# บทที่ 3
# อนุกรม
## SERIES

### 3.1 คำนำ

เรื่องที่จะได้ศึกษาในบทนี้เป็นเรื่องของ

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

เป็นอนุกรมอนันต์ซึ่งแต่ละพจน์เป็นจำนวนเลข สำหรับผู้อ่านบางท่านอาจจะถือเสียว่าเป็นบททบทวน อย่างไรก็ดีจะได้รวมเอาการทดสอบด้วยอัตราส่วนมาตรฐาน การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบและการทดสอบด้วยอินทิกรัล และจะได้ศึกษาเกี่ยวกับการทดสอบด้วยอัตราส่วนเปรียบเทียบ การทดสอบของแรบ (Raabe) และการทดสอบของไดริชเลต (Dirichlet) ซึ่งจะนำมาใช้ในเรื่องของอนุกรมที่จะออกไปจากการทดสอบอื่น ๆ เพื่อการลู่เข้าและลู่ออก จะมีการศึกษาสั้น ๆ ถึงลักษณะการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขกับการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และผลกระทบที่ได้แจกแจงไว้แล้ว

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวเล็ก ๆ น้อยๆ ในทางทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ของอนุกรมสองชั้น เนื่องจากมีความเกี่ยวพันธ์โดยตรงกับผลคูณโคชีของอนุกรมและเนื่องจากปัญหาทางเรขาคณิตง่าย ๆ ก็นำมาสู่อนุกรมสองชั้น คอมพิวเตอร์ยังไม่จำเป็นที่จะนำมาใช้ในตอนนี้ผู้อ่านคงไม่มีข้อสงสัยสำหรับผลบวกของอนุกรมซึ่งย่อมเป็นที่เข้าใจว่ากี่พจน์ ที่นำมาบวกกันแล้วให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง และวิธีการลดพจน์จึงจะครอบคลุมความถูกต้อง

## 3.2 อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

อนุกรมอนันต์ซึ่งได้กำหนดขึ้นในรูป $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ซึ่งเป็นที่ยอมรับว่าเป็นผลในหลาย ๆ ทาง เพื่อให้ปราศจากข้อกังขาต่าง ๆ จึงให้ทำความเข้าใจนิยามที่เป็นแบบแผนต่อไปนี้

**นิยาม 3.1** *อนุกรมอนันต์ของจำนวนจริงเป็นคู่ลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ และ $A_n$ ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้*

(3-1) $$A_n = \sum_{1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$a_1 = A_1,\ a_2 = A_2 - A_1,\ a_3 = A_3 - A_2,\ \ldots,\ a_n = A_n - A_{n-1}$$

ลำดับแรกเป็นลำดับของผลบวกย่อยทางพจน์แรก (sequence of partial sums) ลำดับที่สองเป็นลำดับของพจน์ (sequence of terms) ถ้าอันใดอันหนึ่งถูกกำหนดขึ้นอีกอันหนึ่งย่อมกำหนดขึ้นได้โดยความสัมพันธ์ (3-1) เพื่อให้เขียนสัญลักษณ์ให้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน อาจเขียน $< \{a_n\}, \{A_n\} >$ แต่มักเขียนในรูป $\sum_{1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ แม้ว่าลำดับจะเขียนในรูปใด ๆ อนุกรมก็คือคู่อันดับดังนิยาม อาจกล่าวถึงการกำหนดค่าของพจน์ที่ 6 ของอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ (ซึ่งคือ $\frac{1}{42}$) ได้เช่นเดียวกับผลบวกหกพจน์แรก (ซึ่งคือ $\frac{6}{7}$) อันดับ n เป็นตัวเลขที่ใช้แทนค่าได้ตามที่ต้องการจะหา เช่นเดียวกับอันดับพจน์แรกไม่จำเป็นต้องเริ่มด้วย 1 เสมอไป มักพบบ่อย ๆ ที่เริ่มด้วยตัวเลขอื่นเช่น $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

ดังกล่าวข้างต้นเป็นสิ่งที่รัดกุมแต่ไม่มีผลในข้อคล้ายคลึงกันระหว่างอนุกรมอนันต์ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ กับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_c^{\infty} f(x)dx$ ฟังก์ชัน $f(x)$ สมนัยกับอันดับของพจน์ $\{a_n\}$ และผลบวกบางส่วน $\sum_{1}^{n} a_k = A_k$ กับ $F(r) = \int_0^r f$ ความสมนัยนี้หมายความว่าส่วนใหญ่ของทฤษฎีบทในหัวข้อ 2.5 มีข้อคล้ายคลึงกันในบทนี้ด้วยการพิสูจน์ที่คล้ายคลึงกันมากด้วยเหตุผลอันนี้การพิสูจน์ต่อไปนี้จะกระทำแต่เพียงย่อ ๆ

ในทางพีชคณิตของอนุกรมอาจนิยามได้ดังต่อไปนี้

**นิยาม 3.2** *ผลคูณของอนุกรม* $\Sigma a_n$ *และจำนวนจริง* c *ก็คืออนุกรม*

$$\Sigma(ca_n) = ca, + ca, + ca, + \ldots$$

*ผลบวกของอนุกรม* $\Sigma a_n$ *และ* $\Sigma b_n$ *ก็คืออนุกรม*

$$\Sigma(a_n + b_n) = (a, + b_1) + (a, + b_2) + (a, + b_3) + \ldots$$

ดังนั้นถ้า $a, = \frac{1}{n}$ และ $b_n = \frac{-1}{(n+1)}$ แล้ว

$$\Sigma a_n + \Sigma b_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

1 1 1 1

2 6 12 20

ซึ่งอาจเขียนได้เป็น

(3–4) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ควรสังเกตว่าอนุกรมนี้ไม่ใช่อนุกรมเดียวกันกับ

(3–5) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots$$

โดยการคำนวณ $\Sigma(a_n + b_n)$ ตามที่กำหนดให้โดยตรงจะได้ (3 – 4) สำหรับ (3 – 5) มีพจน์ต่างกันออกไป

**นิยาม 3.3** *อนุกรม* $\Sigma a_n$ *กล่าวได้ว่าลู่เข้าสู่ผลบวก* A *เมื่อลำดับของผลบวกบางส่วน* $\{A_n\}$ *ลู่เข้าสู่* A *อนุกรมที่ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนใด ๆ เรียกว่าอนุกรมนั้นลู่ออก*

สังเกตว่าการดำเนินการ (operation) ทางพีชคณิตดังกล่าวแล้วข้างต้นอาจมองเห็นได้ว่าอนุกรมใดลู่เข้าหรือลู่ออกอย่างไร พบว่าทั้งสองอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{1}^{\infty} b_n$ ที่กำหนดดัง

กล่าวข้างต้นต่างลู่ออก แต่ผลบวก (3 – 4) เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า พิจารณาสำหรับผลบวกของ n พจน์แรกได้

(3 – 6) $\quad (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 1

สิ่งที่สับสนกันบ่อย ๆ ในการศึกษาเกี่ยวกับอนุกรมก็คือ ความเคยชินที่ไม่ค่อยดีในการใช้การกระจาย "$\Sigma a_n$" ในความหมายพร้อม ๆ กันทั้งอนุกรมและสำหรับผลบวก (เมื่อลู่เข้า) ลองพิจารณาข้อแตกต่างระหว่างสองความหมายดังกล่าวใน "$\Sigma a_n$" ลู่ออกหรือ $\Sigma a_n$ มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งเห็นได้โดยชัดเจนว่าตัวอนุกรมเองไม่มุ่งเข้าสู่เลขใด ๆ เพราะว่า "$\Sigma a_n$" มีค่ามากกว่า 3 ผลบวกมีความหมาย อย่างไรก็ดี ใน "$\Sigma a_n$" เป็นบวก หากมีค่าที่เป็นไปได้ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากแต่ละพจน์ของอนุกรมมีค่าเป็นบวก สิ่งที่ไม่ดีอีกประการหนึ่งเห็นจะเป็นข้อความที่ว่า $\Sigma a_n + \Sigma b_n = \Sigma(a_n + b_n)$ ถ้าเป็นข้อความเกี่ยวกับอนุกรมก็เป็นนิยามที่ง่าย ๆ สำหรับการบวกอนุกรมสองอนุกรม ถ้าเป็นข้อความเกี่ยวกับผลบวกก็เป็นทฤษฎีบทซึ่งกล่าวถึงผลบวกของอนุกรมที่ลู่เข้าสองอนุกรมย่อมลู่เข้า และผลบวกก็คือผลบวกของจำนวน $\Sigma a_n$ และ $\Sigma b_n$ อีกสิ่งหนึ่งที่ทำให้สับสนมาจากภาษาที่ใช้คำว่าอนุกรม (series) และลำดับ (sequence) ในภาษาอังกฤษถูกใช้ในความหมายเดียวกัน ในขณะที่ความหมายทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

อนุกรมที่แสดงใน (3 – 4) และ (3 – 6) เป็นข้อเสนอหนทางที่ง่าย ๆ ในการสร้างอนุกรมที่ลู่เข้า โดยธรรมชาติของ n มักจะเรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรม telescoping

**ทฤษฎีบท 3.1** *ให้* $\{b_n\}$ *เป็นลำดับ ซึ่ง* $b_n \to L$ ($\{b_n\}$ *ลู่เข้าสู่* $L$ *หรือ* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$) *และเขต* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *แล้ว* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ลู่เข้าสู่ผลบวก* $A = b_1 - L$.

**พิสูจน์** สำหรับ $A_n = (b_1 - b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\ldots+(b_n-b_{n+1})$

$$= b_1 - b_{n+1}$$

ซึ่งลู่เข้าสู่ $b_1 - L$ □

ตัวอย่าง เช่นจงคำนวณ $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ พบว่า

$$(3-7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \ldots$$

ลู่เข้าสู่ 1 เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 = L$ และ $b_1 = \frac{1}{1} = 1$

ดังนั้น $\quad A = \lim_{n\to\infty} A_n = 1 - L = 1$

อนุกรมไม่ลู่เข้านอกจากพจน์ลู่เข้าสู่ 0

**ทฤษฎีบท 3.2** *ถ้า* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าแล้ว* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**พิสูจน์** สำหรับ $a_n = A_n - A_{n-1}$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = A - A = 0$ □

เกณฑ์ของโคซี (Cauchy criterion) สำหรับการลู่เข้าของลำดับ กำหนดโดยเงื่อนไขคล้ายคลึงกันสำหรับอนุกรมเช่นกัน

**ทฤษฎีบท 3.3** *อนุกรม* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าต่อเมื่อ*

$$\lim_{m,n\to\infty} (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = 0$$

**พิสูจน์** สำหรับผลบวกของพจน์ก็คือผลต่างของ

$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + {}_{m-1})$ คือ

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1})$$

$$= A_n - A_{m-1}$$

และ $\{A_k\}$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim_{m,n\to 0} |A_n - A_{m-1}| = 0$ □

ทฤษฎีบทต่อจากนี้เป็นผลที่สำคัญและเป็นประโยชน์จากสามทฤษฎีบทที่แล้ว

**ทฤษฎีบท 3.4** *ถ้า* $\Sigma |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$ *เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า แล้วอนุกรม* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าด้วย*

**พิสูจน์** ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงแม้พจน์จะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ตาม และสามารถอธิบายในขั้นแรกในกรณีของอนุกรมที่พบบ่อย ๆ ที่ค่าเป็นบวก โดยการพิจารณาค่าสัมบูรณ์ก็จะขจัดปัญหาเรื่องของค่าของอนุกรมจะเป็นบวกหรือลบก็ตาม

$$|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \leqslant |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n|$$

จากโจทย์ $\Sigma|a_n|$ ลู่เข้า ดังนั้นทางขวามือมุ่งเข้าสู่ 0 เมื่อ $m, n \to \infty$ จึงได้

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \to 0 \text{ เมื่อ } m, n \to 0$$

นั่นคือ $\Sigma a_n$ ลู่เข้า □

เนื่องจากทฤษฎีบท 3.4 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม ได้สร้างขึ้นสำหรับอนุกรมที่มีพจน์เป็นบวก แต่สามารถนำ $\Sigma|a_n|$ มาอธิบายความเป็นไปของ $\Sigma a_n$ (อย่างไรก็ตาม ถ้า $\Sigma|a_n|$ ลู่ออกไม่สามารถบอกได้ว่า $\Sigma a_n$ ลู่ออกด้วยหรือไม่ ซึ่งจะอธิบายต่อไปในหัวข้อต่อไปให้ละเอียดขึ้น)

การทดสอบแบบเปรียบเทียบ (comparison test) และการทดสอบแบบอัตราส่วน (ratio test) ซึ่งใช้ประโยชน์ได้มากในอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ซึ่งจะได้นำมาพิจารณากันต่อไป

**ทฤษฎีบท 3.5** *(comparison test) ถ้า* $a \leqslant a_n \leqslant b_n$ *เมื่อ* $n$ *มีค่ามากไปเรื่อย ๆ และ* $\Sigma b_n$ *ลู่เข้าแล้ว* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าด้วย*

**พิสูจน์** พจน์ของ $\{a_n\}$ มีค่าบวก เมื่อ $n$ มากขึ้น ดังนั้นลำดับ $\{A_n\}$ ของผลบวกย่อย (partial sum) เพิ่มอย่างเดียวและมีขอบเขตข้างบนคือ $\lim_{n\to\infty} a_n$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} A_n$ มีค่า □บทแทรกของทฤษฎีบทนี้ซึ่งอาจนำมาใช้ได้โดยตรงและง่ายเข้า

**บทแทรก** *ถ้า* $0 \leqslant a_n$ *และ* $0 \leqslant b_n$ *และ* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ *เมื่อ* $0 < L < \infty$ *แล้ว* $\Sigma\, a_n$ *และ* $\Sigma\, b_n$ *ลู่ออกทั้งสองอนุกรม หรือไม่ก็ลู่เข้าทั้งสองอนุกรม*

**พิสูจน์** จากโจทย์จึงได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ย่อมมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n > \delta$

และได้

$(L - \varepsilon)b_n < a_n < (L + \varepsilon)b_n$

และเนื่องจาก $0 < L < \infty$ และสามารถเลือก $\varepsilon \leqslant L$

โดยทฤษฎีบท 3.5 และพิจารณา

1) $(L - \varepsilon)\, b_n < a_n$ ถ้า $\Sigma b_n$ ลู่ออก $\Sigma a_n$ ลู่ออกด้วย และถ้า $a_n$ ลู่เข้า $b_n$ ลู่เข้าด้วย

2) $a_n < (L + \varepsilon)b_n$ ถ้า $\Sigma b_n$ ลู่เข้า $\Sigma a_n$ ลู่เข้าด้วย และถ้า $\Sigma a_n$ ลู่ออก $\Sigma b_n$ ลู่ออกด้วย □

ทฤษฎีบทต่อไปบางทีเรียกว่าการทดสอบแบบอัตราส่วนเปรียบเทียบ (ratio comparison test)

**ทฤษฎีบท 3.6** *ถ้า* $0 < a_n$, $0 < b_n$ *และ* $\Sigma b_n$ *ลู่เข้าและถ้าสำหรับ* $n$ *ที่มีค่ามาก ๆ*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$ *แล้ว* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้า*

**พิสูจน์** เมื่อเขียนเสียใหม่จะได้ $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$ จึงพบว่าลำดับ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ เป็นลำดับลดอย่างเดียว และมี 0 เป็นขอบเขตข้างล่าง ให้ M เป็นขอบเขตข้างล่างต่ำสุด จึงได้

$\frac{a_n}{b_n} \leqslant M$ และ $a_n \leqslant Mb_n$

และ $\Sigma\, b_n$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.5 จึงได้ $\Sigma a_n$ ลู่เข้าด้วย □

ในการนำการทดสอบแบบเปรียบเทียบเหล่านี้ไปใช้จะต้องมีอนุกรมที่ทราบอยู่แล้วว่าลู่เข้าหรือลู่ออกอยู่ก่อนเพื่อนำมาใช้ในการคำนวณอนุกรมที่ต้องการทราบ

**ทฤษฎีบท** 3.7 *อนุกรมเรขาคณิต* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ *ลู่เข้าสู่* $\frac{1}{1-x}$ *สำหรับ* $|x| < 1$ *และลู่ออกเมื่อ* $|x| \geq 1$

**พิสูจน์** ผลบวกส่วนต้นๆ โดย $A_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ เมื่อ $x \neq 1$ และ $A_n = n + 1$ เมื่อ $x = 1$ จึงได้ว่า

$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$

$\lim_{n\to\infty} A_n$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $|x| = 1$

และ $\lim_{n\to\infty} A_n$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $|x| > 1$ □

เมื่อนำผลนี้กับทฤษฎีบท 3.3 จึงได้การทดสอบแบบอัตราส่วน (ratio test)

**ทฤษฎีบท** 3.8 *ถ้า* $0 < a_n$, *ให้* $L = \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ *และ*

$l = \liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ *แล้ว*

*1)* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าถ้า* $L < 1$

*2)* $\Sigma a_n$ *ลู่ออกถ้า* $l > 1$

*3)* *ถ้า* $l \leq 1 \leq L$ *สรุปลู่เข้าหรือลู่ออกของ* $\Sigma a_n$ *ไม่ได้*

**พิสูจน์** 1) ถ้า $L < 1$ สามารถเลือกจำนวนจริง $x$ ซึ่ง $L < x < 1$ และ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ เนื่องจาก

$x = \frac{x^{n+1}}{x^n}$ ดังนั้น $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{x^{n+1}}{x^n}$

ทฤษฎีบท 3.6 โดยให้ $b_n = x^n$ และเนื่องจาก

$\Sigma b_n = \Sigma x^n$ ซึ่งลู่เข้าดังนั้น $\Sigma a_n$ ลู่เข้า

2) เมื่อ $l > 1$ แล้วทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มีค่ามากๆ

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ ดังนั้นลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มอย่างเดียวจึงไม่ลู่เข้าสู่ 0

เพราะฉะนั้น $\Sigma a_n$ ลู่ออก □

ในหลายๆ กรณีที่ลำดับของอัตราส่วน $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ ลู่เข้า เมื่อเป็นเช่นนี้การสร้างทฤษฎีก็ง่ายเข้า

| |
|---|
| **บทแทรก** *ถ้า* $a_n > 0$ *และ* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ *แล้ว* $\Sigma\, a_n$ *ลู่เข้าถ้า* $r < 1$ *และลู่ออก ถ้า* $r > 1$ *ถ้า* $r = 1$ ***ไม่มีข้อสรุปสำหรับ*** $\Sigma a_n$ |

ส่วนสุดท้ายของบทแทรกง่ายที่จะแสดง จะพบว่า $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออกและ $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้าซึ่งสามารถตรวจสอบได้ว่าต่างมี $r = 1$ ทั้งสองอนุกรม

ตัวอย่างสำหรับส่วนสุดท้ายของทฤษฎีบท 3.8 ที่ง่ายๆ โดยพิจารณาอนุกรม

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{64}{81} + \frac{128}{243} + \frac{512}{729} + \ldots \tag{3-8}$$

แทนที่จะคำนวณอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ แต่ง่ายที่จะสังเกตว่าเหล่านี้เป็นจำนวน $c_n$ ซึ่ง $a_{n+1} = a_n\, c_n$ ใน (5–8) จึงได้ว่า $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{4}{3}$, ฯลฯ หาค่า $l$ และ $L$ ในทฤษฎีบท 3.8 ได้ $l = \frac{2}{3}$ และ $L = \frac{4}{3}$ เนื่องจาก $l < 1 < L$ จึงไม่ทราบได้ว่าอนุกรม (3–8) ลู่เข้าหรือลู่ออกกันแน่ จำเป็นที่จะหาแบบทดสอบใหม่ซึ่งต่างออกไปซึ่งเรียกว่า การทดสอบแบบกรณฑ์ (*root test*) ซึ่งก็ใช้อนุกรมเรขาคณิตในการเปรียบเทียบเช่นเดียวกัน

| |
|---|
| **ทฤษฎีบท 3.9** *ให้* $\limsup\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert^{\frac{1}{n}} = r$ *แล้ว* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าถ้า* $r < 1$ *และลู่ออกถ้า* $r > 1$ *เมื่อ* $r = 1$ *สรุปไม่ได้ว่า* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าหรือลู่ออก* |

**พิสูจน์** ถ้า $r < 1$ สามารถเลือก $x$ ที่ $r < x < 1$ และมี

$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant x$ สำหรับทุก $n$ ที่มีค่ามาก ๆ ดังนั้น

$|a_n| \leqslant x^n$ **สำหรับ**ทุก $n \geqslant N$ และเนื่องจาก $\Sigma x^n$ ลู่เข้าดังนั้น $\Sigma a_n$ ลู่เข้าด้วย

ถ้า $r \geqslant 1$ จากนิยามของ limit superior $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$ สำหรับ $n$ ที่มีค่ามาก ๆ

เพราะฉะนั้น $|a_{k_1}| \geqslant 1, |a_{k_2}| \geqslant 1, \ldots, |a_{k_j}| \geqslant 1, \ldots$ ดังนั้นลำดับของ

พจน์ $\{a_{n_j}\}$ ไม่ลู่เข้าสู่ 0, $\Sigma a_n$ ต้องลู่ออก □

การทดสอบแบบอัตราส่วนและการทดสอบแบบกรณฑ์ เป็นการทดสอบที่ใกล้เคียงกันและต่อเนื่องกัน การทดสอบแบบอัตราส่วนง่ายต่อการใช้ แต่อย่างไรก็ดีถ้าอนุกรมลู่เข้าโดยการใช้การทดสอบแบบอัตราส่วนก็สามารถทดสอบได้ด้วย การทดสอบแบบกรณฑ์(ดูแบบฝึกหัดข้อ 8)

ถ้าใช้การทดสอบแบบนี้กับ (5 – 8) พบว่า $r$ คือ $(\frac{2}{3})\sqrt{2} < 1$ และ (5 – 8) ลู่เข้า (ดูแบบฝึกหัดข้อ 4)

ทฤษฎีบทต่อไปแสดงถึงความต่อกันอย่างใกล้ชิดระหว่างอินทิกรัลไม่ตรงแบบและอนุกรมไม่รู้จบ ซึ่งจะได้กล่าวถึงอนุกรมเพื่อการเปรียบเทียบเรียกว่าการทดสอบแบบอินทิกรัล (integral test)

**ทฤษฎีบท** 3.10 *ถ้า $f$ มีค่าเป็นบวกบนช่วง $1 \leqslant x < \infty$ และลดอย่างเดียวด้วย*

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$ *แล้วอนุกรม* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *และอินทิกรัล* $\int_1^{\infty} f$ *ทั้งสองลู่เข้าด้วยกันหรือไม่ก็ลู่ออกด้วยกัน*

**พิสูจน์** ให้ $a_n = f(n)$ และ $b_n = \int_n^{n+1} f$ เนื่องจาก $f$ ลดอย่างเดียว

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leqslant f(n)$$

หรือ $a_{n+1} \leqslant b_n \leqslant a_n$ โดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบ $\Sigma a_n$ ลู่เข้าถ้า $\Sigma b_n$ ลู่เข้า และ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าถ้า $\Sigma a_n$ ลู่เข้า ดังนั้น $\Sigma a_n$ และ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออกด้วยกันแต่ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าเมื่อ $\int_1^{\infty} f$ ลู่เข้า

**บทแทรก** *อนุกรม* $\Sigma \frac{1}{n^2}$ *และ* $\Sigma \frac{1}{n}(\log n)^p$ *ลู่เข้าเมื่อ* $p > 1$ *และลู่ออกเมื่อ* $p \leqslant 1$.

กลับมาพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ [ดูสูตร (2 – 34)] ถ้าเริ่มแรกถูกใช้ด้วยการทดสอบแบบเปรียบเทียบกับอนุกรม $\Sigma b_n$ ในทฤษฎีบท 3.6 การทดสอบนี้เรียกว่า การทดสอบของแรบช์ (Raabe's test)

**ทฤษฎีบท 3.11** *ให้* $0 < a_n$ *และ* $p > 1$ *และสมมติว่า* $a_{n+1}/a_n \leqslant 1 - \frac{p}{n}$ *สำหรับทุก* $n$ *ที่มีค่ามาก ๆ แล้วอนุกรม* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้า*

สำหรับการพิสูจน์จำเป็นต้องมีบทนำ (Lemma)

**บทนำ 1** *ถ้า* $p > 1$ *และ* $0 < x < 1$ *แล้ว* $1 - px \leqslant (1-x)^p$

ให้เซต $g(x) = px + (1-x)^p$ และสังเกตได้ว่า $g'(x) \geqslant 0$ และ $g(0) = 1$ และสรุปได้ว่า $g(x) \geqslant 1$ ดังนั้น

$$1 - px \leqslant (1-x)^p$$

จึงได้ทฤษฎีบท 3.11 โดยสังเกตว่าถ้า $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = \frac{(n-1)^p}{n^p}$$

ซึ่งก็คือ $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ถ้า $b_{n+1} = \frac{1}{n^p}$ แล้วใช้ทฤษฎีบท 3.6

ตัวอย่างสำหรับการทดสอบแบบสุดท้ายพิจารณาอนุกรม

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8} + \cdots + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{(2n+2)} + \cdots$$

อัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ก็คือ $\frac{3}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \ldots, \frac{2n-1}{2n+2}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ดังนั้นการทดสอบด้วยอัตราส่วนไม่ได้ผล แต่อย่างไรก็ดี

$$2n+1 = \frac{2n+2-3}{2n+2} = 1 - \frac{3}{2n+2}$$

และเนื่องจากอยู่ในรูป $1 - \frac{p}{n+1}$ ซึ่ง $p = \frac{3}{2} > 1$ ดังอนุกรมดังกล่าวลู่เข้าตามแบบทดสอบของแรบบ์

## แบบฝึกหัด 3.1

1. จงสำรวจความลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{3}{11} + \frac{4}{18} + \frac{5}{27} + \ldots$

   (b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{20} + \frac{3}{38} - \frac{4}{56} + \frac{5}{74} - \ldots$

   (c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7} + \ldots$

   (d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64} + \ldots$

2. จงแสดงว่าถ้า $\Sigma a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum\limits_{N}^{\infty} a_n \to 0$ เมื่อ $N \to \infty$

3. จงสำรวจความลู่เข้าของ $\Sigma a_n$ เมื่อ

   (a) $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1}$ (b) $a_n = \sqrt{\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1}}$

4. จงแสดงว่าใน (3-8) ว่า

$$a_n = \begin{cases} 2^{3n/2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2^{3n/2}}{3^n}\right) & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

และ $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = 2\frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ โดยใช้การทดสอบแบบกรณฑ์พิสูจน์การลู่เขาของ (3-8)

5. (a) ให้ $0 < a_n$ และ $0 < b_n$ และ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ สำหรับจำนวน n ที่มีค่ามาก ๆ จงแสดงว่าถ้า $\Sigma b_n$ ลู่ออกแล้ว $\Sigma a_n$ ลู่ออกด้วย

   (b) จงพิสูจน์ว่าถ้า $0 < a_n$ และ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{p}{n}$ สำหรับทาง $p \leqslant 1$ และทุก n ที่มีค่ามากแล้ว $\Sigma a_n$ ลู่ออก

   (c) จงพิสูจน์ว่าถ้า $0 < a_n$ และ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2}$ สำหรับทุก n ที่มีค่ามากและ $A > 0$ แล้ว $\Sigma a_n$ ลู่ออก

6. ให้ $\Sigma a_n$ และ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าด้วย $b_n > 0$ สำหรับทุก n สมมติว่า $\frac{a_n}{b_n} \to L$ จงพิสูจน์ว่า $\sum_N^\infty a_k / \sum_N^\infty b_k \to L$

7. ให้ $\{a_k\} \to 0^+$ จงแสดงว่า $\sum_1^\infty a_n$ ลู่เข้าต่อเมื่อ $\sum_1^\infty 2^n a_{2^n}$ ลู่เข้าเท่านั้น

8. จงแสดงโดยตรงว่าถ้า $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L$

9. บางข้อความต่อไปนี้เป็นจริงบางข้อความเป็นเท็จ จงพิสูจน์เฉพาะข้อความที่เป็นจริง

   (a) ถ้า $\Sigma a_n$ และ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\Sigma(a_n + b_n)$ ลู่เข้าด้วย

   (b) ถ้า $\Sigma a_n$ และ $\Sigma b_n$ ลู่ออกแล้ว $\Sigma(a_n + b_n)$ ลู่ออกด้วย

   (c) ถ้า $\Sigma|a_n|$ ลู่เข้าแล้ว $\Sigma(a_n)^2$ ลู่เข้าด้วย

   (d) ถ้า $\Sigma|a_n|$ และ $\Sigma|b_n|$ ลู่เข้าแล้ว $\Sigma a_n b_n$ ลู่เข้าด้วย

(e) ถ้า $\sum_1^\infty a_n^2$ ลู่เข้าแล้ว $\sum_1^\infty a_n/n$ ลู่เข้าด้วย

(f) ถ้า $\{a_n\} \to 0^+$ และ $\Sigma a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

10. จงแสดงว่าถ้า $f \geqslant 0$ และเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวและถ้า

$$c_n = \sum_1^n f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \text{ แล้ว } \lim_{n\to\infty} c_n \text{ หาค่าได้}$$

11. จงแสดงว่าถ้า $c_n \geqslant 0$ และ $\Sigma a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\Sigma\sqrt{c_n}/n$ ลู่เข้าด้วย

12. จงแสดงว่าถ้า $a_n > 0$, $\Sigma a_n$ ลู่ออกและ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ แล้ว $\Sigma a_n/S_n$ ลู่ออกด้วยแต่ช้าขึ้น

13 ให้ $f$ และ $f'$ ต่อเนื่องบนช่วง $1 \leqslant x < \infty$ ด้วย $f(x) > 0$ และ

$$\int_1^\infty |f'(x)|\,dx \text{ ลู่เข้า}$$

จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_1^\infty f(k)$ และอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ ทั้งสองลู่เข้าหรือไม่ก็ทั้งสองลู่ออก}$$

14. จงแสดงว่าถ้า $\Sigma a_n^2/n$ ลู่เข้าแล้ว $\frac{1}{N}\sum_1^N a_k \to 0$

## 3.3 อนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

**Conditionally convergent series**

อนุกรมลู่เข้า $\Sigma a_n$ โดยที่ $\Sigma|a_n|$ ลู่ออกกล่าวได้ว่าเป็นการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ถ้า $\Sigma|a_n|$ ลู่เข้า $\Sigma a_n$ กล่าวได้ว่าลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ทฤษฎีบทในหัวข้อที่แล้วแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \ldots = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \ldots = \sum_0^\infty (-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{2^n}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} - \frac{1}{50} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} (1 -)^{n(n-1)(n-2)/2} \frac{1}{n^2+1}$$

อาจใช้ทฤษฎีบท 3.2 เพื่อพิสูจน์ว่าอนุกรมที่พจน์มีทั้งค่าบวกและค่าลบอาจลู่ออก ตัวอย่างเช่น อนุกรม $1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{9} - \frac{4}{13} + \frac{5}{17} - \ldots$ ซึ่งมีพจน์ทั่ว ๆ ไปเป็น

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{4n-3}$$

ลู่ออก แต่เนื่องจากไม่จริงที่ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

วิธีการในการทดสอบอนุกรมที่ได้กล่าวมาแล้วยังไม่ได้นำมาใช้กับอนุกรมฮาโมนิค (harmonic series)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

เนื่องจาก $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก อนุกรมนี้ต้องไม่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์แน่ ในขณะที่ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$ ดังนั้นทฤษฎีบท 3.2 ไม่สามารถที่จะใช้แสดงความลู่เข้าได้ ผลลัพธ์ต่อไปประกอบด้วยกรณีพิเศษของอนุกรมที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นและเป็นข้อคล้ายคลึงกันระหว่างอนุกรมในทฤษฎีบท 2.7 ซึ่งกระทำกับอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่ตัวถูกอินทิเกรตเปลี่ยนเครื่องหมาย โดยปกติเรียกว่าการทดสอบแบบไดริชเลตสำหรับอนุกรม (Dirichlet test for series)

**ทฤษฎีบท 3.12** *ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ (จำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน) ซึ่งมีมีคุณสมบัติต่อไปนี้*

(3–9) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(3–10) $\Sigma \left|a_{n+1} - a_n\right|$ *ลู่เข้า*

(3–11) *อนุกรม* $\Sigma b_n$ *เพียงแต่ผลบวกย่อยมีขอบเขตอย่างเสมอต้นเสมอปลาย แล้ว* $\Sigma a_n b_n$ *ลู่เข้า*

**พิสูจน์** ในเงื่อนไขสุดท้าย (3 – 11) หมายความว่าถ้า $B_n = \sum_1^n b_k$ ย่อมมีจำนวน M ซึ่ง $|B_n| \leqslant M$ สำหรับทุก n แบบการพิสูจน์ต่อไปนี้กระทำคล้ายกับทฤษฎีบท 2.17 ที่กล่าวแล้ว โดยใช้การวิเคราะห์เป็นช่วง ๆ ในการอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by parts) บางครั้งเรียกว่าการบวกย่อย (partial summation)

$$\begin{aligned}\sum_1^n a_k b_k &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n \\ &= a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + (a_3 - a_4)B_3 + \ldots \\ &\quad + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n \\ &= a_nB_n - \sum_1^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k\end{aligned}$$

เพราะว่า (3 – 9) และ (3 – 11) $\lim_{n\to\infty} a_nB_n = 0$ เนื่องจาก

$$|(a_{k+1} - a_k)B_k| \leqslant M\,|a_{k+1} - a_k|$$

และ (3 – 10) เป็นจริง อนุกรม $\sum_1^\infty (a_{k+1} - a_k)B_k$ ลู่เข้าก็คือการพิสูจน์ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_k b_k$ มีค่า และ $\sum_1^\infty a_n b_n$ ลู่เข้า □

ทฤษฎีบทนี้ได้นำรูปง่าย ๆ เมื่อ $\{a_n\}$ ลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียว

**บทแทรก 1** *ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลดอย่างเดียวด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และผลบวกย่อยของ $\Sigma b_n$ มีขอบเขต แล้ว $\Sigma a_n b_n$ ลู่เข้า*

**พิสูจน์** $\sum_{1}^{n} \left| a_{k+1} - a_k \right| = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1})$

$= a_1 - a_{n+1}$

และ $\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \left| a_{k+1} - a_k \right| = \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1})$

$= a_1$

ดังนั้น $\Sigma a_n b_n$ ลู่เข้า □

ตัวเลือกพิเศษของลำดับ $\{b_n\}$ นำไปสู่การทดสอบอนุกรมที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ (alternating series test)

**บทแทรก 2** *ถ้า* $\{a_n\}$ *ลดอย่างเดียวด้วย* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *แล้ว* $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ *ลู่เข้า*

**พิสูจน์** เนื่องจาก $b_n = (-1)^{n+1}$ ผลบวกย่อยของ $\sum_{1}^{\infty} b_n$ มีค่าเป็น 1 หรือ 0 เพราะฉะนั้นผลบวกย่อยของ $\Sigma b_n$ มีขอบเขต ดังนั้น $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ ลู่เข้า □

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการใช้การทดสอบเหล่านี้และพึงสังเกตว่าไม่มีอนุกรมใดลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เลย

อนุกรม $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ เป็นอนุกรมที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ และเพราะฉะนั้นลู่เข้า พึงสังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายและ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ไม่ใช่สิ่งที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าเสมอไป การลู่เข้าของอนุกรมนี้ก็เนื่องจากผลบวกย่อยของ $\Sigma b_n = (-1)^{n+1}$ มีขอบเขตเป็น 0 และ 1 และอนุกรม $\Sigma a_n = \Sigma \frac{1}{n}$ ลดอย่างเดียวด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เมื่อแยกอนุกรมนี้ออกเป็นหลายอนุกรมเช่นได้ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots$ ลู่ออก $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots$ ลู่เข้าและ $-\frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \ldots = \frac{1}{2}\ (-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \ldots)$ ลู่ออก

แต่เมื่อนำทั้งสามอนุกรมนี้รวมกันเข้ากลายเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

อนุกรม $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$ ลู่เข้าโดยบทแทรก I Iii $a_n = \frac{1}{n}$ และ $\Sigma b_n = 1 + 1 - 2 + 1 + \mathrm{I} \quad - 2 + 1 + 1 - 2 + \ldots$ ซึ่งผลบวกย่อยมีขอบเขต

การลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขของอนุกรม $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ได้นำมาใช้บ่อย ๆ ในการแสดงคุณสมบัติที่นำไปใช้ในอนุกรมที่ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขทั้งหลาย เช่นการจัดลำดับของอนุ-กรมเสียใหม่ผลบวกก็อาจเปลี่ยนไป เมื่อให้ชื่ออนุกรมนี้ว่า S (มีค่าประมาณ .693) และเขียนได้ว่า

(3–12) $$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots$$

แล้ว $$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \ldots$$

ความลู่เข้าและผลบวกของอนุกรมไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อนำ 0 บวกเข้าทางขวามือจึงได้

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots$$

บวกอนุกรมนี้เข้ากับ (3–12) จึงได้

$$\frac{2}{3}S = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

ตัดเอาพจน์ที่เป็น 0 ออกจึงได้

$$\frac{2}{3}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

ถ้านำพจน์ของอนุกรมนี้เทียบกับอนุกรมเดิม (3–12) ซึ่งผลบวกเป็น S จะพบว่าอนุกรมนี้เป็นการเรียงพจน์ใหม่ของ S แต่ละเทอมของอนุกรมหนึ่งปรากฏเพียงครั้งเดียวในอีกอนุกรมหนึ่ง เป็นการย้ำความจริงที่ว่าอนุกรมอนันต์ไม่ใช่จะเป็นผลบวกของสมาชิกของเซตอนันต์ (คือลำดับ

การบวกก็มีความสำคัญสำหรับค่าอนุกรมด้วย) ถ้ากลับมาทบทวนว่าอนุกรมเป็นคู่ของความสัมพันธ์กับลำดับแล้วจะพบว่าอนุกรมทั้งสองต่างกันโดยมีพจน์ของลำดับที่ต่างกันโดยสิ้นเชิง ก็จะไม่แปลกอะไรที่จะสรุปว่าลู่เข้าสู่ผลบวกที่ต่างกัน

จาก (3 – 12) จึงไม่ยากที่จะแยกอนุกรมฮาร์โมนิคที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ โดยจัดพจน์ (3–12) ออกเป็นสองอนุกรมที่มีค่าบวกและค่าลบจะได้อนุกรมที่ลู่ออกทั้งสองอนุกรมย่อมขึ้นอยู่กับความจริงสามประการ

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ii) พจน์ที่มีค่าบวกของ (3–12) เป็นอนุกรมที่ลู่ออกคือ

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

iii) เทอมที่มีค่าลบของ (3–12) เป็นอนุกรมที่ลู่ออกคือ

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{a}$$

สมมติว่าต้องการจัดลำดับ (3–12) ให้ลู่เข้าสู่ A = 10 ก็เริ่มด้วยการเลือกพจน์ที่มีค่าบวกตามลำดับที่ปรากฏใน (3–12) จนกระทั่งผลบวกมากกว่า A แล้วติดตามด้วยเลือกพจน์ที่มีค่าลบให้ผลบวกต่ำลงจาก A แล้วต่อด้วยเลือกพจน์ที่เป็นบวกที่เหลือให้ผลบวกมากกว่า A แล้วเลือกพจน์ที่เป็นลบที่เหลือให้ผลบวกต่ำลงจาก A ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ก็จะจัดพจน์ของ (3–12) ให้ผลบวกย่อยต่ำจาก A นิดหน่อยและสูงกว่า A นิดหน่อยได้ เนื่องจากที่กล่าวว่ามีค่าสัมบูรณ์ลดลงและผลบวกย่อยของอนุกรมที่ได้ลู่เข้าสู่ A

ในทฤษฎีบทต่อไปแสดงว่าคุณสมบัตินี้ไม่จริงสำหรับอนุกรมที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

**ทฤษฎีบท 3.13** *ถ้า* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ผลบวก* A *แล้วทุกการจัดเรียงพจน์ใหม่ของ* $\sum_{1}^{\infty} a_n$ *ลู่เข้าสู่* A *เสมอ*

**พิสูจน์** ในอนุกรม $\sum_1^{\infty} a'_n$ เป็นอนุกรมที่จัดพจน์เสียใหม่ใด ๆ จากอนุกรม $\sum_1^{\infty} a_n$ หมายความว่า $a'_n = a_{r_n}$ เมื่อ $\{r_n\}$ เป็นบางลำดับของลำดับของจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, . . . กำหนด $\varepsilon$ แล้วเลือก N ดังนั้น $\sum_{k>N} |a_k| < \varepsilon$ ซึ่งเป็นจริงเนื่องจาก $\sum |a_k|$ ลู่เข้าแต่ละจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, . . . , N ปรากฏครั้งหนึ่งในบรรดา $r_1, r_2, r_3,$ . . . เลือก $n_0$ ซึ่งทุกจำนวนอยู่ในเซต $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n_0}\}$ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\left|A - \sum_1^n a'_k\right| = \left|A - \sum_1^N a_k + \sum_1^N a_k - \sum_1^n a'_k\right|$$

$$\leqslant \left|A - \sum_1^N a_k\right| + \left|\sum_1^n a'_k - \sum_1^N a_k\right|$$

พจน์แรกทางขวามือขึ้นอยู่กับ $\sum_{k>N} |a_k|$ ถ้า $n > n_0$ แล้ว $\sum_1^n a'_k - \sum_1^N a_k$ สามารถเขียนเป็นผลบวกของพจน์ $a_j$ ซึ่ง $j > N$ เนื่องจากแต่ละ $a_k$ ที่ $k = 1, 2, 3, \ldots,$ N ซึ่งปรากฏในผลบวก $\sum_1^n a'_k$ ดังนั้นสำหรับ $n > n_0$

$$\left|A - \sum_1^n a'_k\right| \leqslant \sum_{k>N} |a_k| + \sum_{j>n} |a_j| < 2\varepsilon$$

และ $\sum_1^{\infty} a'_k$ ลู่เข้าสู่ A □

การดำเนินการอีกอันหนึ่งสำหรับอนุกรม ซึ่งบางครั้งอาจจะบวกกันเป็นช่วง ๆ โดยจับกลุ่มโดยวงเล็บ ถ้าอนุกรม $\Sigma a_n$ มีผลบวกย่อยเป็น $\{A_n\}$ แล้วผลบวกย่อยของอนุกรม $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + \ldots$ คือ $A_2, A_5, A_7, A_{10}, \ldots,$ ลำดับย่อยของลำดับเดิม $A_n$ ทุกลำดับย่อยของลำดับที่ลู่เข้าย่อมลู่เข้าสู่ค่าลิมิตค่าเดียวกันดังนั้นอนุกรมที่ลู่เข้าใด ๆ อาจจะจับกลุ่มพจน์ด้วยวงเล็บดังกล่าวข้างต้นได้โดยไม่สลับพจน์ ค่าผลบวกย่อมไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าอนุกรมเดิมลู่ออก เมื่อจับกลุ่มพจน์อาจลู่เข้าก็ได้ เช่นอนุกรม $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1}$ ลู่ออก เมื่อจับกลุ่มพจน์ด้วยวงเล็บได้ $(1-1)+(1-1)+\ldots$ ลู่เข้าสู่ 0 และ $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$ ลู่เข้าสู่ 1

เทคนิคที่ได้ศึกษาเพื่อสำรวจความลู่เข้าของอนุกรมใดอนุกรมหนึ่ง ซึ่งพจน์เป็นจำนวน ก็อาจดีขึ้น ถ้าหากพจน์เป็นตัวแปรค่าด้วยก็ยุ่งยากขึ้น ในกรณีเช่นนี้ก็จะต้องหาเซตของค่าสำหรับตัวแปรเหล่านี้ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับทฤษฎีบท 3.7 ซึ่งแสดงว่า $\Sigma x^n$ ลู่เข้าเฉพาะ x ซึ่ง $|x| < 1$ โดยทางเทคนิคก็คือกำลังอธิบายสิ่งที่เรียกว่าการลู่เข้าที่จุด (pointwise covergence) เนื่องจากได้ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสำหรับแต่ละจุดที่แปรค่าไป (ในบทต่อไปจะได้ศึกษาการลู่เข้าเสมอต้นเสมอปลาย (uniformly convergence) ของฟังก์ชันซึ่งมองที่ความแตกต่างเป็นสำคัญ)

อนุกรมกำลัง (Power series) เป็นตัวอย่างที่สามัญที่สุดที่กระทำกับตัวแปร อนุกรมกำลังใน x ในรูป $\sum_0^\infty a_n x^n$ และอนุกรมกำลังใน (x – c) หรือรอบ ๆ (x = c) อยู่ในรูป $\sum_0^\infty a_n (x-c)^n$ ความเป็นไปของอนุกรมกำลังซึ่งขึ้นอยู่กับจุด x ที่ทำให้อนุกรมนั้นลู่เข้าหรือลู่ออกเป็นกรณีที่ง่าย ๆ และเป็นจริงทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน $\{a_n\}$

**ทฤษฎีบท 3.14** *ด้วยอนุกรมกำลัง* $\sum_0^\infty a_n x^n$ *เกี่ยวข้องกับรัศมีของการลู่เข้า* R, $0 \leqslant R < \infty$ *ซึ่งอนุกรมลู่เข้า (อย่างสัมบูรณ์) สำหรับทุก* x *ซึ่ง* $|x| < R$ *และลู่ออกสำหรับทุก* x *ซึ่ง* $|x| > R$ *และยิ่งกว่านั้น* R *อาจคำนวณจากความสัมพันธ์*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

*หรือ* $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *เมื่อลิมิตนี้มีค่า*

**พิสูจน์** โดยใช้การทดสอบแบบกรณฑ์สำหรับการลู่เข้าโดยให้

$$L = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

แล้ว $\limsup_{n \to \infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = L|x|$ ดังนั้น $\Sigma a_n x^n$ ลู่เข้าเมื่อ $L|x| < 1$ และลู่ออกเมื่อ $L|x| > 1$ ถ้า $L = 0$ จะพบว่าอนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก $x$ ถ้า $L = \infty$ ลู่เข้าเมื่อ $x = 0$ ให้ $R = \frac{1}{L}$ ก็อธิบายได้ว่า $L = 0$ สมนัยกับ $R = \infty$ และ $L = \infty$ สมนัยกับ $R = 0$ จึงพบว่าอนุกรม $\Sigma a_n x^n$ ลู่เข้าสำหรับทุก $x$ ซึ่ง $|x| < R$ ในข้อความสุดท้ายของทฤษฎีบทมาจากความจริงที่ว่าเมื่อ $\lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ มีค่า ค่าของมันก็คือค่าเดียวกันกับ $\lim_{n \to \infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ (ดูจากแบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 8) □

ความจริงที่ติดตามมาสำหรับอนุกรมกำลังทั่ว ๆ ไปสามารถคำนวณได้ด้วยการแทนค่าอนุกรม $\Sigma a_n[g(x)]^n$ อาจกล่าวได้ว่าเป็นอนุกรมกำลังใน $g(x)$ ถ้าให้ $g(x) = y$ ก็จะกลายเป็น $\sum_0^\infty a_n y^n$ ถ้าอนุกรมกำลังใน $y$ นี้มีรัศมีของการลู่เข้าเป็น $R$ แล้ว $\sum_0^\infty a_n[g(x)]^n$ ลู่เข้าสำหรับทุก $x$ ซึ่ง $|g(x)| < R$ พิจารณาจากบทแทรกต่อไป

**บทแทรก** *ถ้า* $\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ *แล้ว* $\sum_0^\infty a_n(x-c)^n$ *ลู่เข้าสำหรับทุก* $x$ *ซึ่ง* $|x-c| < R$ *และลู่ออกเมื่อ* $|x-c| > R$

เซตของค่าที่อนุกรมลู่เข้าสู่ก็คือช่วงซึ่งมีความยาว $2R$ และจุดศูนย์กลางที่จุด $c$ มีจุดปลายอยู่ที่ $c - R$ และ $c + R$ และอนุกรมอาจลู่เข้าหรืออาจไม่ลู่เข้าที่จุดปลาย

พิจารณาอนุกรม

$$(3\text{–}13) \qquad \sum_0^\infty \frac{(x+2)^n}{3^n\sqrt{2n+1}} = 1 + \frac{x+2}{3\sqrt{3}} + \frac{(x+2)^2}{9\sqrt{5}} + \ldots$$

จากค่าสัมบูรณ์ของแต่ละพจน์ แล้วใช้การทดสอบแบบอัตราส่วนจึงได้

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{2n+3}}\right|\left|\frac{3^n\sqrt{2n+1}}{(x+2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{3}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}} = \frac{|x+2|}{3}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าอนุกรมลู่เข้า ถ้า $\frac{|x+2|}{3} < 1$ และลู่ออกถ้า $\frac{|x+2|}{3} > 1$ และยังไม่ทราบว่าอะไรเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{|x+2|}{3} = 1$ ในกรณีแรก ถ้า $\frac{|x+2|}{3} < 1$ จึงได้ $|x+2| < 3$ จึงได้ว่า $-3 < x + 2 < 3$ หรือ $-5 < x < 1$ ทดสอบในแต่ละจุดปลาย เมื่อ $x = 1$, (3 – 13) ก็คือ

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+n}} + \ldots$$

ซึ่งลู่ออก (เนื่องจากแต่ละพจน์อยู่ในรูป $n^{-\frac{1}{2}}$) เมื่อ $x = -5$, (3 – 13) ก็คือ

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} + \ldots$$

เป็นอนุกรมที่มีค่าผลบวกย่อยขึ้น ๆ ลง ๆ ที่ลู่เข้าตามบทแทรก 2 ทฤษฎีบท 3.12 จึงได้เซตของค่าของ $x$ อนุกรม (3 – 13) ลู่เข้าที่แท้จริงคือ $-5 \leqslant x < 1$ และลู่ออกสำหรับ $x$ ที่มีค่าอื่น ๆ

ที่กล่าวมานี้ก็คือความเป็นไปของอนุกรมกำลังทั้งหลายยกเว้นที่อาจจะยากที่จะตัดสินใจว่าลู่เข้าหรือลู่ออกที่จุดปลายทั้งสอง ซึ่งจะพบในแบบฝึกหัดต่อไป

บางครั้งการแทนค่าอาจทำให้ทำงานได้ง่ายเข้า พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(x+1)^n}{(x-3)^n} \qquad (3\text{–}14)$$

ถ้าให้ $y = \frac{x+1}{x-3}$ ก็กลายเป็น $\Sigma \frac{y^n}{n^2}$ ก็ง่ายที่จะเห็นได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับ $|y| \leqslant 1$ ดังนั้น อนุกรม (3–14) ลู่เข้าแน่นอนที่ $x$ ซึ่ง $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| \leqslant 1$

ถ้า $x \neq 3$ ก็จะได้

$$(3\text{–}15) \qquad |x+1| \leqslant |x-3|$$

และเนื่องจากโดยทั่ว ๆ ไป $|x - b|$ ก็คือระยะทางจาก $x$ ถึง $b$ จาก (3–15) จึงได้

ระยะทางจาก $x$ ถึง $-1 \leqslant$ ระยะทางจาก $x$ ถึง $3$

จึงสรุปได้ว่าอนุกรม (3–14) ลู่เข้าเมื่อ $x \leqslant 1$

เทคนิคเหมือนกันสำหรับงานสำหรับอนุกรมกำลังที่ใช้สำหรับอนุกรมที่มีตัวแปรเสริมเป็นตัวแปรตัวอย่างเช่นจะพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ รูปหนึ่งที่เรียกว่า Hypergeometric series

$$(3\text{–}16) \qquad \frac{\propto}{\beta} + \frac{\propto(\propto+1)}{\beta(\beta+1)} + \frac{\propto(\propto+1)(\propto+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \ldots, \propto > 0, \beta > 0$$

ลู่เข้าเมื่อ $\beta > 1 + \propto$ และลู่ออกเมื่อ $\beta \leqslant 1 + \propto$

อัตราส่วนของพจน์คือ $\frac{\propto+1}{\beta+1}, \frac{\propto+2}{\beta+2}$ และในทั่ว ๆ ไปก็คือ $\frac{\propto+n}{\beta+2}$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

ซึ่งชี้ไม่ได้ว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อใช้การทดสอบของแรบบ์สามารถเขียน

$$\frac{\propto+n}{\beta+n} = 1 - \frac{\beta-\propto}{n+\beta}$$

จึงพบว่าอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $\beta - \propto > 1$ ถ้า $\beta - \propto = 1$ ก็คือ $\beta = 1 + \propto$ อนุกรมก็กลายเป็น

$$\frac{\propto}{\propto+1} + \frac{\propto(\propto+1)}{(\propto+1)(\propto+2)} + \frac{\propto(\propto+1)(\propto+2)}{(\propto+1)(\propto+2)(\propto+3)} + \ldots$$

$$= \frac{\propto}{\propto+1} + \frac{\propto}{\propto+2} + \frac{\propto}{\propto+3} + \ldots \text{ ซึ่งลู่ออก}$$

ถ้า $\beta < 1 + \propto$ แล้วแต่ละพจน์มีค่ามากอนุกรมจึงลู่ออก

สำหรับอนุกรมที่ยุ่งยากขึ้นเช่น

(3–17) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}} + \ldots$$

จะพบว่าลู่เข้าสำหรับบางค่าของตัวแปรเสริม $x$ โดยใช้บทแทรก 1 ของทฤษฎีบท 3.12 โดยให้ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ และ $b_n = \sin nx$ ก็เพียงแต่แสดงว่าผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \sin nx$ มีขอบเขต

**บทนำ 2** $$\sum_{1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

*สำหรับทุก* $x$ *เมื่อ* $\sin \frac{x}{2} \neq 0$

**พิสูจน์** $2 \sin \frac{x}{2} \sum_{1}^{n} \sin kx$

$$= 2 \sin \frac{x}{2} \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 3x + \ldots$$
$$+ 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx$$

**โดยใช้สูตร** $2 \sin A \sin B = \cos(B - A) - \cos(B + A)$ **จึงได้**

$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{1}^{n} \sin kx$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$
$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

จึงได้ตามทีบทนำต้องการ □

จากบทนำจึงได้ว่าผลบวกย่อยของ $\sum_{1}^{\infty} \sin nx$ มีขอบเขตโดย $\frac{1}{|\sin(x/2)|}$ ดังนั้น โดยบทแทรก 1 ของทฤษฎีบท 3.12 จึงได้ว่า $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้าสำหรับทุก x ซึ่ง $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ แต่อย่างไรก็ดีเมื่อ $\sin \frac{x}{2} = 0$ ย่อมได้ว่า $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ ก็ทำให้อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{x}}$ ลู่เข้าสู่ 0 อยู่แล้ว

## แบบฝึกหัด 3.2

1. จงสำรวจการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

(a) $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{6} + \frac{2}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$

(b) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \ldots$

2. จงคำนวณค่าของตัวแปรเสริมที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า

(a) $\frac{r}{2} + \frac{4r^2}{9} + \frac{9r^3}{28} + \frac{16r^4}{65} + \ldots$

(b) $, + \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{(2.3)x^3}{27} + \frac{(2.3.4)\ x^4}{81} + \ldots$

(c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\sqrt{n+1}}$

(d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{n(n!)^2}$

(e) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 3^n}$

(f) $\sum_{1}^{\infty} ne^{-ns}$

(g) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(\beta n)^n}{n!}$

(h) $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\ (\ \ +1)}{2!\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \ldots$

(i) $\sum_{1}^{\infty}\frac{x^n(1-x^n)}{n}$ (j) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n\ x_n}{n^3+x^{2n}}$

(k) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(2x+3)^n}$ (l) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{x+1}{2x+1}\right]^n$

(m) $\sum_{1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$

3. จงแสดงว่าสองข้อความต่อไปนี้ไม่จริง

(a) ถ้า $\Sigma a_n$ ลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ แล้ว $\Sigma a_n c_n$ ลู่เข้า

(b) ถ้า $\Sigma b_n$ ลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ แล้ว $\Sigma a_n$ ลู่เข้า

4. จงแสดงว่าผลบวกของอนุกรมที่ผลบวกย่อยขึ้น ๆ ลง ๆ สองอนุกรมมีค่าอยู่ระหว่างผลบวกของผลบวกย่อยคู่ใด ๆ และผลบวกของผลบวกย่อยคู่ถัดไป ดังนั้น ค่าผิดพลาด (error) หยุดที่พจน์ที่ n ไม่มากกว่าค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของผลบวกย่อยในพจน์ถัดไป

5. จงคำนวณรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

(a) $\sum_{0}^{\infty} n!x^n$ (b) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

(c) $\sum_{0}^{\infty} c^{n^2}x^n$ เมื่อ $0 < x < \infty$

6. จงคำนวณรัศมีของการลู่เข้าของแต่ละอนุกรมกำลังเหล่านี้

(a) $\sum_{1}^{\infty}n(x-1)^n$ (b) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n$

(c) $\sum_{1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}(x+2)^n$

7. สำหรับ $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + \ldots$

จงแสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุก x ซึ่ง $|x| < 1$ และทุก p ซึ่ง $p > 0$

8. จงอธิบายการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\,(x-3)^n}$

9. สมมุติว่ามีลำดับของจุด $\{p_n\}$ ซึ่ง $|p_{n+1} - p_n| \leqslant c_n$ เมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ลู่เข้า จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} p_n$ มีค่า

10. ได้ชี้ให้เห็นในหัวข้อ 3.2 แล้วว่ามีข้อคล้ายคลึงกันระหว่างอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_0^{\infty} f(x)dx$ และอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ในทางที่ $f(x)$ สมนัยกับ $a_n$ และข้อคล้ายคลึงของ $f'(x)$ กับ $a_{n+1} - a_n$ ตัดสินข้อความโดยเปรียบเทียบการทดสอบแบบไดริชเลตสำหรับอนุกรม (ทฤษฎีบท 3.12) กับการทดสอบแบบไดริชเลตสำหรับอินทิกรัล (ทฤษฎีบท 2.17)

11. โดยการใช้ข้อ 10 อะไรเป็นข้อคล้ายคลึงกันของอินทิกรัลไม่ตรงแบบของทฤษฎีบท 3.1 สำหรับอนุกรม telescoping

12. มีข้อคล้ายคลึงกันของอินทิกรัลไม่ตรงแบบของทฤษฎีบท 3.2 สำหรับอนุกรมหรือไม่

## 3.4 อนุกรมสองชั้น

**Double Series**

ข้อคล้ายคลึงของอินทิกรัลสองชั้นเป็นอนุกรมสองชั้น $\Sigma\Sigma a_{ij}$ มีความเป็นไปได้หลายทางและยอมรับนิยามสำหรับการลู่เข้าของอนุกรมสองชั้นและเลือกที่ใช้กันบ่อย ๆ

**นิยาม 3.4** *อนุกรมสองชั้น* $\Sigma\Sigma a_{ij}$ *ลู่เข้าสู่ผลบวก* A *ก็ต่อเมื่อสำหรับ* $\varepsilon > 0$ *มีจำนวนเต็มบวก* N *ซึ่ง*

$$\left| A - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} a_{ij} \right| < \varepsilon$$

*เมื่อ* $n \geqslant N$ *และ* $m \geqslant N$

ถ้าจะแจกแจงพจน์ $a_{ij}$ ลงในตาตารางในสี่เหลี่ยมผืนผ้า $a_{ij}$ อยู่ในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j

$$
[a_{ij}] = \left|\begin{array}{l}
a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \; . \; . \; . \; a_{1N} \; . \; . \; . \; a_{,,} \; . \; . \; . \\
a_{21} \;\; a_{22} \;\; a_{23} \; . \; . \; . \; a_{2N} \; . \; . \; . \; a_{,,} \; . \; . \; . \\
a_{31} \;\; a_{32} \;\; a_{,,} \; . \; . \; . \; a_{3N} \; . \; . \; . \; a_{3m} \; . \; . \; . \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{N1} \;\; a_{N2} \;\; a_{N3} \; . \; . \; . \; a_{NN} \; . \; . \; . \; a_{Nm} \; . \; . \; . \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n_1} \;\; a_{n_2} \;\; a_{n_3} \; . \; . \; . \; a_{nN} \; . \; . \; . \; a_{,,,,} \; . \; . \; . \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right|
$$

จะพบว่านิยามนี้หาค่าผลบวกทั้งสิ้นของ $\Sigma\Sigma a_{ij}$ โดยสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหมือนกับอนุกรมชั้นเดียว ความเป็นไปของอนุกรมซึ่งมีพจน์เป็นบวกก็จะไม่สับสนและทฤษฎีบทการเปรียบเทียบก็สามารถใช้ในการพิสูจน์ได้และในทำนองเดียวกันถ้า $\Sigma\Sigma\left|a_{ij}\right|$ ลู่เข้าแล้ว $\Sigma\Sigma a_{ij}$ ลู่เข้าด้วย อนุกรมก็จะกล่าวได้ว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และสามารถที่จะแสดงได้ว่าอนุกรมที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์อาจจะสลับพจน์ในการบวกอย่างไรก็ย่อมลู่เข้าสู่เลขจำนวนเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับอนุกรมสองชั้นที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์สามารถจัดพจน์ให้เป็นอนุกรมชั้นเดียวที่ลู่เข้าได้โดยอาจจะจัดการบวกกันในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังนี้

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{13} + a_{22} + a_{31} + a_{14} + a_{23} + \ldots$$

จากการสังเกตดังกล่าวแล้วอาจสร้างทฤษฎีบทที่สำคัญที่กระทำด้วยการคูณอนุกรมชั้นเดียวที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

**นิยาม 3.5** *ผลคูณโคชีของอนุกรม* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *และ* $\sum\limits_0^\infty b_n$ *คืออนุกรม* $\sum\limits_0^\infty c_n$ *ซึ่ง*

(3–18) $\quad c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0$

แรงจูงใจสำหรับนิยามนี้ได้มาจากการพยายามศึกษาอนุกรมกำลังถ้าพิจารณาอนุกรมกำลังซึ่งเป็นพหุนามที่มีกำลังไม่จำกัดและใช้กฎทางพีชคณิตแล้วผลคูณของ $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ และ $\sum\limits_0^\infty b_nx^n$ จะได้อนุกรมกำลังใหม่ซึ่งจะได้ $\sum\limits_0^\infty c_nx^n$ เมื่อ c กำหนดได้โดย

$$\begin{array}{rl} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \\ (3-19) & \underline{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots} \quad \times \\ & a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots \end{array}$$

ถ้าเอาวงเล็บออกเสียและให้ $x = 1$ ก็จะได้นิยาม (3 – 18) ซึ่งโคชีได้สร้างขึ้น ผลการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปจะตัดสินนิยามนี้

**ทฤษฎีบท 3.15** *ให้* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *และ* $\sum\limits_0^\infty b_n$ *ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ด้วยผลบวก* A *และ* B *แล้วผลคูณของอนุกรมทั้งสอง คือ* $\sum\limits_0^\infty c_n = \sum\limits_0^\infty (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$ *ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ผลบวก* AB

**พิสูจน์** ให้ $a_{ij} = a_ib_j$ แล้ว

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{j=0}^{j=m}|a_{ij}| = \sum_0^n|a_i|\sum_0^m|b_j|$$

ดังนั้น $\sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty} |a_{ij}|$ เป็นอนุกรมสองชั้นที่ลู่เข้าอนุกรม $\sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty} a_{ij}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และผลบวกคือ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{j=0}^{j=m} a_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n a_i \lim_{m\to\infty} \sum_0^m b_j$$

$$= AB$$

เมื่อเขียนอนุกรมสองชั้นเป็นอนุกรมชั้นเดียวโดยใช้วงเล็บจึงได้

$$AB = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots$$

$$= \sum_0^{\infty} c_n \quad \square$$

ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงด้วยถ้าอนุกรมใดอนุกรมหนึ่ง $\Sigma a_n$ หรือ $\Sigma b_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และอีกอนุกรมหนึ่งลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข การพิสูจน์สิ่งนี้ต้องการความรู้อื่น ๆ และผลลัพธ์ในการบวกอาจพบในกรณีพิเศษ สำหรับทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุกรมไม่รู้จบ การลู่เข้ายังคงเข้าใจไม่เพียงพอ ถ้าจะไม่ติดตามตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมที่มีค่าผลบวกย่อยขึ้น ๆ ลง ๆ (สำหรับ $n \geqslant 0$)

(3–20) $$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots$$

และสร้างผลคูณโคชีด้วยตัวของมันเอง (คือเอา (3–20) คูณตัวเอง) ย่อมได้ผลลัพธ์ในรูป (3–18) เรียกผลลัพธ์ที่ได้ว่า $\Sigma c_n$ จึงได้

$$c_0 = a_0b_0$$

$$= 1$$

$$c_1 = a_0b_1 + a_2b_0 = 1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)1$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$
$$= 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

.

.

.

$$c_n = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

อย่างไรก็ดีโดยการคำนวณพบว่า $c_n$ ไม่ลู่เข้าสู่ 0 ความจริงง่ายที่จะคำนวณว่า $|c_n| > \frac{1}{2}$ (ดูจากแบบฝึกหัดข้อ 1) ดังนั้น (3–20) ลู่เข้าแต่ผลคูณโคชีของตัวมันเองลู่ออก

อนุกรมที่มีข้อเหมือนกันสำหรับอินทิเกรตซ้ำก็คือการบวกซ้ำ (iterated summation) ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right)$ ซึ่งมีความหมายดังนี้

(3–22) $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \;$ เมื่อ $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$

เมื่อเทอม $a_{nk}$ เป็นบวก ก็คือค่าผลบวกที่เคยใช้มาแล้ว

**ทฤษฎีบท 3.16** *ถ้า* $a_{nk} \geqslant 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right\}$ *ลู่เข้าสู่* S *แล้ว* $\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\right\}$ *ลู่เข้าสู่* S *ด้วย*

**พิสูจน์** จากทฤษฎีบทบอกให้ทราบว่าอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \alpha_n$ ลู่เข้าและ $S = \sum_{1}^{\infty} a_n$ สำหรับ k ใด ๆ ซึ่ง $a_{nk} \leqslant \alpha_n$ โดยใช้การทดสอบแบบเปรียบเทียบ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$ ลู่เข้าสู่ $\beta_k$ สำหรับ k = 1, 2, 3, . . . เลือกจำนวนเต็มบวก N และเขียนว่า

$$\sum_{1}^{N} \beta_k = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_N$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,3} + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,N}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,N} \right\}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = S$$

เนื่องจากอนุกรมนี้มีขอบเขตไม่ว่า N จะมีค่าใด ๆ ดังนั้น $\sum_{1}^{\infty} \beta_k$ ลู่เข้าซึ่งผลบวกมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ S นั่นคือได้พิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right\}$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \right\}$$

นั่นคือ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \right\}$$

ผลลัพธ์นี้ไม่จริง ถ้าจำนวน $a_{nk}$ ไม่ใช่ค่าบวกในตาตารางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดข้างล่าง ผลบวกของแถวที่ n เป็น $\frac{1}{2^n}$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

อย่างไรก็ดีผลบวกของคอลัมน์ที่ k เป็น $\frac{1}{2}^{k=1}$ ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \right\} = 2$$

เป็นการแสดงว่าถ้าตรวจสอบไม่รอบคอบอาจผิดพลาดสำหรับตาตารางไม่รู้จบของจำนวน แม้ว่าแต่ละสมาชิกของแมทริกซ์เป็นค่าบวกก็ตาม สังเกตจากตาตารางของจำนวนเลขข้างล่าง

$$[a_{nk}] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{16} & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\text{-g} & \text{o}\ldots & \\ \ldots & & & & & & \\ \ldots & & & & & & \\ \ldots & & & & & & \end{bmatrix}$$

## แบบฝึกหัด 3.3

1. จงคำนวณ (3–21) และแสดงว่า $|c_n| > \frac{1}{2}$
2. จงสร้างผลคูณโคซีจากอนุกรมทั้งสองนี้

   $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$

   $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

   และหาสูตรสำหรับสัมประสิทธิ์ $(c_n)$ ของอนุกรมที่ได้
3. จงหาสูตรสัมประสิทธิ์ของผลคูณโคซีของอนุกรม $\sum_0^\infty A_n$ และ $\sum_0^\infty B_n$
4. ถ้า $\sum_0^\infty a_n x^n = (\sum_0^\infty x^n)\ (\sum_0^\infty x^{2n})$ จงหาสูตรของ $a_n$

5. กำหนดฟังก์ชันของไซน์และโคไซน์โดย

$$\sin(x) = S(x) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = C(x) = 1 + \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

จงแสดงว่า $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ โดยการคูณอนุกรมทั้งสอง

6. สำหรับค่า $r$ และ $s$ เป็นเท่าไรที่ทำให้อนุกรม

$\sum\sum_{m,\, n=1}^{\infty} r^m s^n$ ลู่เข้า

7. สำหรับ $x$ มีค่าเท่าไรที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty}\sum \frac{(2+x)^m(1-x)^n}{3^{m+n}}$$

8. จงสำรวจความลู่เข้าของอนุกรม $\sum\sum_{k,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^{2k}}$

9. พิจารณา $\sum\sum a_{ij}$ และ $\iint f(x,y)dxdy$ เมื่อ $f(i,j) = a_{ij}$ จงให้สูตรที่ถูกต้องของการทดสอบแบบอินทิกรัลสำหรับอนุกรมสองชั้น

10. จงสำรวจความลู่เข้าของ $\sum\sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2}$

## 3.5 ผลบวกบางจำนวน

ในขณะนี้เพียงพอแล้วในบางกรณีที่จะทราบว่าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า มีสิ่งที่สำคัญที่ควรทราบเกี่ยวกับค่าของผลบวกทราบว่า $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า ให้ค่าของผลบวกของมันเป็น C จาก ความลู่เข้าทำให้ทราบว่า C มีค่าใกล้ $\sum_{1}^{N} \frac{1}{n^2}$ ถ้า N มีค่ามากพอ แต่ N จะมากสักแค่ไหนที่จะคำนวณ C ได้ถูกต้อง

กลับไปทดสอบอีกครั้งด้วยการทดสอบแบบอินทิกรัลจะช่วยได้มาก ถ้า $a_n \geqslant 0$ และ f เป็นฟังก์ชันลดที่มีค่าบวก ซึ่ง $f(n) = a_n$ และ $b_n = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$ แล้วเช่นเดียวกับ

**การพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.10** $a_{n+1} \leqslant b_n$ และ $\Sigma_1^{\infty} b_n = \int_1^{\infty} f$ และเพราะฉะนั้น

(3–23) $\quad \sum^{\infty} a_{,,} \leqslant a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx$

และ

(3–24) $\quad \sum_{n > N+1}^{\infty} a_n \leqslant \int_1^{\infty} f(x)dx$

โดยการนำไปใช้กับ $\Sigma \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ การประมาณค่านี้คือ

(3–25) $\quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p} \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}$

(3–26) $\quad \sum_{n>N} \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{p-1} \frac{1}{N^{p-1}}$

สูตรเหล่านี้บอกให้ทราบว่าจำนวน C โดย $C \leqslant 2$ และผลบวกรู้จบ $\Sigma_1^{1000} \frac{1}{n^2}$ จะต่างจากค่าจริงของ C ไม่เกิน 0.001 (จะหาค่านี้ภายหลังว่าการประมาณค่านี้เที่ยงตรงเพียงใด)

ในทำนองเดียวกันลองใช้กับอนุกรมลู่ออก ในขณะที่บางครั้งอาจอยากทราบว่า $\Sigma a_n$ ลู่ออกนั้นลู่ออกเร็วเพียงใด ตัวอย่างเช่น เร็วอย่างไรที่ $A_N = \Sigma_1^N a_k$ เข้าใกล้อนันต์ ในกรณีที่ $a_n \geqslant 0$ ตัวอย่างเช่นอนุกรมฮาร์โมนิค $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก การคำนวณแสดงได้ว่า

$$\sum_1^{50} \frac{1}{n} = 4.499205\ldots$$

$$\sum_1^{100} \frac{1}{n} = 5.187377\ldots$$

$$\sum_1^{500} \frac{1}{n} = 6.792836\ldots$$

เนื่องจากอนุกรมลู่ออกและพจน์มีค่าบวก ทราบว่าผลบวกย่อยมากกว่า 100 แน่ การที่จะให้ $A_N > 100$ จะต้องใช้สักกี่พจน์ คือ N จะเป็นเท่าไร การประมาณค่านี้อาจใช้การทดสอบแบบอินทิกรัลก่อนที่จะทำเช่นนั้น ถ้า f ต่อเนื่องสำหรับ $1 \leqslant x < \infty$ และค่าเป็นบวกลดลงแล้ว

$$f(m+1) \leqslant \int_m^{m+1} f(x)dx \leqslant f(m)$$

ดังนั้น $\sum_2^n f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_1^{n-1} f(k)$ และ

*(3-27)* $$f(n) \leqslant \sum_1^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \leqslant f(1)$$

โดยการใช้วิธีการนี้กับอนุกรม $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ จึงพบว่า

$\sum_1^n \frac{1}{k} == \log n + C_n$ เมื่อ $0 < C_n \leqslant 1$ (ความจริง $\lim_{n\to\infty} C_n$ มีค่าโดยแบบฝึกหัด *3.2* ข้อ 10)

การนำมาใช้สำหรับกรณีอนุกรมฮาร์โมนิคเมื่อ $A_n > 1$ ถ้า $\log N > 10$ หรือ $N > e^{100}$ ซึ่งมีค่าโดยประมาณ $2.69 \times 10^{43}$

ถ้าจะวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกย่อยและอินทิกรัลที่สัมพันธ์กันอย่างระมัดระวัง สามารถจะได้ผลลัพธ์ที่ใช้ในการประมาณค่า

**ทฤษฎีบท** 3.17 *ให้* $f \in C^2$ *ด้วย* $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$ *สำหรับ* $1 \leqslant x < \infty$ *ให้*

$a, = f(n)$ *สำหรับ* $n \geqslant 1$ *และให้*

$S_n = \sum_1^n a_k - \int_1^n f(x)dx - \frac{1}{2}f(n)$ *แล้วลำดับ* $\{S_n\}$ *มีขอบเขต*

(3–28) *และได้* $f(1) - \frac{1}{2}f(2) \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2}f(1)$

ก่อนที่จะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ พิจารณาการประมาณค่ามาตรฐาน สมมติว่าจะประมาณค่าของ n! ซึ่งมีประโยชน์เมื่อ n มีค่ามาก ๆ สังเกตว่า $\log(n!) = \sum_1^n \log k$ โดยใช้ทฤษฎีบทซึ่ง $f(x) = \log x$ จึงได้

(3–29) $$S_n = \log(n!) - \int_1^n \log(x)dx - \frac{1}{2}\log n$$

$$= \log(n!) - n\log n + n - 1 - \frac{1}{2}\log n$$

เมื่อ $-\frac{1}{2}\log 2 \leqslant S_n \leqslant 0$ จึงเขียน (3 – 29) เสียใหม่ได้

(3–30) $\quad n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, C_n$ เมื่อ $C_n = e^{(1 + S_n)}$

จึงได้

(3–31) $\quad 1.922 < \frac{e}{\sqrt{2}} \leqslant C_n \leqslant e = 2.718\ldots$

(ในหัวข้อ 4.5 จะพบการประมาณค่าที่แตกต่างออกไปและลำดับ $\{C_n\}$ ลู่เข้าสู่ $\sqrt{2\pi}$ ความจริงนี้กับ (3–30) เรียกว่าสูตรของสเตอร์ลิง (Stirling's formula) สำหรับแพกทอเรียล)

สูตรนี้นำมาใช้กันบ่อย ๆ กับอนุกรมซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นแพกทอเรียลพิจารณา

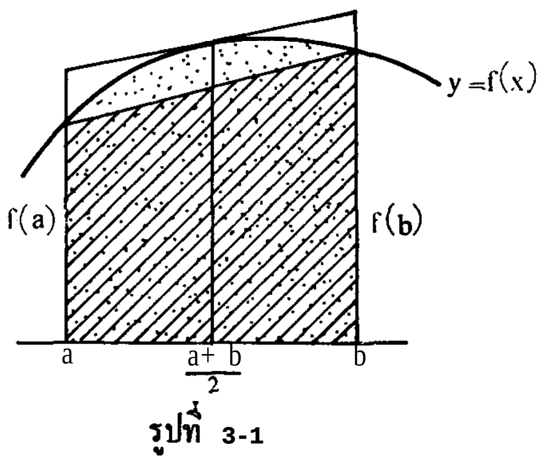
$$1 + \frac{1!\,2!}{3!} x + \frac{2!\,4!}{6!} x^2 + \frac{3!\,6!}{9!} x^3 + \ldots + \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} x^n + \ldots$$

โดยใช้สูตร (3–30) เพื่อประมาณค่าของสัมประสิทธิ์ของ $x^n$ จึงได้

$$\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} = \frac{(n^n e^{-n} \sqrt{n}\,[\,(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}\,]}{(3n)^{3n} e^{-3n} \sqrt{3n}} \cdot \frac{C_n\, C_{2n}}{C_{3n}}$$

$$= \left(\frac{n^{3n} e^{-3n}\, n\, 2^{2n}}{n^{3n} e^{-3n} \sqrt{n}\, 3^{3n}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\, C_n\, C_{2n}}{\sqrt{3}\, C_{3n}}\right) \approx \sqrt{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n$$

กลับมาพิจารณาอนุกรมบอกให้เราทราบว่าลู่เข้าสำหรับ $|x| < \frac{27}{4}$ และลู่ออกที่จุดปลายทั้งสองเนื่องจากอนุกรมกลายเป็น $\Sigma \sqrt{n}$ และไม่ลู่เข้าสู่ 0




รูปที่ 3-1

**พิสูจน์** จะเริ่มด้วยการสังเกตทางเรขาคณิตที่ง่าย ๆ เนื่องจาก $f''$ มีค่าเป็นลบจึงได้ว่า $f'$ เป็นฟังก์ชันลดสำหรับทุก $x > 1$ และเนื่องจาก f ยังคงมีค่าเป็นบวก $f'$ ไม่เป็นลบ $f'(x) \geqslant 0$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (แบบฝึกหัด 3.1 ข้อ 31) รูป 3–1 คือสิ่งที่เรากำลังพิจารณาต่อไป (ได้พิสูจน์กันแล้วในแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 16)

(3–32) $$\frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

สำหรับ $n \geqslant 1$ ใด ๆ จึงได้

$$\int_1^n f = \int_1^2 f \ \int_2^3 f + \ldots + \int_{n+1}^n f$$

ทางซ้ายมือของ (3–32) ได้

$$\frac{1}{2}\,(f(k) + f(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} f$$

จึงได้

$$\frac{1}{2}\, f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \leqslant \int_1^n f$$

และ $\sum_1^n f(k) \leqslant \int_1^n f + \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}\, f(1)$

การพิสูจน์ข้างต้นเป็นการพิสูจน์ทางขวาของ (3–28) เพื่อให้การพิสูจน์สมบูรณ์สองกรณีที่จะต้องพิจารณาในกรณีแรกถ้า n เป็นเลขคี่ก็จะได้

$$\int_1^n f = \int_1^3 f + \int_3^5 f + \int_5^7 f + \ldots + \int_{n-2}^n f$$

จากทางขวามือของ (3–32) ย่อมได้

$$\int_{k-1}^k f \leqslant 2f(k-1)$$

ก็ย่อมได้

(3–33) $$\int_1^n f \leqslant (2)(f(2) + f(4) + f(b) + , \ldots + f(n-1))$$

ถ้า $n$ เป็นเลขคู่

$$\int_1^n f = \int_1^2 f + \int_2^4 f + \int_4^6 f + \ldots + \int_{n-3}^{n-1} f + \int_{n-1}^n f$$

$$\leqslant (2)\,(f(3) + f(5) + f(7) + \ldots + f(n-2)) + \int_1^2 f + \int_{n-1}^{n} f$$

โดยการบวกเข้ากับ (3–33) จึงได้

$$2\int_1^n f \leqslant 2\sum_1^{n-1} f(k) + \int_1^2 f + \int_{n-1}^n f$$

ใช้ความจริงที่ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มเพื่อประมาณค่าอินทิกรัลและรวมทั้ง f(1) และ f(n) ในผลบวกจึงได้

$$2\int_1^n f \leqslant 2\sum_1^n f(k) - 2\ f(1) - 2f(n) + f(n) + f(2)$$

ดังนั้น

$$\int_1^n f + \frac{1}{2} f(n) - \sum_1^n f(k) \leqslant \frac{1}{2} f(2) - f(1)$$

นั่นคือ

$$f(1) - \frac{1}{2} f(2) \leqslant \sum_1^n f(k) - \int_1^n f - \frac{1}{2} f(n) \leqslant \frac{1}{2} f(1)$$

หรือ

$$f(1) - \frac{1}{2} f(2) \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2} f(1)$$

ดังนั้น $S_n$ มีขอบเขต □

*หมายเหตุ* ในการพิสูจน์ทางซ้ายมือของ (3–28) เมื่อ n เป็นเลขคี่และเมื่อ n เป็นเลขคู่อาจใช้

$$\int_1^n f = \int_1^2 f + \int_2^4 f + \int_4^6 f + \ldots + \int_{n-2}^n f$$

หรือ

$$\int_1^n f = \int_1^3 f + \int_3^5 f + \int_5^7 f + \ldots + \int_{n-3}^{n-1} f + \int_{n-1}^n f$$

ในที่สุดก็จะได้ค่าประมาณของ $S_n$ เหมือนกัน

การประมาณค่าที่คล้ายคลึงกัน ก็สามารถจะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันถ้า $f''$ มีค่าเป็นบวก (ดูแบบฝึกหัด 3.4 ข้อ 8 และบางสิ่งบางอย่างที่คล้ายคลึงกันก็สามารถทำได้ในอนุกรมสองชั้น (ดูแบบฝึกหัด 3.4 ข้อ 11)

ในขณะนี้ได้ใช้ขบวนการที่ยากยิ่งเพื่อประมาณค่าผลบวกของอนุกรมที่ลู่เข้า ซึ่งโดยปกติจะอ้างถึงอัตราเร่งของการลู่เข้า (acceleration of convergence) เนื่องจากเป็นวิธีซึ่งแทนอนุกรมที่กำหนดให้โดยอีกอนุกรมหนึ่ง ซึ่งพจน์ลู่เข้าสู่ 0 ได้เร็วกว่าและสำหรับตัวเลขที่สามารถประมาณได้จากผลบวกย่อยซึ่งกระทำกับจำนวนพจน์ที่น้อยกว่า วิธีการขึ้นอยู่กับการหาอนุกรมอีกอนุกรมหนึ่งซึ่งผลบวกทราบค่าและพจน์คล้ายคลึงกันขนาดของอนุกรมที่กำหนดให้

ตัวอย่างเช่น พิจารณาอนุกรม $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ ซึ่งผลบวกเป็น C อาจเขียน

$$\frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \frac{n}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)}$$

จากนี้ $$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} + \sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)}$$

อนุกรมแรกทางขวามือยอมรับกันว่าเป็นอนุกรม telescoping $\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$ ลู่เข้าสู่ 1 ดังนั้นได้แทนอนุกรมเดิมโดยอนุกรมอีกอนุกรมหนึ่งซึ่งพจน์เป็นกำลังสามของ n มีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว

$$(3\text{–}34) \qquad C = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{80} + \dots$$

ขบวนการนี้อาจจะทำซ้ำอีกครั้งหนึ่งเป็นอัตราในการลู่เข้าของอนุกรมใหม่ และมี

$$\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

และสังเกตว่า

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

พบว่า

$$\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

เนื่องจากอนุกรมแรกเป็นอนุกรม telescoping อนุกรมหลังลู่เข้าเร็วกว่าอนุกรมเดิม เนื่องจากพจน์ลดลงในรูป $n^{-4}$ ค่า $C = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ แสดงไว้ว่า คือ

(3–35) $C = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \frac{1}{144} + \frac{1}{400} + \frac{1}{900}\ \frac{1}{1764} + \ \ldots\right)$

ถ้าพจน์ของอนุกรมนี้ให้ค่า $C \approx 1.644767731$

**คัมเมอร์ (Kummer)** ได้แทนขบวนการนี้โดยระบบเทคนิค ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.18** *ให้* $\Sigma a_n$ *ลู่เข้าและให้* $\Sigma b_n$ *ลู่เข้าสู่ผลบวก* B *สมมติว่า* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ *แล้ว* $\sum_1^{\infty} a_n = BL + \sum_1^{\infty} u_k a_k$ *เมื่อ* $u_k = 1 - \frac{Lb_k}{a_k}$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะทิ้งไว้ให้ผู้อ่านพิสูจน์เองซึ่งไม่ยากนัก ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่า $u_k \to 0$ ดังนั้นอนุกรมใหม่ลู่เข้าเร็วกว่าอนุกรมเดิม ความยุ่งยากในการใช้ทฤษฎีบทนี้ที่สำคัญคือการหาอนุกรมที่คุ้นเคยกับ $\Sigma b_n$ ซึ่งมีผลบวกที่รู้จักกันว่าเป็น B ที่มีพจน์เหมือนกันเพียงพอกับอนุกรมเดิม $\Sigma a_n$ และให้ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ หาค่าได้ เช่นเดียวกับแสดงในตัวอย่างต่าง ๆ ซึ่งใช้ $\Sigma b_n$ เป็นอนุกรม tetescoping สำหรับเหตุผลนี้

การคำนวณด้วยพีชคณิตมักเป็นเครื่องมือในการหาผลบวกของอนุกรม ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่ใช้ในการคำนวณในระยะต้น ๆ ของวิชานี้ ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

(3–36) $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} = \frac{25}{48}$$

ในขั้นแรกเขียนพจน์แรก ๆ ในรูปของผลคูณ

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{6\cdot 10} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{8\cdot 12} + \ldots$$

ต่อไปสังเกต

$$1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \ldots$$

$$= \frac{4}{1\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 13} + \frac{4}{13\cdot 17} + \frac{4}{17\cdot 21} + \ldots$$

และสังเกต

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{18}\right) + \ldots$$

$$= \frac{4}{2.6} + \frac{4}{6.10} + \frac{4}{10'14} + \frac{1}{14'18}$$

เปรียบเทียบพจน์กับอนุกรมใน (3–36) ก็หาอนุกรม telescoping อีกคือ

$$\frac{1}{3} = \underset{3\cdot 7}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)} + \underset{7\cdot 11}{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)} + \underset{11\cdot 15}{\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right)} + \ldots$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$= \frac{4}{4'8} + \frac{4}{8.12} + \frac{4}{12\cdot 16} + \ldots$$

ดังนั้นจึงได้ $$\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{25}{48}$$

หลายวิธีการที่ง่าย ๆ ทำนองนี้สำหรับประมาณค่าผลบวกของอนุกรม ซึ่งจะพบในแบบฝึกหัด

บทเรียนนี้จะจบด้วยการคำนวณค่าแน่นอนของ C ซึ่งแสดงว่า $C = \frac{\pi^2}{6}$ $= 1.64493406 \ldots$ อย่างไรก็ดีการคำนวณนี้ได้ทำกันตั้งแต่ศตวรรษที่ 18 มากกว่าในปัจจุบัน จะทิ้งไว้ให้ผู้อ่านหาวิธีที่กระชับกว่าในเรื่องของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

ผลลัพธ์ซึ่งจะยืมวิธีการที่คุ้นเคยกันจากแคลคูลัสเบื้องต้น แต่ถ้าไม่คุ้นเคยก็จะแสดงในหัวข้ออนุกรมกำลังในบทต่อไป คือ

(3–37) $\cos x = 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

ความจริงก็คือจะหาค่าของ x (root) ของพหุนาม ถ้า P(x) มีค่า x เป็น $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$ ที่ไม่ใช่ 0 ก็จะเขียนได้ว่า

$$P(x) = (\beta_1 - x)(\beta_2 - x)(\beta_3 - x) \ldots (\beta_m - x)$$

$$= a, + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

แล้ว $a_0 = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_m$

และ $-a_1 = \beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_m + \beta_1\beta_3\beta_4 \ldots \beta_m + \beta_1\beta_2\beta_4 \ldots \beta_m$

$+ \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_{m-1}$

ดังนั้น

(3 -38) $-\frac{a_1}{a_0} = \Sigma \frac{1}{\beta_k}$

ต่อไปสังเกตว่า $\cos x = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$

ดังนั้นค่า x ของ $\beta_k$ ของ $\cos \sqrt{x} = 0$ ก็คือ $\frac{\pi^2}{4}, \frac{9\pi^2}{4}, \frac{25\pi^2}{4}, \ldots$

จาก (3 – 38) จึงได้

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \ldots$$

คำนวณจาก $P(x)$ พบว่า $a_0 = 1$ และ $a_1 = \frac{1}{2}$ ดังนั้นโดย (3 – 38)

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \ldots$$

จากนี้จึงสรุปได้ว่า

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots$$

อย่างไรก็ดี

$$C = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{48} + \ldots$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}C$$

จากนี้จึงได้ $\frac{3}{4}C = \frac{\pi^2}{8}$ และ $c = \frac{\pi^2}{6}$ ดังนั้นจึงนำให้คำนวณได้ว่า

(3 – 39) $$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

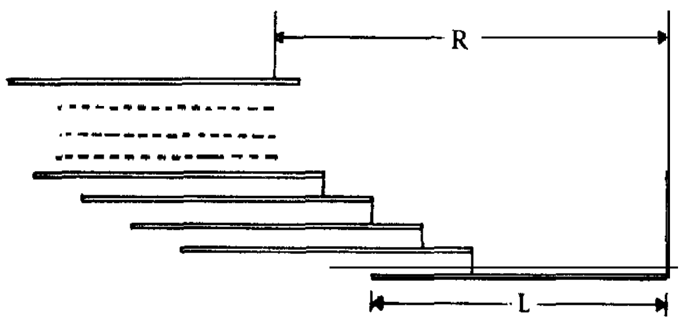
## แบบฝึกหัด 3.3

1. เนื่องจากอนุกรม $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ลู่ออก $\lim_{n\to\infty} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$ ถามว่าต้องใช้กี่พจน์ก่อนที่ผลบวกย่อยจะเกิน 10

2. จ งประมาณค่า

(a) $\sum_{1}^{n} \sqrt{k}$ (b) $\sum_{1}^{n} \frac{\log k}{k}$ (c) $\sum_{1}^{n} (\log k)^2$

3. โมบายล์ (mobile) สร้างขึ้นจากแท่งไม้เสมอต้นเสมอปลาย 50 แท่ง ยาวแท่งละ L แขวนแต่ละแท่งโดยใช้เชือกยาว 1 นิ้วแขวนอยู่ที่ปลายของไม้แท่งเหนือขึ้นไป ตามรูป 3.2 และทุกแท่งอยู่ในแนวระดับอันสุดท้ายแขวนไว้กับเพดาน ถามว่าโมบายล์ต้องการจุดหมุนยาวเท่าไร (หาค่า R ดังรูป 3.2)




รูปที่ 3.2

4. โดยใช้ข้อ 4 ในแบบฝึกหัด 3.2 แสดงว่าจำนวน $S = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ มีค่าอยู่ระหว่าง .818 กับ .828 (หมายเหตุ ค่าเฉลี่ยของผลบวกย่อยสองจำนวนที่ถัดกัน คือ $A_n$ และ $A_{n+1}$ ของอนุกรมที่ผลบวกย่อยมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ มักจะใกล้เคียงกันมาก ในข้อนี้ ผลบวกทั้งสองเป็น .8179 และ .8279 ค่าเฉลี่ยก็คือ .8229 ในขณะที่ค่าจริงของ S ก็คือ $\frac{\pi^2}{12} = .82246703 \ldots$)

5. จงประมาณค่าของผลบวกของแต่ละอนุกรมต่อไปนี้ให้มีค่าถูกต้องภายใน .005

(a) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$ (b) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$

6. จงตัดสินใจว่าจะใช้อนุกรม $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ สักกี่พจน์เพื่อประกันว่าการประมาณค่าได้ใกล้เคียงภายใน .005

7. ให้ $f(x) \geqslant 0$ , $f'(x) \geqslant 0$ , $f''(x) \geqslant 0$ สำหรับ $0 \leqslant x < \infty$ จงแสดงว่า

$$0 \leqslant \sum_1^n f(k) - \int_1^n f - \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(1) \leqslant \frac{1}{4}f'(n) \text{ สำหรับ } n \geqslant 1$$

8. ให้ f อยู่ใน $C^2$ บน $1 \leqslant x < \infty$ ด้วย $f(x) > 0$ , $f'(x) < 0$ , $f''(x) > 0$ สมมติว่า อนุกรม $\sum_1^{\infty} f(n)$ ลู่เข้า ใช้ความคิดเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.17 พิสูจน์ว่า

$$0 \leqslant \sum_N^{\infty} f(n) - \int_N^{\infty} f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(N) \leqslant \frac{1}{2}f'(N)$$

9. โดยใช้ผลจากข้อ 7 ประมาณค่าผลบวก $\sum_1^N k^2$ และ $\sum_1^N k^3$ แล้วเปรียบเทียบค่าประมาณเหล่านี้ด้วยค่าแน่นอนสักค่าหนึ่งของ N

10. จงแสดงว่า $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n - 4} = \frac{137}{300}$

11. โดยผลจากข้อ 8 ประมาณค่าผลบวกของอนุกรม $\sum_n^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ให้ถูกต้องภายใน .005 โดยการแบ่งกลุ่มพจน์เป็นคู่ ๆ เลือก

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

[จะต้องเลือกค่า N ใช้ข้อ 8 และแบ่งการคำนวณ $\sum_1^{N-1} f(n)$ ]

12. จงอภิปรายการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$

13. ในข้อ 1 (c) และ d แบบฝึกหัด 3.1 เขียนพจน์ของอนุกรมเสียใหม่โดยใช้แฟกทอเรียล และใช้ (3 – 30) เพื่อคำนวณลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

14. จงแสดงว่าผลบวกของอนุกรมสองชั้นในข้อ 8 แบบฝึกหัด 3.3 มีค่าเป็น $\frac{7}{24}$

15. โดยประมาณจุด p = (m, n) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $|p| \leqslant R$

16. จงแสดงว่าค่าที่มีเหตุผลของผลไม่รู้จบข้างล่างมีค่าเป็น $\frac{1}{2}$

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{25})(1 - \frac{1}{36}) \ldots$$

17. ค่าใดเป็นค่าที่มีเหตุผลสำหรับ

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}$$