับ $u > 0$ ใดๆ

$$F'(u) = -2\int_{\infty}^{0} u^{-1}\, t^2\, e^{-t^2}\, e^{-\left(\frac{u}{t}\right)^2} \left(\frac{-u}{t^2}\right) dt$$

$$= -2\int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{u^2}{t^2}} dt$$

$$= -2F(u)$$

เมื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้ย่อมได้ $F(u) = Ce^{-2u}$ เป็นจริงสำหรับทุก $u > 0$ อย่างไรก็ดี อินทิกรัล (4–37) ซึ่งกำหนด F ลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก u เนื่องจาก $\left| e^{-x^2} e^{-\frac{u^2}{x^2}} \right| \leqslant e^{-x^2}$ สำหรับทุก u โดยเฉพาะอย่างยิ่ง F ต่อเนื่องที่ 0 และ $\lim\limits_{u \to 0^+} F(u) = F(0)$ และทราบว่า $F(0)$ มีค่า $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ดังนั้น

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ และ } F(1) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2}$$

แบบฝึกหัด 4.3

1) จงสำรวจความมีค่าและเสมอต้นเสมอปลายของ

$$\lim_{r \to 0} \int \frac{x \sin x}{f}$$

2) ให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $0 \leqslant x < \infty$ ด้วย $\left| f(x) \right| < M$ ให้

$$F(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{uf(x)\, dx}{u^2 + x^2}$$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{u \to 0^+} F(u) = f(0)$

3) จงแสดงว่า ความจริง $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ เมื่อ $F(x)$ กำหนดขึ้นโดย (4–22)

จงคำนวณหาค่าต่อไปนี้

4) $\lim\limits_{r\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^2u\,du}{x\quad 8}$

6) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(xu)\,du}{u^2}$

7) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

8) $\int_0^{\infty} e^{-u^2}\cos(xu)\,du$

9) $\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\,dx$

10) จงแสดงว่าไม่มีฟังก์ชัน $g(t)$ ซึ่ง $\int_0^{\infty} g(t)dt$ ลู่เข้าในขณะที่ $x^2te^{-xt} < g(t)$ สำหรับ

ทุก $x \geqslant 1,\ t \geqslant 0$

11. จงสำรวจความมีค่าและเสมอต้นเสมอปลายของลิมิต

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{xt}-1}{x}\ ;\ 0 < x < \infty$$

12. จงคำนวณ

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$

(b) $\int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$

13. จงคำนวณ

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \sin(e^{xt})dt$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{x\,dt}{1+x^2t^2}$

14. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.13

15. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.14

16. จงแสดงว่า $\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} G(x,y)dy \neq \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} G(x,y)dx$ ถ้า

$$G(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

4.5 ฟังก์ชันแกมมา

Gamma Function

ในหัวข้อ 4.4 ได้กล่าวไว้แล้วถึงคุณสมบัติของฟังก์ชันในรูปของอินทิกรัล ยกเว้นเมื่อฟังก์ชันสามารถแสดงได้ในพจน์ของฟังก์ชันเบื้องต้น เมื่อเป็นไปไม่ได้ อินทิกรัลเองก็อาจทำในรูปของการนิยามฟังก์ชันขึ้น และคุณสมบัติของฟังก์ชันก็ถูกรวมเข้าไปจากอินทิกรัลที่ใช้แทนค่าฟังก์ชันนั้น ตัวอย่างง่าย ๆ และคุณเคยกับในขบวนการนี้ก็คือ นิยามของฟังก์ชันลอการิธึมโดยสูตร

(4 – 39) $$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \ x > 0$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรก็อาจคำนวณคุณสมบัติทางพีชคณิต ตัวอย่างเช่น พิสูจน์ว่า $L(\frac{1}{x})$ คือ $-L(x)$ ให้ $t = \frac{1}{u}$ และได้

$$L(\tfrac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{t} = \int_1^x u(-u^{-2})du$$
$$= -\int_1^x \frac{du}{u} = -L(x)$$

ตัวอย่างที่ไม่ค่อยจะคุ้นเคยกันที่นำไปสู่ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเริ่มด้วยนิยาม

(4 – 40) $$A(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

เสมือนตัวอย่างที่เคยทำมาแล้ว โดยการเปลี่ยนตัวแปร $t = \frac{1}{u}$ และได้

$$A(x) = \int_{\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{-u^{-2}}{1+u^{-2}}\,du = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

ให้ $K = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to\infty} A(x)$ แล้วอินทิกรัลสุดท้ายก็คือ

$$K - \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = K - A(\tfrac{1}{x})$$

ดังนั้นได้แสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ $A(x) + A\left(\frac{1}{x}\right) = K$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $A(1) = \frac{K}{2}$; π อาจกำหนดได้ด้วย 2K, (4–40) ซึ่งก็คือนิยามของ $\tan\theta$ โดยสมการ $\theta = A(x)$ แบบฝึกหัด 4.4 ข้อ 2 เป็นการพิสูจน์เอกลักษณ์สำหรับ $\tan(2\theta)$

ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาคุณสมบัติบางสิ่งบางอย่างที่ง่าย ๆ ของฟังก์ชันแกมมา ซึ่งกำหนดไว้ในรูปอินทิกรัล

$$(4-41) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u}\, du$$

ลู่เข้าสำหรับทุก $x > 0$ และลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทุก x ในช่วง $[\delta, L]$ สำหรับ $\delta > 0$ และ $L < \infty$ ใด ๆ ดังนั้น $\Gamma(x)$ ต่อเนื่องสำหรับทุก $x > 0$ ถ้า x ที่เลือกเป็นจำนวนเต็ม (4 – 41) ก็กลายเป็นอินทิกรัล ซึ่งสามารถหาค่าที่แน่นอนได้ ดังนั้นสามารถเปรียบเทียบกับสมการ (4 – 2) ในหัวข้อ (4.4) ได้

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} u^n e^{-u}\, du = n!$$

ถ้าเขียน $x! = \Gamma(x+1)$ เพราะฉะนั้นจึงได้นิยามของแฟกทอเรียล (factorial) ซึ่งใช้กับเลขที่ไม่ใช่จำนวนเต็มที่มีค่า x ซึ่งจะตรงกันกับเมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชันแกมมายังคงมีคุณสมบัติ $(x+1)! = (x+1)(x!)$

ทฤษฎีบท 4.18 $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ *สำหรับทุก* $x > 0$

พิสูจน์ โดยอินทิเกรตทีละส่วนจึงได้

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} u^x e^{-u} du$$

$$= \Big[-u^x e^{-u}\Big]_{u=0}^{u=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u} d(u^x)$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} x e^{-u} u^{x-1}\, du$$

$$= x\int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1}\, du$$

$$= x\,\Gamma(x) \quad \square$$

โดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรอาจเลือกใช้นิยามของฟังก์ชันแกมมาที่อยากจะใช้ในการหาค่าได้ ดังรายการข้างล่าง

(4 – 42) $$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2}\,dt, \qquad \{u = t^2\}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1} dt, \qquad \{u = -\log t\}$$

(4 – 43) $$\Gamma(x) = c^x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-ct}\,dt, \qquad \{u = ct\}$$

(4 – 44) $$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{xt} e^{-e^t}\,dt, \ \{u = e^t\}$$

ฟังก์ชันแรกของ (4–42) สามารถใช้คำนวณค่า $\Gamma(x)$ เมื่อ x เป็นผลคูณด้วยเลขคี่ของ $\frac{1}{2}$ ได้

ทฤษฎีบท 4.19 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *และโดยทั่ว ๆ ไป*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\, n!}$$

พิสูจน์ ให้ $x = \frac{1}{2}$ ใน (4–42) จึงได้

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 4.18 ที่ว่า $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ จึงได้

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

สำหรับสูตรทั่ว ๆ ไปอาจพิสูจน์ได้ด้วยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ คือ

เมื่อ $n = 1$, $\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2!\,\sqrt{\pi}}{4 \times 1!}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \text{ จริง}$$

ให้ n = k สูตรนี้จริงนั่นคือ

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{4^k k!}$$

ตรวจสอบเมื่อ n = k + 1

$$\Gamma\left((k+1) + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) + 1\right)$$

$$= \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{4^k k!}$$

$$\frac{(2k) + 1}{2}\,!\,\frac{\sqrt{\pi}}{4^k k!}$$

$$= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!\sqrt{\pi}}{2(2k+2)(4^k k!)}$$

$$= \frac{(2k+2)!\sqrt{\pi}}{(k+1)4^{k+1}k!}$$

$$= \frac{(2(k+1))!\sqrt{\pi}}{4^{k+1}(k+1)!}$$

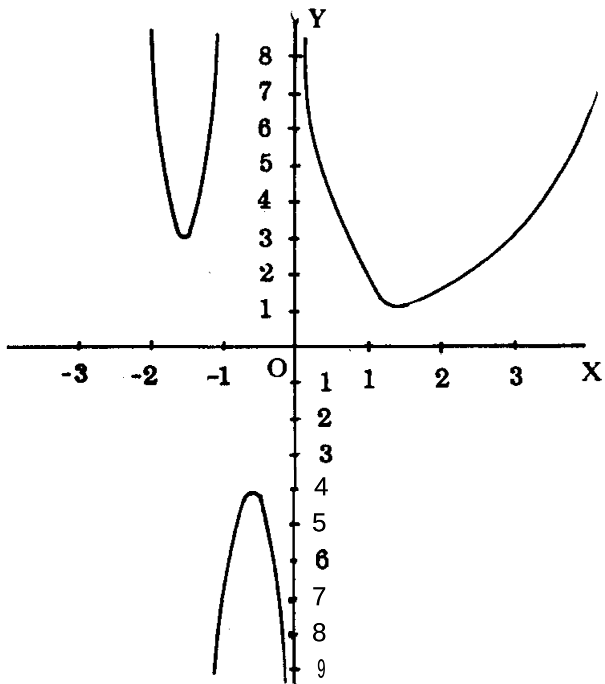
นั่นคือสูตร $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ **จริงทุกค่าของ** $n \in N$ □

ถ้าทราบว่าฟังก์ชันแกมมาบนช่วง $[k, k+1]$ ก็สามารถคำนวณหาค่าฟังก์ชันแกมมาที่เหลือในช่วงนี้ได้ เป็นรูปตาราง กลับมาพิจารณาสูตรซึ่งอาจเขียนว่า $\Gamma(x) = x^{-1}\ \Gamma(x+1)$ เนื่องจาก $\Gamma(1) = 1$ แสดงว่า $\Gamma(x) \approx x^{-1}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 สำหรับฟังก์ชันแกมมารูปนี้เป็นค่าลบที่ไม่ใช่จำนวนเต็มสำหรับค่าของ x ตัวอย่างเช่น

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

และ $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

ฟังก์ชัน $\Gamma(x)$ ไม่มีขอบเขตเมื่อ x เข้าใกล้จำนวนเต็มลบจึงเขียนกราฟคราว ๆ ของ $y = \Gamma(x)$ ได้ดังรูป 4–5



รูป 4–5

การแสดงโดยวิธีเฉพาะสำหรับประมาณค่าของความเป็นไปของฟังก์ชันที่กำหนดโดยอินทิกรัลสามารถหาสูตรเส้นกำกับ (asymptote) สำหรับ $\Gamma(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม n ซึ่งได้การประมาณค่าของสเตอร์ลิง (Stirting's approximation) สำหรับ n!

กลับไปพิจารณา (3–30) แสดงว่า $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, C_n$ เมื่อลำดับ $\{C_n\}$ มีขอบเขตซึ่งพจน์อยู่ระหว่าง 1.9 และ 2.8 ผลลัพธ์ต่อไปจะแสดงว่าความจริง $\lim_{n\to\infty} C_n = \sqrt{2\pi}$ และ n สามารถแทนด้วย x ดังนั้นจึงสูตรของเส้นกำกับของ x! คือ $\Gamma(x+1)$

ทฤษฎีบท 4.20 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$

ผลลัพธ์นี้มักจะเขียนว่า $x! \approx x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ แต่สัญลักษณ์การประมาณค่าอาจแปรความหมายในรูปของความสัมพันธ์มากกว่าค่าโดยประมาณสัมบูรณ์ที่มีค่าน้อย ๆ ตัวอย่างเช่น 100! มีค่าประมาณ (9.3326) 10^{157} ในขณะที่สูตรของสเตอร์ลิงให้ $100^{100} e^{-100} \sqrt{200\pi}$ ซึ่งมีค่าประมาณ (9.3248) 10^{157} ค่าพลาดสัมพัทธ์เป็น

$$\frac{9.3326}{9.3248} - 1 = .0008$$

หรือ .08 เปอร์เซ็นต์ในขณะที่ค่าผิดพลาดสัมบูรณ์อย่างน้อย 10^{155}

พิสูจน์ เริ่มจากสูตรดั้งเดิมของ $\Gamma(x+1)$ ถ้าให้ $u = xt$ จึงได้

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty u^x e^{-u} du = x^{x+1} \int_0^\infty t^x e^{-xt} dt$$

ดังนั้น
$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \sqrt{x} e^x \int [te^{-t}]^x dt$$

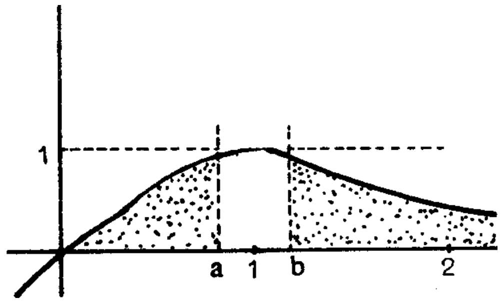
$$= \sqrt{x} \int [te^{1-t}]^x dt$$

ฟังก์ชัน $g(t) = te^{1-t}$ มีค่าสูงสุดบน $0 \leqslant t < \infty$ ที่ $t = 1$ เมื่อ $g(1) = 1$ ดังนั้น $0 \leqslant g(t) < 1$ สำหรับทุก $t \neq 1$, $t \geqslant 0$ ข้อเสนอแนะที่แยกช่วงของการอินทิเกรตออกเป็นสามส่วนเพื่อย้ำความเข้าใจเมื่อใกล้ $t = 1$ สำหรับถ้า x มีค่ามากและ t ไม่ใช่ 1, $[g(t)]^x$ มีค่าน้อยมากเลือกช่วง $[a,b]$ รอบ ๆ $t = 1$ และเขียน

$$C(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} \int_0^b [g(t)]^x dt + \sqrt{x} \int_a^b [g(t)]^x dt + \sqrt{x} \int_b^\infty [g(t)]^x dt$$

เมื่อ $0 < a < 1 < b < \infty$ ดูรูป 4–6 จุดมุ่งหมายก็คือการแสดงว่า



รูป 4.6

$\lim_{n\to\infty} C(x) = \sqrt{2\pi}$ สิ่งที่จะต้องพิจารณาสิ่งแรกก็คืออินทิกรัลแรกและอินทิกรัลที่สามในผลบวกนั้นบนช่วง $[0,a]$, $g(t) \leqslant g(a) < 1$ และ

$$\sqrt{x}\int_0^a [g(t)]^x dt \leqslant a\sqrt{x}\,[g(a)]^x \to 0$$

เมื่อ x มีค่าเพิ่มบนช่วง $b \leqslant t < \infty$, $g(t) \leqslant g(b) < 1$ ดังนั้น

$$\sqrt{x}\int_b^\infty [g(t)]^x dt = \sqrt{x}\int_b^\infty [g(t)]^{x-1} g(t)dt$$

$$\leqslant \sqrt{x}\,[g(b)]^{x-1}\int_0^\infty g(t)dt$$

ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ x เพิ่มขึ้น

ได้ทั้งการอินทิกรัลส่วนกลางเลือก $a = 1 - \delta$ แล้ว $b = 1 + \delta$ เมื่อเลือกδ ขึ้นแล้วหลังจากได้แทน $s = t - 1$ จึงกลายเป็น

(4–45) $$I(x) = \sqrt{x}\int_{-\delta}^{\delta} \left[(1+s)e^{-s}\right]^x ds$$

บทนำ 1 *สำหรับ* s *ที่ใกล้* 7 0, $(1+s)\,e^{-s} = e^{-s^2 h(s)}$ *เมื่อ* $\lim_{s\to 0} h(s) = \frac{1}{2}$

พิสูจน์ โดย l'Hospital's rule พบว่า

$$h(s) = \frac{-\log(1+s)+s}{s^2} \quad \Box$$

ฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตใน (4 – 45) จึงได้ว่า $e^{-xs^2 h(s)}$ เลือก δ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก δ ซึ่ง $\left|h(s) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก s, $|s| \leqslant \delta$ แล้วสำหรับแต่ละ s, $-\delta \leqslant s \leqslant \delta$

(4 – 46) $$e^{-xs^2(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \leqslant e^{-xs^2 h(s)} \leqslant e^{-xs^2(\frac{1}{2}-\varepsilon)}$$

อาจใช้ประมาณค่า I(x) แต่จำเป็นต้องคำนวณง่าย ๆ ก่อน

บทนำ 2 *สำหรับ* $\delta > 0$ *และจำนวนใด ๆ* $c > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-cxs^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

พิสูจน์ ให้ $u = \sqrt{cx}\, s$, ก็จะได้

(4 – 47) $$\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\delta\sqrt{cx}}^{\delta\sqrt{cx}} e^{-u^2} du$$

และเมื่อ x เพิ่ม $\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$ โดย (2 – 40) ก็คือ $\sqrt{\frac{\pi}{c}}$ $\Box$

พิจารณา (4 – 46) และอินทิเกรตระหว่าง $-\delta$ ถึง δ พบว่า I(x) ที่กำหนดโดย (4 – 45) มีค่าระหว่าง $\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$ และ $\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ เมื่อ x เพิ่ม เนื่องจาก ε เป็นน้อยอย่างไรก็ได้ เราอาจสรุปได้ว่า $\lim_{x\to\infty} I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$ $\Box$

ถ้ายอมรับฟังก์ชันแกมมาเป็นฟังก์ชันที่จะใช้อธิบายฟังก์ชันอื่น และอินทิกรัลสามารถหาค่าแน่นอนได้

ทฤษฎีบท 4.2 $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *เมื่อ* p *และ* q *เป็นจำนวนจริงบวก*

พิสูจน์ อินทิกรัลที่กำหนด B เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรค่าเป็นจำนวนจริงที่ทราบกันดีว่าเป็นฟังก์ชันเบตา (beta function) เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวกฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตก็คือพหุนาม และ $B(p, q)$ สามารถคำนวณค่าได้โดยง่าย ทฤษฎีบทต้องการความเป็นไปได้ในการคำนวณสำหรับทุกจำนวนจริงบวก p และ q ใช้วิธีการที่คล้ายกับการคำนวณ $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ ใน (2 – 40) โดยใช้สูตร (4 – 42) สำหรับฟังก์ชันแกมมา โดยการเปลี่ยนแปลงตัวแปรเสียบ้างสำหรับอินทิเกรตจึงได้

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty x^{2q-1}e^{-x^2}dx$$

ผลคูณของทั้งสองข้างบนจึงได้

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty} 4\int_0^R y^{2p-1}e^{-y^2}dy\int_0^R x^{2q-1}e^{-x^2}dx$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty y^{2p-1}x^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

เนื่องจากฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบสองชั้นนี้มีค่าเป็นบวก ก็สามารถอินทิเกรตบนจตุภาคที่หนึ่งโดยใช้หนึ่งในสี่ของวงกลมสำหรับพิกัดเชิงขั้ว โดยแทนค่า x ด้วย $r\cos\theta$, y ด้วย $r\sin\theta$ และ $dxdy$ ด้วย $rdr\,d\theta$ เมื่อแทนค่าแล้วย่อมได้

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty} 4\int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1} e^{-r^2} r\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\infty} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2q-1}(\sin\theta)^{2p-1} d\theta$$

ในอินทิกรัลแรกให้ $u = r^2$ ดังนั้น $dr = \frac{du}{2r}$ และอันที่สองให้ $v = \sin^2\theta$ ดังนั้น $d\theta = \frac{dv}{2\sin\theta\cos\theta}$ แล้ว

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty} \frac{u^{r+q+\frac{1}{2}} e^{-u}}{2u^{\frac{1}{2}}} du \int_0^1 \frac{(1-v)^{q-1}\; v^{r-\frac{1}{2}}}{2v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}} dv$$

$$= \int_0^{\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1} dv$$

$$= \Gamma(p+q)\,B(p,q)$$

อินทิกรัลหลายอันซึ่งไม่ได้เริ่มต้นมาจากฟังก์ชันเบตา สามารถนำเข้าอยู่ในรูปของฟังก์ชันเบตาแล้วจึงคำนวณค่า ดังตัวอย่างทั้งสองข้างล่าง

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{u^{-\frac{3}{4}}\,du}{4(1-u)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \;;\; u = x^4$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\; d\theta = \int_0^1 \frac{v^{\frac{1}{4}}\,dv}{2\,v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \;;\; v = \sin^2\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงแสดงจากนิยามของอินทิกรัลในสมการ (4 – 39) ว่าฟังก์ชัน L มีคุณสมบัติ

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

2. (a) จงแสดงว่าฟังก์ชัน A กำหนดโดย (4 – 40) มีคุณสมบัติ

$$A\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2A(x) \quad \text{สำหรับ } x \text{ ใดๆที่ } |x| < 1$$

(b) จงแสดงว่า (4–40) นำไปสู่ $\tan(2\theta) = (2\tan\theta)/(1-\tan^2\theta)$

3. จงพิสูจน์ปัญหาในทฤษฎีบท 4.19 ให้สมบูรณ์

4. ในพจน์ของฟังก์ชันแกมมา จงคำนวณค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

a) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^3}}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \log \frac{1}{x}}}$

c) $\int_0^1 \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]^{\frac{1}{3}} dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

5. จงแสดงว่า $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}\, du$

6. จงหาค่า $\int_0^{\infty} u^p e^{-u} du$

7. จงหาค่า $\int_0^{\infty} x^r \left[\log\left(\frac{1}{x}\right)^s\right] dx$

8. ฟังก์ชันค่าผิดพลาดกำหนดโดย

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

จงทำฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันค่าผิดพลาดดังกล่าว

a) $\int_1^L e^{-\frac{1}{s^2}} ds$ b) $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$

c) $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt$

9. a> จงแสดงว่า $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^{\frac{1}{4}}} = \frac{138}{35}$

b) จงแสดงว่า $\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{32}$

10. จงแสดงว่า $B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$ (คำแนะนำ $x = \frac{u}{1+u}$)

11. ใช้ข้อ 10. แสดงว่า $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{16}$

12. จงแสดง $\int_1^{\infty} (x-1)^{\frac{2}{3}} x^{-2} dx$ ในพจน์ของฟังก์ชันแกมมา

13. สมการข้างล่างกำหนดขึ้นโดย Wallis (1650)

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7}\right)\cdots$$

จงใช้สูตรของสเตอร์ลิงแสดงว่าถูกต้อง