บทที่ 2
การอินทิเกรต
Integratian

2.1 คำนำ

ในบทเรียนนี้จะได้อภิปราย $\iint_D f$ อินทิกรัลสองชั้น (double integral) สำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปรบนเซตในระนาบ จะใช้ปรากฏการนี้ด้วยเหตุผลว่าจะได้มองเห็นปัญหาและสามารถนำไปทำความเข้าใจในฟังก์ชันของตัวแปร n ตัวแปรได้โดยง่ายรวมทั้งฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียวด้วย ด้วยความชำนาญจนเกินไปในแคลคูลัสเบื้องต้นมักจะละเลยความเข้าใจในทั้งธรรมชาติของการอินทิเกรตและกฎเกณฑ์ของปฏิยานุพันธ์ (antidifferentiation) ในการหาค่าอินทิกรัลโดยเฉพาะอย่างยิ่งในอินทิกรัลหลาย ๆ ชั้น

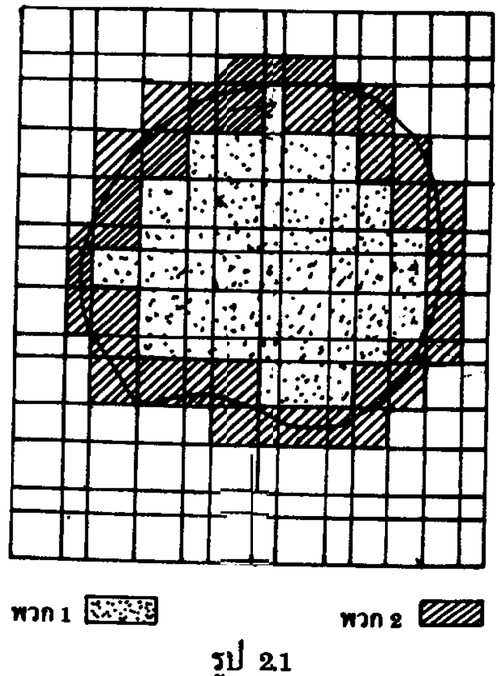
ความสำคัญที่จะต้องทำความเข้าใจข้อแตกต่างระหว่างอินทิกรัลหลายชั้นและการอินทิกรัลซ้ำ (iterated integral) และสามารถจะทำจากอันหนึ่งที่กล่าวแล้วไปสู่อีกอย่างหนึ่งได้อย่างไร เนื่องจากไม่ใช่ทุกอินทิกรัลจะสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีนี้ เนื่องจากอินทิกรัลหลาย ๆ ชั้นดูเสมือนเป็นของเทียมจะได้ศึกษาในตอนท้าย ๆ ของหัวข้อ 2.3 ซึ่งจะได้นำปัญหาทั่ว ๆ ไปของการขนส่งในชานเมือง ในหัวข้อหนึ่งที่ค่อนข้างจะเป็นแคลคูลัสเบื้องต้นในการคำนวณอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในหลายตัวแปรซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 2.5

ในที่สุดจะได้กล่าวถึงโดยย่อในหัวข้อ 2.4 ในหลักการเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลหลายชั้นโดยเริ่มจากขบวนการและภาพประกอบของสิ่งเหล่านี้ด้วยพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) เราจะเลือกแนะนำเป็นชิ้นของความมหัศจรรย์ของแผ่นชานชลา (as a piece of platform magic) ขบวนการเลขคณิตที่ง่าย ๆ เพื่อนำไปสู่พื้นฐานในการคำนวณในเชิงอนุพันธ์

2.2 อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)

ในแคลคูลัสเบื้องต้น การอินทิเกรตมักจะว่าได้ค่าพื้นที่ใต้เส้น (area under a curve) เป็นผลลัพธ์เมื่อกระทำอินทิกรัลสองชั้นก็ทราบได้โดยทันทีว่าเป็นปริมาตรภายใต้ผิว อย่างไรก็ดีสิ่งเหล่านี้ได้ทิ้งสิ่งที่ยุ่งยากบางประการสำหรับอินทิกรัลสามชั้นและมากกว่าไว้ จุดมุ่งหมายใหญ่อันหนึ่งสำหรับหัวข้อนี้จะได้เพิ่มจุดประสงค์ที่เป็นประโยชน์มากที่สุดทั้งในการประยุกต์และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ อินทิกรัลจำกัดเขตจะปรับปรุงการอินทิเกรตฟังก์ชัน f บนเซต D ซึ่งมุ่งได้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขขึ้นอยู่กับ f และ D เริ่มจากกรณีง่ายๆคือ นิยามของรีมานน์อินทิกรัล (Riemann integral) ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R โดยการเริ่มต้นจากกรณีของตัวแปรตัวเดียว หวังว่าเป็นแนวโน้มที่จะเชื่อมการอินทิเกรตกับปฏิยานุพันธ์ได้เข้มแข็งกว่า

โดยตาตาราง (grid) หมายถึงเซตจำกัดใดๆของเส้นระดับและเส้นดิ่ง ซึ่งประกอบเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ซึ่งเป็นเซตของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็กๆ ซึ่งต่างสมาชิกกัน (disjoint) ยกเว้นที่เส้นรอบรูป ถ้าตาตารางให้ชื่อว่า N และแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ R_{ij} ดังรูป 2.1 สิ่งที่ชี้ขนาดของตาตาราง N ก็คือ d(N) ซึ่งเป็นเส้นทะแยงมุมของ R_{ij} ที่ยาวที่สุด



รูป 2.1

ขนาดของ R_{ij} อาจไม่เท่ากันก็จะเกิดเหตุการณ์ว่าถ้า $d(N)$ เล็กมากจำนวนสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ทั้งหมดก็ย่อมมาก และแต่ละรูปมีขนาดเล็กมาก ให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ เหล่านี้แต่ละรูปเป็น $A(R_{ij})$ (ดูแบบฝึกหัดข้อ 1 ซึ่งจะถามให้ปรับอย่างมีเหตุผลของคุณสมบัติอย่างง่ายของแนวความคิดนี้)

ในแต่ละ R_{ij} เลือก p_{ij} และสร้างผลบวกของรีมานน์ว่า

$$S(f,N,\{p_{ij}\}) = \sum_{ij} f(p_{ij})\, A(R_{ij})$$

เนื่องจากผลบวกทางขวามือมีจำนวนจำกัดแน่นอน S เป็นจำนวนซึ่งขึ้นอยู่กับ f, N $\{p_{ij}\}$ เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้นอาจจะอธิบายได้ในหลายทาง ตัวอย่างเช่น ถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้า **R** เป็นแผ่นโลหะซึ่งมีความหนาแน่นต่าง ๆ กัน และ $f(p)$ เป็นความหนาแน่นที่จุด p แล้ว S อาจเป็นค่าโดยประมาณสำหรับมวลสารทั้งหมดของแผ่นโลหะนั้น

นิยาม 2.1 *อินทิกรัลสองชั้น* $\iint_R f$ *มีค่า และมีค่า* v *ก็ต่อเมื่อ*

สำหรับ $\varepsilon > 0$ *มี* $\delta > 0$ *ซึ่ง*

$$\left| S(N, f, \{p_{ij}\}) - v \right| < \varepsilon$$

สำหรับตัวเลือก p_{ij} *ใด ๆ และตาตาราง* N *ซึ่ง* $d(N) < \delta$

โดยการวิเคราะห์ของนิยาม 2.1 อาจเขียนได้เป็น

$$\lim_{d(N)\to 0} S(N, f, \{p_{ij}\}) = \iint_R f$$

อย่างไรก็ดี โดยวิธีการของลิมิตซึ่งต่างกันในการใช้งานหลายอย่างจากที่กล่าวแล้วในตอนต้น โดยระบบการใช้ตาตารางไม่ใช่ลำดับที่ลู่เข้าสู่ค่าลิมิตบางจำนวน และจำนวน $d(N)$ ไม่ได้กล่าวถึงตาตารางเพียงตาตารางเดียวอันหนึ่งเท่านั้น ในการทำความเข้าใจอินทิกรัลจำเป็นต้องทราบว่าเป็นความจริงในฟังก์ชันอย่างไรบ้าง

สมมติว่า f มีขอบเขตบน R สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ R_{ij} ซึ่งกำหนดขึ้นโดยตาตาราง N มีจำนวนที่น่าสนใจสองจำนวนคือ

$$M_{ij} = \sup_{p \in R_{ij}} f(p)$$

$$m_{ij} = \inf_{p \in R_{ij}} f(p)$$

สร้าง $\bar{S}(N) = \Sigma M_{ij} A(R_{ij})$ = upper Riemann sum

$\underline{S}(N) = \Sigma m_{ij} A(R_{ij})$ = lower Riemann sum

จะเห็นได้ชัดเจนว่า $\underline{S}(N) \leqslant S(N, f, \{p_{ij}\}) \leqslant \bar{S}(N)$ สำหรับการเลือก p_{ij} ใดๆ และถ้า f ต่อเนื่อง จะได้พิจารณาความมีอยู่ของ $\iint_R f$ จาก $\underline{S}(N)$ และ $\bar{S}(N)$ ในการนี้จำเป็นต้องเข้าใจการเพิ่มเส้นเข้าไปในตาตาราง (refinement of a grid)

นิยาม 2.2 *ตาตาราง N′ กล่าวได้ว่าเป็นตาตารางที่ได้จากการเพิ่มเส้นเข้าไปในตาตาราง N ก็คือ ตาตาราง N ที่ถูกเพิ่มเส้นเข้าไปอย่างน้อยหนึ่งเส้น*

หมายเหตุ อาจมีตาตารางสองตาตาราง ซึ่งไม่สัมพันธ์กันโดยการเพิ่มเส้นเข้าไป

บทนำ 2.1 *ถ้าตาตาราง N′ เป็นตาตารางที่ได้จากการเพิ่มเส้นเข้าไปในตาตาราง N แล้ว*

$$\underline{S}(N) \leqq \underline{S}(N') \leqq \bar{S}(N') \leqq \bar{S}(N)$$

พิสูจน์ สมมติว่าการเพิ่มเส้นเข้าไปในตาตารางเป็นผลในพจน์ $M_{ij} A(R_{ij})$ สำหรับ $\bar{S}(N)$ ภายใต้การแบ่งใหม่ R_{ij} ถูกแบ่งออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ลงไปอีกเป็น $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ ดังนั้นในแต่ละพจน์ของ $\bar{S}(N)$ จะมีใน $\bar{S}(N')$ ในพจน์นั้นก็จะเป็น $M^{(1)}A(r_1) + M^{(2)}A(r_2) + M^{(3)}A(r_3) + \ldots + M^{(m)}A(r_m)$ เมื่อ $M^{(k)}$ เป็น l. u. b. ของ f ใน r_k เนื่องจากแต่ละ r_k อยู่ใน R_{ij} ดังนั้น $M^{(k)} \leqslant M_{ij}$ และ

$$\sum_{k=1}^{m} M^{(k)}A(r_k) \leqslant M_{ij} \sum_{k=1}^{m} A(r_k) = M_{ij}A(R_{ij})$$

ดังนั้น $\bar{S}(N') \leqslant \bar{S}(N)$

และในทำนองเดียวกับ $\underline{S}(N) \leqslant \underline{S}(N')$

นั่นคือ $\underline{S}(N) \leqslant \underline{S}(N') \leqslant \overline{S}(N') \leqslant \overline{S}(N)$ □

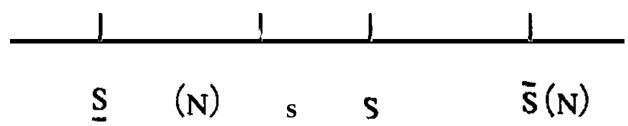
ทุกตาตารางเปล่า (empty grid) ไม่ได้แบ่ง R เลย ดังนั้นสำหรับตาตาราง n ใด ๆ

$$mA(R) \leqslant \underline{S}(N) \leqslant \overline{S}(N) \leqslant MA(R)$$

เมื่อ $m = \inf_{p\in R} f(p)$ และ $M = \sup_{p\in R} f(p)$ เซตของ $\underline{S}(N)$ เป็นเซตที่มีขอบเขตข้างบนภายใต้ตาตารางที่เป็นไปได้ N ให้ s เป็น l.u.b. ของ $\underline{S}(N)$ เซตของ $\overline{S}(N)$ เป็นเซตที่มีขอบเขตข้างล่าง ให้ S เป็น g.l.b. ของ $\overline{S}(N)$

บทนำ 2.2 $s \leqslant S$ *และสำหรับ* N *ใด ๆ* $S - s \leqslant \overline{S}(N) - \underline{S}(N)$

พิสูจน์ ข้อความนี้ให้ความสัมพันธ์ของตัวเลขดังรูปข้างล่าง



เนื่องจาก $\underline{S}(N)$ อยู่ข้างซ้ายของ s เสมอ และ $\overline{S}(N)$ อยู่ทางขวาของ S จึงได้ความจริงว่า $S - s \leqslant \overline{S}(N) - \underline{S}(N)$ เพื่อไม่ต้องคำนึงถึงตำแหน่งของ s และ S ให้ N_1 และ N_2 เป็นตาตารางสองตาตาราง และสร้างตาตารางที่สาม N จาก N_1 และ N_2 ดังนั้น N มีเส้นทั้งหมดของ N_1 และ N_2 เป็นตาตารางที่เพิ่มเส้นจาก N_1 และเป็นตาตารางที่เพิ่มเส้นจาก N_2 ด้วย โดยใช้บทนำ 2.1

$$\begin{matrix}\underline{S}(N_1)\\ \underline{S}(N_2)\end{matrix} \leqslant \underline{S}(N) \leqslant \overline{S}(N) \leqslant \begin{matrix}\overline{S}(N_1)\\ \overline{S}(N_2)\end{matrix}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $\underline{S}(N_1) \leqslant \overline{S}(N_2)$ เนื่องจาก N_1 และ N_2 เป็นตาตารางใด ๆ แสดงว่าทุก $\underline{S}(N_i)$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\overline{S}(N_i)$ เนื่องจาก s เป็น l.u.b. ของ $\underline{S}(N_i)$ ดังนั้น $s \leqslant \overline{S}(N_i)$ เป็นจริงสำหรับทุก N_i ดังนั้น $s \leqslant S$ □

เมื่อมาถึงจุดนี้ ยังไม่ได้สรุปว่า f ต่อเนื่อง จำนวน s และ S กำหนดได้เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเรียกว่าอินทิกรัล ต่ำกว่าและสูงกว่า (lower and upper integral) ของ f บน R

บทนำ 2.3 *ถ้า f ต่อเนื่องบน R แล้ว* $\lim\limits_{d(N)\to 0+} \left|\overline{S}(N) - \underline{S}(N)\right| = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก R เป็นเซตปิดและมีขอบเขต เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องเสนอต้นเสมอปลาย บน R กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta > 0$ ซึ่ง $\left|f(p) - f(q)\right| < \varepsilon$ เมื่อ p และ q อยู่ใน R และ $\left|p - q\right| < \delta$ ให้ N เป็นตารางใดๆ ซึ่งแบ่ง R ด้วย $d(N) < \delta$ เนื่องจาก $M_{ij} f(p)$ และ $m_{ij} = f(q)$ สำหรับการเลือก p และ q เป็นกรณีพิเศษ ใน R_{ij} และเนื่องจาก R_{ij} มีเส้นทะแยงมุมสั้นกว่า δ จึงได้ $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$ สำหรับทุก i และ j ซึ่งได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \overline{S}(N) - \underline{S}(N) &= \Sigma\, (M_{ij} - m_{ij})\, A(R_{ij}) \\
&\leqslant \varepsilon A(R_{ij}) \\
&= \varepsilon A(R)
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $\left|\overline{S}(N) - \underline{S}(N)\right|$ สามารถสร้างให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้โดยให้ d(N) น้อยลง นั่นคือ $\lim\limits_{d(N)\to 0+} \left|\overline{S}(N) - \underline{S}(N)\right| = 0$ □

จากนิยาม 2.2 และบทนำดังกล่าวแล้วนำมาพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปได้

ทฤษฎีบท 2.1 *ถ้า f ต่อเนื่องบน R แล้ว* $\iint_R f$ *มีค่า*

พิสูจน์ จากบทนำ 2.2 และ 2.3 รวมกันก็แสดงได้ว่า $s = S$ พิจารณาค่า v โดยให้ $\varepsilon > 0$ เลือก δ ดังนั้น $\overline{S}(N) - \underline{S}(N) < \varepsilon$ เมื่อ N คล้องตาม $d(N) < \delta$ ช่วงปิด $[\underline{S}(N), \overline{S}(N)]$ ประกอบด้วย v และผลบวกของรีมานน์ทั่วๆ ไป $S(N, f, \{P_{ij}\})$

ดังนั้น $\left|S(N,f,\{p_{ij}\}) - V\right| < \varepsilon$ เมื่อตาตาราง N คล้องตาม $d(N) < \delta$ ดังนั้น $\iint_R f$ มีค่า □

อาจมีคำถามสองคำถามโดยปกติก็คือ 1) จะเกิดอะไรขึ้นถ้า f ไม่ต่อเนื่องบน R 2) สามารถจะนิยามอินทิกรัลของ f บนเซต D ที่ไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ จะได้ตอบปัญหาข้อแรกต่อไปก่อนอื่นขอแนะทำปัญหาบางประการเสียก่อน

ความเข้าใจใหม่ก็คือเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ ซึ่งจะต้องนำความเข้าใจเสียก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

โดยทางประวัติของความคิดเกี่ยวกับพื้นที่ที่ต่างไปจากอินทิกรัลให้ D เป็นเซตที่มีขอบเขตใด ๆ ในระนาบเลือกสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ที่ประกอบด้วย D และขอบของ R ขนานกับแกนพิกัดตาตาราง N ใด ๆ แบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ R_{ij} ซึ่ง เซตปกคลุม D (cover D)

แบ่งแยกสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ R_{ij} ออกเป็นสามพวก (ดูรูป 2.1) พวก 1 เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ที่ประกอบด้วยจุดข้างในของ D พวกที่ 2 คือสี่เหลี่ยมผืนผ้า Rij ที่ประกอบด้วยอย่างน้อยหนึ่งจุดของเขตของ D พวกที่ 3 คือสี่เหลี่ยมผืนผ้า Rij ซึ่งจุดข้างนอกของ D เซตผลผนวก (union) ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพวก 1 เรียกว่าเซตแนบใน (inner or inseribed set) ของ D กำหนดโดยตาตาราง N เซตผลผนวกของสี่เหลี่ยมผืนผ้าในพวก 1 และพวก 2 เรียกว่าเซตเขียนล้อม (outer or circumscribing set) ให้ $\overline{S}(N,D)$ เป็นพื้นที่ทั้งหมดของเซตเขียนล้อม และ $\underline{S}(N,D)$ เป็นพื้นที่ทั้งหมดของเซตแนบในจึงเห็นได้โดยชัดเจนว่า

$$0 \leqslant \underline{S}(N,D) \leqslant \overline{S}(N,D) \leqslant \text{พื้นที่ของ } R$$

เมื่อให้ N เป็นตาตารางที่เป็นไปได้ใด ๆ ค่าของ $\overline{S}(N,D)$ มีขอบเขตข้างล่างโดยกำหนดได้โดยเซต D ให้ $\overline{A}(D)$ เป็น g.l.b. ของ $\overline{S}(N,D)$ ในทำนองเดียวกัน $\underline{S}(N,D)$ เป็นเซตที่มีขอบเขตข้างบน ให้ $\underline{A}(D)$ เป็น l.u.b ของ $\underline{S}(N,D)$ เรียก $\overline{A}(D)$ ว่าพื้นที่ของ D รวมทั้งภายนอก D อีกเล็กน้อย (outer area) และ $\underline{A}(D)$ ว่าพื้นที่แนบใน (inner area) ของ D ถ้าทั้งสองค่าเป็นค่าเดียวกันเขียนแทนด้วย $A(D)$ คือพื้นที่ของ D

ขบวนการนี้กำหนดพื้นที่ของเซต D เซตหนึ่งควรคำนึงว่าไม่ทุกเซตจะต้องมีพื้นที่ ตัวอย่างเช่น

$$D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \wedge x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}\}$$

เนื่องจากเซต D ไม่มีจุดข้างในเลย พวก 1 จึงเป็นเซตเปล่า ดังนั้น $\underline{A}(D) = 0$ ทุกจุดในสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ

$\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \wedge x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ เป็นจุดขอบเขตของ D ดังนั้น $\overline{A}(D) = 1$ เนื่องจาก $\underline{A}(D) \neq \overline{A}(D)$, D จึงไม่มีพื้นที่ (พึงสังเกตความแตกต่างจากการกล่าวว่าเซต D มีพื้นที่เป็นศูนย์สำหรับความหมายนี้หมายความว่า

$$\underline{A}(D) = \overline{A}(D) = 0$$

เพื่อให้เป็นไปตามนิยาม เซต D อาจมีพื้นที่เป็นศูนย์คือ $A(D) = 0$ ก็ต่อเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ สามารถปกคลุม D ได้โดยสี่เหลี่ยมผืนผ้าชุดหนึ่งที่มีจำนวนจำกัด R_k ซึ่ง

$$A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \ldots + A(R_m) < \varepsilon$$

เซตจำกัดใด ๆ มีพื้นที่เป็นศูนย์ เช่นเดียวกับเส้นก็มีพื้นที่เป็นศูนย์ด้วย ซึ่งง่ายในการแสดงว่ากราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง $f(x)$ ที่กำหนดขึ้นบนช่วง $[a, b]$ เป็นเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ (แบบฝึกหัด ข้อ 14) และสามารถแสดงได้ด้วยวิธีเดียวกันว่า เส้นเรียบ (smooth curve) ใด ๆ ในระนาบมีพื้นที่เป็นศูนย์ (แบบฝึกหัด ข้อ 15)

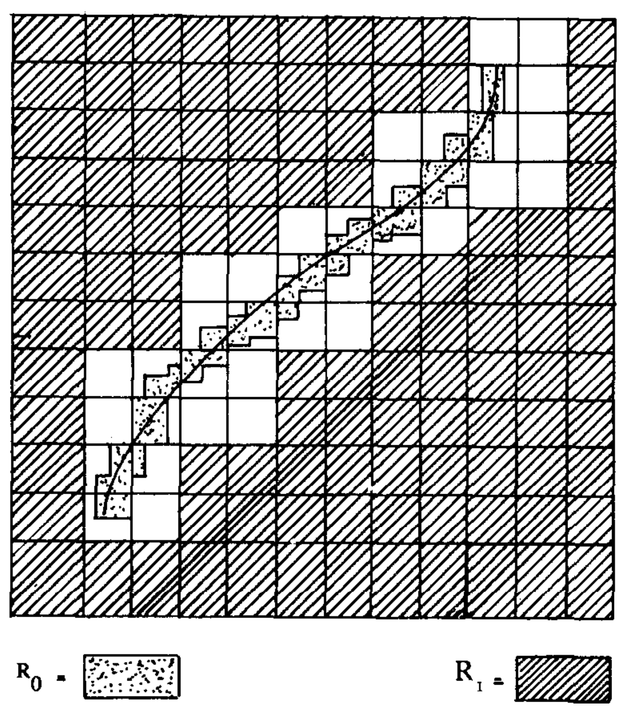
กลับมาพิจารณารูป 2.1 อีกครั้ง สำหรับการเลือกตาตาราง N ใด ๆ จำนวน $\overline{S}(N,D) - \underline{S}(N,D)$ ก็คือผลบวกของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ในพวก 2 ซึ่งเป็นเพียงเซตเขียนล้อมจุดขอบของ Γ ของ D ดังนั้นจำนวน $\overline{A}(D) - \underline{A}(D)$ ก็คือ $\overline{A}(\Gamma)$ พื้นที่ของเซตเขียนล้อมของจุดขอบเขตของ D เพราะฉะนั้นเซต D มีลักษณะดีพอที่จะมีพื้นที่ต่อเมื่อเซตของจุดขอบเขตของ D มีพื้นที่เป็นศูนย์ อาจสรุปได้ว่าถ้า D มีพื้นที่จำนวนหนึ่งจุดขอบเขตของ D อาจเป็นส่วนของเส้นตรง หรือเป็นเส้นเรียบก็ตามย่อมมีพื้นที่เป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 2.2 *ให้* R *เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด และให้* f *มีขอบเขตใน* R *และต่อเนื่องที่ทุกจุดของ* R *ยกเว้นในเซต* E *ซึ่งมีพื้นที่เป็นศูนย์และ* $\iint_R f$ *มีค่า*

พิสูจน์ จากสมมติฐานเซตของความไม่ต่อเนื่องของ f คือเซต E ที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นเป็นไปได้ที่จะเลือกตาตารางบน R ซึ่งมีสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ที่ปกคลุม E ให้มีพื้นที่น้อยเท่าไรก็ได้ ให้ $\varepsilon > 0$ สมมติว่ามีเซตผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_0 ซึ่ง $E \subseteq R_0$ และ $A(R_0) < \varepsilon$ เซตผลผนวกของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ไม่ปกคลุม E คือเซตปิด R_1 ซึ่งไม่มีจุดของ E อยู่เลย และ f ต่อเนื่องบนเซตนี้ เนื่องจาก f ต่อเนื่องเสมอต้นเสมอปลายใน R_1 ก็สามารถเลือก $\delta_1 > 0$ ดังนั้น $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$ เมื่อ p และ q อยู่ใน R_1 และ $|p - q| < \delta_1$ โดยตาตาราง N และสร้างผลต่าง

$$\bar{S}(N) - \underline{S}(N) = \Sigma(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij})$$

แบบธรรมดา R_{ij} ออกเป็นสองพวก โดยให้ S_1 ประกอบด้วย R_{ij} ซึ่งเป็นเซตส่วนหนึ่งของ R_1 และ S_2 เป็นเซตของ R_{ij} ส่วนที่เหลือ (ดูรูป 2.2) แยก



รูป 2.2

$\bar{S}(N) - \underline{S}(N)$ ตามลำดับดังนี้

$$\bar{S}(N) - \underline{S}(N) = \sum_{R_{ij} \in S_1} (M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \in S_2} (M_{ij} - m_{ij})A(R_{ji})$$

ถ้า $d(N) < \delta_1$ เราได้ $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$ เมื่อ $R_{ij} \leqslant R_1$ ดังนั้น

$$\sum_{R_{ij} \in S_1} (M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) < \varepsilon \quad \sum_{R_{ij} \in S_1} A\,(R_{ij}) \leqslant 2\,BA(R_1)$$

โดยสมมุติฐาน f มีขอบเขตใน R ดังนั้น $|f(p)| < B$ สำหรับทุก $p \in R$ ให้ R_0' เป็นเซตผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าใน S_2 แล้ว

$$\sum_{R_{ij} \in S_2} (M_{ij} - m_{ij})\ A(R_{ij}) \leqslant 2B \sum_{R_{ij} \in S_2} A(R_{ij}) = 2BA(R_0')$$

เซต R_0' เป็นเซตเขียนล้อมของ R_0 ในการแบ่งโดยตาตาราง N เพราะฉะนั้นเลือก δ_2 ซึ่ง $A(R_0') \leqslant (R_0) + \varepsilon < 2\varepsilon$ เมื่อ $d(N) < \delta_2$ ให้ $\delta = \min\,[\delta_1, \delta_2]$ นั่นคือได้แสดงแล้วว่าเมื่อไรก็ตามที่ตาตาราง N แบ่ง R ด้วย $d(N) < \delta$, $\bar{S}(N) - \underline{S}(N) < \varepsilon A(R) + 4B\varepsilon = (4B + A(R))\varepsilon$ จากบทนำ 2.3 จึงได้ $\lim_{d(N) \to 0+} |\bar{S}(N) - \underline{S}(N)| = 0$ ดังนั้น $\iint_R f$ มีค่า □

ทฤษฎีบท 2.2 ได้ตอบคำถามคำถามแรกและสามารถใช้เพื่อตอบคำถามที่ 2 ได้ด้วยวิธีที่ง่ายที่สุดก็คือ แบ่งอินทิกรัลของ f บน D เมื่อ D ไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า สมมติว่า D เป็นเซตที่มีขอบเขตใด ๆ เลือกสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ที่ประกอบด้วยทุกจุดใน D คือ $D \subseteq R$ กำหนดพึงก์ชันใหม่บน R โดย

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{เมื่อ } p \in D \\ 0 & \text{เมื่อ } p \notin D \end{cases} \tag{2-1}$$

สมมติว่า f ต่อเนื่องบนเซตของจุดข้างในของ D จะกล่าวได้อย่างไรว่า F ต่อเนื่องใน R F ต่อเนื่องแน่นอนที่ทุกจุดข้างในของ D ถ้า p_0 เป็นจุดที่ไม่อยู่ใน D แล้ว $F(p_0) = 0$ และถ้า p_0

เป็นจุดข้างนอกของ D ทุกจุดที่อยู่ใกล้ ๆ p_0 ค่าของ F ของจุดเหล่านั้นเป็นศูนย์ด้วย ดังนั้น F ต่อเนื่องที่ทุกจุด p ที่เป็นจุดข้างในของ D และจุดของ D ดังนั้น F ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่ขอบเขตของ D ถ้าเซต D เป็นเซตที่มีพื้นที่ (เรียกเซตเช่นนี้ว่า Jordan measurable) ดังที่กล่าวแล้ว bdy(D) เซตจุดขอบเขตมีพื้นที่เป็นศูนย์ โดยทฤษฎีบท 2.2 $\iint_R f$ มีค่า จึงกำหนดอินทิกรัลของ f บน D ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\iint_R F &= \iint_D F + \iint_{R-D} F \\ &= \iint_D f + \iint_{R-D} 0 \\ &= \iint_D f\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(2-2) \qquad \iint_D f = \iint_R F$$

สิ่งที่เหลือก็คือการแสดงว่าคำตอบไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกสี่เหลี่ยมผืนผ้า R สมมติว่า R' เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วย D และ F' เป็นฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่ให้กับ $R'' = R \cap R'$ ก็เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วย D ดังนั้น

$$\iint_R F = \iint_{R''} F = \iint_{R''} F' = \iint_{R'} F$$

ซึ่งก็คือ $\iint_D f$ บนทั้ง R และ R' สมมติว่า f ไม่ต่อเนื่องบน D ถ้าความไม่ต่อเนื่องบนเซต $E \subseteq D$ ที่มีพื้นที่เป็นศูนย์แล้ว F ย่อมไม่ต่อเนื่องบน E และบน bdy(D) ซึ่งทั้งสองเซตมีพื้นที่เป็นศูนย์ จึงได้ $\iint_R F$ มีค่าและเท่ากับ $\iint_D F$

ทฤษฎีบท 2.3 *ให้ D เป็น Jordan – measurable set ที่มีขอบเขตและให้ f มีขอบเขตบน D และต่อเนื่องยกเว้นที่เซต E ซึ่งมีพื้นที่เป็นศูนย์ แล้ว $\iint_D f$ มีค่าเช่นกำหนดได้โดย (2–1) และ (2–2)*

สิ่งใดจะกล่าวเกี่ยวกับอินทิกรัลสองชั้นเป็นจริง สำหรับอินทิกรัล n ชั้นทั่ว ๆ ไป เพราะว่าสิ่งสำคัญในกรณีพิเศษ เมื่อ $n = 1$ ก็สามารถกล่าวได้เช่นเดียวกันว่าตาตาราง ในที่นี้ก็เป็นเพียงจุดแบ่งเส้นตรงมีจำนวนจำกัด ถ้าจะกล่าวถึงตาตาราง N บนช่วงปิด $I = [a, b]$ ก็คือจุดที่แบ่งช่วง I ออกเป็นช่วงปิดย่อย ๆ $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ สูตรผลบวกของรีมานน์ก็คือ

$$S(N,f,\{p_k\}) = \Sigma f(p_k)\triangle x_k$$

เมื่อ $p_k \in I_k$ และ $\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$ คือความยาวของช่วง I_0 จำนวน $d(N)$ คือความยาวของ $\triangle x_k$ ที่ยาวที่สุด

นิยาม 2.3 *อินทิกรัล* $\int_I f$ *ของ f บนช่วง I มีค่าและมีค่า v ต่อเมื่อ*

$$\lim_{d(N)\to 0} S(N,f,\{p_k\}) = v$$

แทนที่จะเขียน $\int_I f$ โดยปกติเขียนว่า $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b f(x)dx$ เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.3 ก็อาจเขียนทฤษฎีบท 2.3′ ในทำนองเดียวกันได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3′ *ถ้า f มีขอบเขตบน* $[a,b]$ *และถ้า f ต่อเนื่องบน* $[a,b]$ *ยกเว้นบนเซตซึ่งมีความยาวเป็นศูนย์แล้ว* $\int_a^b f$ *มีค่า*

เซตบนเส้นจำนวนและมีความยาวเป็นศูนย์ ถ้าสามารถปกคลุมได้ด้วยช่วงที่มีความยาวน้อยมากเช่นเซตจำกัดของจุดมีความยาวเป็นศูนย์ ด้วยทฤษฎีบท 2.3′ ดังกล่าวแล้วจึงทำให้ทราบว่า

$$\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

มีค่าเนื่องจากช่วงในการอินทิเกรตมีขอบเขตและฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดยกเว้นที่จุดเดียวคือ $x = 0$ ซึ่งมีความยาวเป็นศูนย์

คุณสมบัติที่คุ้นเคยกันสำหรับอินทิกรัลจำกัดเขตก็คือทฤษฎีบทต่อไปซึ่งกล่าวไว้สำหรับอินทิกรัลสองชั้น เซต D, D_1 และ D_2 สมมติว่าเป็นเซตที่มีพื้นที่

ทฤษฎีบท 2.4 *ให้* f *และ* g *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* D *แล้ว*

1) $\iint_D (f+g)$ *มีค่าและเท่ากับ* $\iint_D f + \iint_D g$

2) *สำหรับจำนวนคงที่* C, $\iint_D Cf = C\iint_D f$

3) *ถ้า* $f(p) \geqslant 0$ *สำหรับทุก* $p \in D$, $\iint_D f \geqslant 0$

4) $\iint_D |f|$ มีค่าและ $\left|\iint_D f\right| \leqslant \iint_D |f|$

5) *ถ้า* $D = D_1 \cup D_2$ *และ* $A(D_1 \cap D_2) = 0$ *แล้ว*

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

พิสูจน์ ส่วนใหญ่ของทฤษฎีบทนี้คำนวณได้โดยตรงด้วยผลบวกของรีมานน์ ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้า R ประกอบด้วย D คือ $D \subseteq R$ และกำหนดให้ f และ g มีค่าเป็น 0 สำหรับจุดที่ไม่ได้อยู่ใน D แล้วความสัมพันธ์

$$\Sigma\left[f(p_{ij}) + g(p_{ij})\right]A(R_{ij}) = \Sigma f(p_{ij})A(R_{ij}) + \Sigma g(p_{ij})A(R_{ij})$$

$$\Sigma Cf(p_{ij})A(R_{ij}) = C\Sigma f(p_{ij})A(R_{ij})$$

ซึ่งนำไปสู่ 1) และ 2) สำหรับ 3) สังเกตว่าถ้า $f(p) \geqslant 0$ สำหรับทุก $p \in D$ แล้ว $S(N, f, \{p_{ij}\}) \geqslant 0$ จาก 3) นำไปสู่ 4) เนื่องจาก $|f| + f$ และ $|f| - f$ ไม่ใช่ศูนย์บน D และต่อเนื่องบน D จึงได้

$$\iint_D |f| + \iint_D f \geqslant 0$$

และ

$$\iint_D |f| - \iint_D f \geqslant 0$$

ดังนั้น $\iint_D |f| \geqslant -\iint_D f$

และ $\iint_D |f| \geqslant \iint_D f$

นั่นคือ $\left|\iint_D f\right| \leqslant \iint_D |f|$

พิสูจน์ 5) กำหนดฟังก์ชันพิเศษ F โดย

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{เมื่อ } p \in D_1 \\ 0 & \text{เมื่อ } p \notin D_1 \end{cases} \text{ แล้ว}$$

$$\begin{aligned}\iint_D f &= \iint_D F + \iint_D (f-F) \\ &= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} (f-F) \\ &= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_2} F \\ &= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f \; \square\end{aligned}$$

ด้วยฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว คุณสมบัติข้อสุดท้ายของทฤษฎีบท 2.4 เมื่อ $a \leqslant b$, $\int_a^b f$ อาจเขียนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{[a,b]} f$ เมื่อ $a > b$ เราได้ $\int_a^b f$ หมายความว่า $-\int_{[b,a]} f$

ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง I และ a, b, c เป็นจุดใด ๆ บน I แล้วก็จะได้ว่า

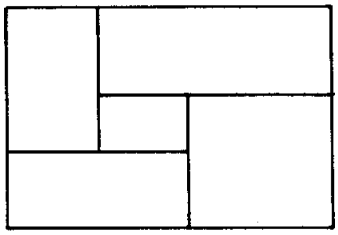
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

ด้วยวิธีการนี้รีมานน์อินทิกรัลสำหรับตัวแปรตัวเดียวต่างไปจากอินทิกรัลสองชั้นหรือสามชั้น อินทิกรัลชั้นเดียวซึ่งมีทิศทางของการอินทิกรัล (มี oriented) เช่นใน $\int_a^b f$ ก็จะกล่าวว่าอินทิเกรต f จาก a ถึง b ในนิยามของ $\iint_R f$ ไม่มีสัญลักษณ์ในทิศทางของ R อาจจะจำเป็นต้องรวมสัญลักษณ์เหล่านี้เข้าไปภายหลังสำหรับอินทิกรัลหลายชั้นซึ่งจะเป็นพิกัดใน n–ปริภูมิ

แบบฝึกหัด 2.1

หากไม่กำหนดเป็นอย่างอื่นเซต D มีพื้นที่เป็นบวกและมีขอบเขต

1. a) ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า 3×5 ถูกแบ่งดังแสดงในรูป 2.3 ซึ่งจุดแบ่งเป็นจุดใด ๆ จงแสดงว่าผลบวกของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย ๆ เป็น 15 เสมอ



รูป 2.3

b) สามารถจะพิสูจน์ได้อย่างไรว่าความจริงดังกล่าว สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ และการแบ่งใด ๆ

2. จงแสดงจากนิยาม 2.1 ว่าสำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ใด ๆ

a) $\iint_R f = 0$ ถ้า $f \equiv 0$ บน R

b) $\iint_R = A(R)$ ถ้า $f = 1$ บน R (ใช้ข้อ 1)

3. ถ้า f ต่อเนื่องบน D และ $m \leqslant f(p) \leqslant M$ สำหรับทุก $p \in D$ จงแสดงว่า
$mA(D) \leqslant \iint_D f \leqslant MA(D)$

4. ถ้า f มีค่าบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R และ $\iint_R f$ มีค่าแล้ว f จำเป็นต้องมีขอบเขตบน Rด้วย

5. (ทฤษฎีบทค่าตัวกลาง) ให้ D เป็นเซตปกคลุมแน่นและไม่ขาดตอน ให้ f และ g ต่อเนื่องและมีขอบเขตบน D ซึ่ง $g(p) \geqslant 0$ สำหรับทุก $p \in D$ แล้วย่อมมีจุด $\overline{p} \in D$ ซึ่ง
$\iint_D fg = f(\overline{p}) \iint_D g$

6. ถ้า D เป็นเซตเปิดและถ้า f ต่อเนื่องมีขอบเขตและ $f(p) \geqslant 0$ สำหรับทุก $p \in D$ แล้ว ถ้า $\iint_D f = 0$ แล้ว $f(p) = 0$ สำหรับทุก $p \in D$

7. จงให้นิยามสำหรับ $\iiint_D f$ เมื่อ D มีขอบเขตใน 3–ปริภูมิ

8. ถ้า f มีขอบเขตและเพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียวบน [a,b] จงแสดงว่า $\int_a^b$ มีค่าแม้ว่า f จะไม่ต่อเนื่อง

9. ถ้า $D_1 \subseteq D_2$ แล้ว $A(D_1) \leqslant A(D_2)$

10. จงแสดงว่าเซตจำกัดมีพื้นที่เป็นศูนย์

11. ให้ D เป็นเซตของทุกจุด $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวก D มีพื้นที่หรือไม่

12. จงอธิบายว่าทำไมพื้นที่ของ Jordan–measurable region D กำหนดได้โดย $A(D) = \iint_D 1$ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3

13. ให้ $f \in C^2$, $f(x) \geqslant 0$ และ $f''(x) \leqslant 0$ สำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{2}(b-a)\,(f(a)+f(b)) \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

14. ให้ $f(x)$ ต่อเนื่องสำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$ จงแสดงว่ากราฟของ f มีพื้นที่เป็นศูนย์

15. ให้ $f(t)$ ต่อเนื่องสำหรับ $0 \leqslant t \leqslant 1$ ให้ $g(t)$ ต่อเนื่องสำหรับ $0 \leqslant t \leqslant 1$ ด้วย $|g'(t)| \leqslant B$ จงแสดงว่าเซตของจุด (x,y) ซึ่ง $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ มีพื้นที่เป็นศูนย์

16. ให้ f ต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบน $[a,b]$ ให้ D เป็นเซตของจุด (x,y) ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b$ และ $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ จงแสดงว่า D มีพื้นที่และ $A(D) = \int_a^b f$

17. C เป็นเซตย่อยของ R ที่แบ่ง R ออกเป็น $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_m$ เป็นจำนวนจำกัดของ D_j แต่ละรูปมีพื้นที่เมื่อรวมกันแล้วปกคลุม R และคู่ D_i และ D_j ใด ๆ ไม่มีจุดข้างในร่วมกันค่าประจำ (norm) $d(C)$ เป็นเส้นทะแยงมุมที่ยาวที่สุดของบรรดา D_j ให้ f ต่อเนื่องบน R จงแสดงว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งเมื่อ C เป็นเซตย่อยของ เซตย่อยของ R ดังกล่าว และ $S(C,f,\{p_j\}) = \Sigma f(p_j)A(D_j)$ เมื่อ $p_j \in D_j$ แล้ว

$$\left|\iint_R f - S(C,f,\{p_j\})\right| < \varepsilon \text{ เมื่อ } d(C) < \delta$$

2.3 การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต

Evalution of definite integral

สัญลักษณ์หลายอย่างที่ใช้ และใช้ $\int_a^b f$ และ $\iint_D f$ น้อยกว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ และ $\iint_D f(x, y)\,dxdy$ เมื่อใช้สัญลักษณ์ประเภทที่ 2 จะต้องคำนึงถึงปรากฏการณ์ของ "x" ใน $\int_a^b f(x)dx$ หรือ x และ y ใน $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ ซึ่งเป็นตัวเลขที่ละเว้นเสียได้ และมีค่าเท่ากับเขียนว่า $\int_a^b f(u)du$ หรือ $\int_a^b f(t)dt$ หรือ $\iint_D f(u,v)\,du\,dv$ หรือ $\iint_D f(s, t)\,ds\,dt$ เช่นเดียวกับ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$ ดังนั้นจึงเลือกใช้ $\int_a^b f$ หรือ $\iint_D f$ ก็มีความหมายเช่นเดียวกัน แต่บางครั้งก็จำเป็นที่จะต้องใช้สัญลักษณ์เช่น $\int_a^b (x^3 - 4x^2 - 1)dx$ ถึงแม้จะเปลี่ยนเป็นตัวแปรอื่น ๆ ก็ต้องคำนวณได้เท่ากัน เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว และประสงค์จะชี้ผลของการอินทิเกรตมุ่งกระทำกับตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งเช่น $\int_a^b f(x,y)\,dy$ ก็ย่อมจะละการเขียน f (x, y) และ dy เสียไม่ได้ เป็นเรื่องสำคัญเช่นเดียวกันว่าในทั้งหมดนี้ตัวอักษร d ชี้ว่าจะอินทิเกรตสำหรับตัวแปรใด ซึ่งอาจเขียนแทน $\int_a^b f(x, y)\,dy$ ด้วย $\int_a^b f(x, y) \boxed{y}$ หรือ $\boxed{y} \int_a^b f(x, y)$ เมื่อ y อยู่ในสี่เหลี่ยมจัตุรัสแสดงให้ทราบว่าจะทำการอินทิเกรต f (x, y) เช่นเดียวกับฟังก์ชันของตัวแปรที่สองเพียงตัวเดียว ในภาษาของตรรกศาสตร์ x เป็นตัวอิสระขณะที่ y ถูกจำกัดขอบเขตและ $\boxed{y}$ เป็นตัวบอกปริมาณ มีเหตุผลที่คุ้นเคยกัน ในการเลือก dy แทนที่จะเป็น $\boxed{y}$ ซึ่งจะได้กล่าวถึง ในกฎของการเปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรต

ถ้าทราบแล้วว่า $\iint_D f$ มีค่า แล้วค่ามักจะต้องคำนวณโดยใช้การแบ่ง D ถ้า $N_1, N_2, N_3, \ldots$ เป็นลำดับของตาตารางซึ่ง $\lim_{k\to\infty} d(N_k) = 0$ แล้วลำดับของผลบวกของรีมานน์มุ่งเข้าสู่ของอินทิกรัล คำนวณค่าของ $\iint_R xy^2\,dx\,dy$, เมื่อ R คือสี่เหลี่ยมจัตุรัส $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ ให้ N_k เป็นตาตารางที่แบ่ง R ออกเป็น k^2 จัตุรัสย่อย ๆ ที่เท่ากัน แต่ละด้านของจัตุรัสเป็น $\frac{1}{k}$ เลือกจุด p_{ij} ใน R_{ij} เป็น $\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}\right)$ เราได้

$$\bar{S}(N_k) = \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} \frac{i}{k}\left(\frac{j}{k}\right)^2 \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^5} \sum_{i=1}^{k} i \sum_{j=1}^{k} j^2$$

เนื่องจาก $\sum_{1}^{k} i \quad \frac{k(k+1)}{2}$ และ $\sum_{k}^{1} j^2 = \frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}$

ดังนั้น $\bar{S}(N_k) = \frac{1}{k^5}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)\frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{12k} + \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{12k^3}$$

และ $\iint_R xy^2 dxdy = \lim_{k\to\infty} \bar{S}(N_k) = \frac{1}{6}$

ตัวอย่างต่อไปจงคำนวณ $\int_1^2 \sqrt{x}\ dx$ จากนิยาม ถ้าจะแบ่งช่วงเท่า ๆ กันและใช้ผลบวกของรีมานน์

$$\bar{S}(N_n) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1+\frac{j}{n}}\ \frac{1}{n} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{j+n}$$

อย่างไรก็ดี ก็ยังไม่ง่ายในการคำนวณ $\lim_{n\to\infty} \bar{S}(N_n)$ จะใช้การแบ่งด้วยวิธีอื่นที่ต่างออกไป โดยให้

$$r = 2^{\frac{1}{n}} > 1$$

และให้ N_n เป็นตาตารางที่แบ่งช่อง $[1, 2]$ ที่จุด

$$1 = r^0 < r^1 < r^2 < \ldots < r^{n-1} < r^n = 2$$

ช่องที่ยาวที่สุดโดยการแบ่งด้วยวิธีนี้ก็คือ

$$d(N_n) = 2 - r^{n-1}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} (N_n) = 0$ และ

$$S(N_n) = \sqrt{r(r-1)} + \sqrt{r^2(r^2 - r)} + \sqrt{r^3(r^3 - r^2)}$$
$$+ \ldots + \sqrt{r^n(r^n - r^{n-1})}$$
$$= \sqrt{r(r-1)}\,(1 + r\sqrt{r} + [r\sqrt{r}]^2 + [r\sqrt{r}]^3$$
$$+ \ldots + [r\sqrt{r}]^{n-1})$$
$$= \sqrt{r(r-1)}\,\frac{r^{\frac{3n}{2}} - 1}{r^{\frac{3}{2}} - 1}$$
$$= \sqrt{r(r-1)}\,\frac{(r^n)^{\frac{3}{2}} - 1}{r^{\frac{3}{2}} - 1}$$
$$= \sqrt{r(r-1)}\,\frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{r^{\frac{3}{2}} - 1}$$
$$= (2\sqrt{2} - 1)\sqrt{r}\,\frac{r - 1}{r^{\frac{3}{2}} - 1}$$
$$= \frac{(2\sqrt{2} - 1)\sqrt{r}(r^{\frac{1}{2}} - 1)\,(r^{\frac{1}{2}} + 1)}{(r^{\frac{1}{2}} - 1)\,(r + r^{\frac{1}{2}} + 1)}$$
$$= \frac{(2\sqrt{2} - 1)\,\sqrt{r}(r^{\frac{1}{2}} + 1)}{r + r^{\frac{1}{2}} + 1}$$

ดังนั้น $$\int_2^1 \sqrt{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \bar{S}(N_n)$$
$$= \lim_{r\to 1} \frac{(2\sqrt{2} - 1)\sqrt{r}(r^{\frac{1}{2}} + 1)}{r + r^{a} + 1}$$
$$= \frac{(2\sqrt{2} - 1)(1)(2)}{1 + 1 + 1}$$
$$= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$$

สำหรับการหาค่าอินทิกรัลโดยตรงเช่นนี้ เป็นเพียงขบวนการที่ชี้ให้เห็นว่าสามารถจะหาค่าได้ ซึ่งก็เป็นเพียงตัวอย่างที่เอื้ออำนวยให้กระทำการคำนวณโดยตรงได้โดยง่ายเท่านั้น ต่อไปนี้จะพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานสำหรับแคลคูลัสเชิงอินทิกรัล ซึ่งจะปรับขบวนการคำนวณค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียวโดยการใช้ปฏิยานุพันธ์

นิยาม 2.4 *ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ (หรือปฐมฐาน primitive) หรือ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ f บนช่วง I ถ้า* $F'(x) = f(x)$ *สำหรับทุก* $x \in I$

ทฤษฎีบท 2.5 *ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง* $I = [a, b]$ *แล้ว f มีปฏิยานุพันธ์บน I*

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชัน F_0 บนช่วง I โดย

$$F_0(x) = \int_a^x f \text{ สำหรับ } a \leqslant x \leqslant b$$

ถ้า x และ x + h อยู่บนช่วง I แล้ว

$$F_0(x + h) - F_0(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f$$

$$= \int_x^{x+h} f$$

$$= f(\bar{x})\, h$$

เมื่อเราใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางสำหรับอินทิกรัล (ข้อ 5 แบบฝึกหัด 2.1)

เพราะฉะนั้น

$$\frac{F_0(x + h) - F_0(x)}{h} = f(\bar{x})$$

และ $\bar{x}$ อยู่ระหว่าง x และ x + h เมื่อให้ h เข้าใกล้ 0, $\bar{x}$ ย่อมมีค่าเข้าใกล้ x และเนื่องจาก f ต่อเนื่องบน I จึงได้

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_0(x + h) - F_0(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\bar{x})$$

ดังนั้น $F_0'(x) = f(x)$

นั่นคือ F_0 เป็นปฏิยานุพันธ์อันหนึ่งของ f □

ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องบางฟังก์ชันมีปฏิยานุพันธ์ บางฟังก์ชันไม่มี เมื่อฟังก์ชันที่ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องก็ตามที่มีปฏิยานุพันธ์ ย่อมมีปฏิยานุพันธ์มากมายหลายฟังก์ชัน (infinite number) แต่ฟังก์ชันเหล่านั้นก็ต่างกันเพียงค่าคงที่เท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.6 *ถ้า F_1 และ F_2 ต่างเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เดียวกันบนช่วง I แล้ว $F_1 - F_2$ เป็นจำนวนคงที่บน I*

พิสูจน์ ให้ $F_1 - F_2 = g$

และ $(F_1 - F_2)' = g' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ บน I

เพราะฉะนั้น g คงที่ บน I

นั่นคือ $F_1 - F_2$ คงที่ บน I

ทฤษฎีบท 2.7 *ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ f แล้ว*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

พิสูจน์ ให้ F_0 เป็นปฏิยานุพันธ์พิเศษดังที่สร้างขึ้นในทฤษฎีบท 2.5 โดยทฤษฎีบท 2.6 จึงได้ว่า

$$F = F_0 + C$$

กลับไปพิจารณา F_0 อีกครั้งจึงได้ว่า $F_0(a) = 0$

ดังนั้น $C = F(a)$ และ

$$\int_a^b f = F_0(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

สิ่งที่ติดตามต่อจากนี้ก็คือขบวนการเปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรต □

ทฤษฎีบท 2.8 *ให้ ϕ' มีค่าและต่อเนื่องบนช่วง $[\alpha,\beta]$ ด้วย $\phi(\alpha) = a$ และ $\phi(\beta) = b$ ให้ f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $\phi(u)$ สำหรับ $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ แล้ว*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\,\phi'(u)du$$

จากโจทย์อาจกล่าวเสียใหม่โดยสร้างเงื่อนไข $x = \phi(u)$ ในอินทิกรัล $\int_a^b f(x)\,dx$ แทน $f(x)$ ด้วย $f(\phi(u))$ แทน dx ด้วย $\phi'(u)du$ และแทนค่าลิมิตของอินทิกรัล a และ b ด้วยค่าของ u ที่สมนัยกัน ซึ่งดูเหมือนว่าน่าจะถูกต้อง ถ้า $x = \phi(u)$ แล้ว

$$dx = \frac{dx}{du}\,du = \phi'(u)du$$

แต่อย่างไรก็ดีก็เป็นการนำมาสู่ข้อผิดพลาดในเรื่องของสัญลักษณ์โดยใช้สัญลักษณ์สี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\int_a^b f(x)\boxed{x} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u))\,\phi'(u)\boxed{u}$$

และกฎกำหนดให้แทนที่ $\boxed{x}$ ด้วย $\phi'(u)\boxed{u}$ ในทางวิเคราะห์กฎการหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dx}$ ไม่ได้พิสูจน์โดยการตัดสองเทอม ds ออกทั้งเศษและส่วน ความจริงแต่ละตัวไม่ใช่เศษส่วนที่จะนำมาตัดกันได้ เป็นเพียงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรต ซึ่งจะเป็นสิ่งที่ควรระมัดระวังและใช้ให้ถูกต้องต่อไป

พิสูจน์ ให้ $F' = f$ และกำหนด G บนช่วง $[cc, \beta]$ โดยให้

$$G(u) = F(\phi(u)) \text{ แล้ว}$$

$$\begin{aligned} G'(u) &= F'(\phi(u))\,\phi'(u) \\ &= f(\phi(u))\,\phi'(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \int_a^{\beta} f(\phi(u))\,\phi'(u)du &= \int_a^{\beta} G'(u)du \\ &= G(\beta) - G(\alpha) \\ &= F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

สำหรับค่าคงที่ a และ b อาจมีเลขที่สามารถเลือก α และ β ซึ่งอาจจะเลือกใช้จากฟังก์ชันต่อไปนี้ ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนช่อง $[\alpha, \beta]$ เช่นให้ $x = u^2 = \phi(u)$ จึงได้

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(u^2)2udu = \int_{-1}^{2} f(u^2)2udu = \int_1^{-2} f(u^2)2udu$$

สิ่งเหล่านี้ก็เป็นสิ่งที่ควรระวังเหมือนกันซึ่งอาจเลือกให้เหมาะสมกับฟังก์ชัน f เช่น $f(x) = x$ หรือ $f(x) = \sqrt{x}$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่พึงศึกษาโดยระมัดระวัง ตัวอย่างแรกเป็นการใช้ทฤษฎีบท 2.7 ที่ผิดและตัวอย่างที่สองเป็นการใช้ทฤษฎีบท 2.8 ที่ผิด

1) จงคำนวณ $\int_{-2}^{2} x^{-2}dx$

สังเกตว่าปฏิยานุพันธ์ของ x^{-2} คือ $-x^{-1}$ ดังนั้น

$$\int_{-2}^{2} x^{-2}dx = -x^{-1}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

2) ให้ $C = \int_{-1}^{1}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2dx$ เนื่องจาก ค่า $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$ มีขอบเขตและต่อเนื่องบน $[-1, 1]$ ยกเว้นที่ $x = 0$ ดังนั้นอินทิกรัลมีค่า เนื่องจากค่า $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$ ไม่ใช่จำนวนลบ, $C > 0$ ให้ $u = \frac{1}{x}$ ดังนั้น $f(x)$ กลายเป็น $(\sin u)^2dx = -u^{-2}du$ เมื่อ $x = 1$, $u = 1$ และ

$$C = \int_{-1}^{1}(\sin u)^2(-u^{-2})\,du$$

$$= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du$$

ค่า $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ ต่อเนื่องบน $[-1, 1]$ ยกเว้นที่ $u = 0$ ดังนั้นอินทิกรัลใหม่มีค่า แต่เป็นค่าลบเพราะเหตุใด

[ในแต่ละตัวอย่างจะต้องทำความเข้าใจเสียก่อนว่ามีพื้นฐานของข้อผิดพลาดอย่างไรเสียก่อนที่จะอ่านต่อไป]

ต่อไปจะได้ศึกษาการหาค่าอินทิกรัลหลายชั้น สิ่งแรกที่จะต้องเข้าใจข้อแตกต่างระหว่างอินทิกรัลหลายชั้นและอินทิเกรตซ้ำ (iterated integral) ตัวอย่างเช่น

$$\int_0^3 dx \int_1^{x^2} dy \int_{x-y}^{3y} (4x+yz)dz$$

ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้แคลคูลัสเบื้องต้น โดยเริ่มจากภายในของอินทิกรัล และใช้ปฏิยานุพันธ์และทฤษฎีบท 2.7 ดังนั้นขั้นแรกก็เขียนได้เป็น

$$\int_{x-y}^{3y} (4x+yz)\,dz = 4xz + \frac{yz^2}{2}\Big|_{x-y}^{3y}$$

$$= 12xy + \frac{9}{2}y^3 - 4x(x-y) - \frac{1}{2}y(x-y)^2$$

ฟังก์ชันนี้ก็เป็นฟังก์ชันที่จะทำการอินทิเกรตต่อไปโดยมุ่งต่อ y และต่อ ๆ ไป

การคำนวณมาตรฐานกระทำสำหรับอินทิเกรตหลายชั้นโดยแทนอินทิเกรตหลายชั้นด้วยอินทิกรัลซ้ำอันใดอันหนึ่ง

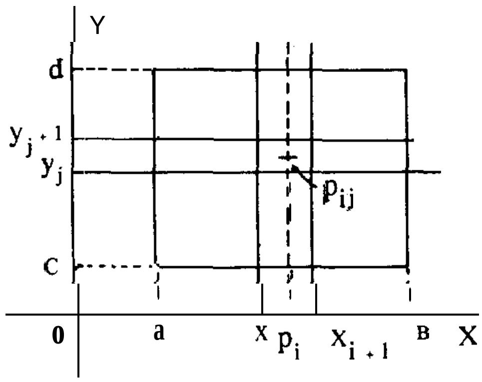
ทฤษฎีบท 2.9 *ให้* R *เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจุด* (x, y) *ซึ่ง* $a \leqslant x \leqslant b$ *และ* $c \leqslant y \leqslant d$ *และให้* f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* R *แล้ว*

$$\iint_R f = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

พิสูจน์ เมื่อให้ x คงที่ $f(x, y)$ ต่อเนื่องสำหรับ y ดังนั้นให้

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

เมื่อทฤษฎีบทกำหนดให้ $\int_a^b f$ มีค่าและ $\iint_R f$ มีค่าด้วย อาจพิสูจน์ได้โดยแสดงว่าในแต่ละผลบวกของรีมานน์ ในหนึ่งมิติใด ๆ ที่คำนวณสำหรับแต่ละส่วนของช่วงใด $[a, b]$ และฟังก์ชัน F มีค่าเดียวกันกับผลบวกของรีมานน์ในสองมิติสำหรับ R และ f



รูปที่ 2.4

ให้ N เป็นตาตารางซึ่งแบ่ง $[a, b]$ ที่จุด

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

และเลือกจุด p_i ใดๆ ในช่วง $[x_i, x_{i+1}]$ ผลบวกสำหรับการแบ่งนี้เป็น

$$S(N, F, \{p_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1} F(p_i)\triangle x_i$$

ให้ $d(N) = \delta$ และเลือกจุดแบ่งใดๆ สำหรับช่วง $[c, d]$ โดยให้

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$$

โดยให้ $\triangle y_j = y_{j+1} - y_j \leqslant \delta$ สำหรับแต่ละ j (ดูรูป 2.4) แล้วดังนั้นสำหรับ x ใดๆ

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy = \int_{y_0}^{y_m} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy + \int_{y_2}^{y_3} f(x)\, dy$$

$$+ \ldots + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(x, y)\, dy$$

แต่ละพจน์ข้างบนโดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางสำหรับอินทิกรัลจุด $\overline{y}_j$ สามารถจะเลือกได้ในช่วง $[y_j, y_{j+1}]$ ดังนั้น

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)dy = f(x,\overline{y})[y_{j+1} - y_j]$$

$$= f(x,\overline{y})\triangle y_j$$

โดยทั่ว ๆ ไปในการเลือก $\overline{y}_j$ ขึ้นอยู่กับค่าของ x ดังนั้นจึงให้ $\overline{y}_j = Y_j(x)$ และบวกสำหรับ $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ จึงได้

$$F(x) = f(x,Y_0(x))\triangle y_0 + (x,Y_1(x))\triangle y_1$$

$$+ f(x,Y_2(x))\triangle y_2 + \ldots + f(x,Y_{m-1}(x)\triangle y_{m-1}$$

เมื่อ x ถูกเลือกที่จุดจำเพาะที่ p_i จุด $(x, Y_j(x))$ ก็กลายเป็น
จุด $p_{ij} = (p_i,Y_j(p_i))$ ใน R และ

$$F(p_i) = \sum_{j=0}^{m-1} f(p_{ij})\triangle y_j$$

กลับมาที่จุดเริ่มต้นที่ผลบวกของรีมานน์หนึ่งมิติสำหรับ F

$$S(N,F,\{p_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} f(p_{ij})\triangle y_j\right\}\triangle x_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(p_{ij})\triangle x_j\triangle y_i$$

สำหรับเส้นดิ่ง $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ และเส้นระดับ $y = y_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ กำหนดตาตาราง N^* ซึ่งแบ่ง R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ซึ่ง $p_{ij} \in R_{ij}$, R_{ij} และ $A(R_{ij}) = \triangle x_i\triangle y_i$ ยิ่งกว่านั้นเนื่องจาก $\triangle x_i \leq \delta$ และ $\triangle y_j \leq \delta$, $d(N^*) < 2\delta = 2d(N)$ เพราะฉะนั้นได้แสดงแล้วว่าการสมนัยสำหรับตาตาราง N ซึ่งแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ สามารถหาตาตาราง N^* ซึ่งแบ่ง R ซึ่ง

$$S(N,F,\{p_i\}) = S(N^*,f,\{p_{ij}\})$$

เนื่องจาก $\iint_R f$ มีค่าสำหรับผลบวกของรีมานน์ในสองมิติ

และ $\int_a^b F$ มีค่าและเท่ากับ $\iint_R f$ □

หมายเหตุ ในการพิสูจน์ได้พิสูจน์ถึงความมีค่าของ $\int_a^b F$ ซึ่งไม่ได้พิสูจน์ว่า F ต่อเนื่อง (ดูแบบฝึกหัดข้อ 18) อย่างไรก็ดีถ้า f ไม่ต่อเนื่องใน R แล้ว F อาจไม่ต่อเนื่อง ความจริงถ้า f มีขอบเขตและต่อเนื่องบน R ยกเว้นที่จุดบนเซต E ที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ ก็อาจปรากฏว่าสำหรับแต่ละค่าของ $\int_c^d f(x,y)\,dy$ หาค่าไม่ได้ และเซตของ x สำหรับที่ที่เป็นจริงอาจล้มเหลวในการคำนวณให้เซตนั้นไม่มีความยาว

ต่อไปนี้จะขจัดปัญหาดังกล่าวข้างบน

ทฤษฎีบท 2.10 *ให้* f *มีขอบเขตในสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด* R *และต่อเนื่องยกเว้นบนเซต* E *ซึ่งมีพื้นที่เป็นศูนย์ สมมติว่ามีค่า* k *ซึ่งเส้นดิ่งพบ* E *มากกว่า* k *จุด แล้ว*

$$\iint_R f = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้เพียงแต่ปรับปรุงการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.9 และเช่นเดียวกัน พิจารณาฟังก์ชัน F ที่มีค่าบน $[a,b]$ โดย

$$F(x) = \int_d^c f(x,y)dy$$

เนื่องจาก $f(x,y)$ ต่อเนื่องสำหรับ y ในช่วง $[c,d]$ ยกเว้นอย่างมาก k จุด และเนื่องจาก f มีขอบเขต อินทิกรัลนี้มีค่าและ F มีค่า โดยใช้ผลบวกของรีมานน์สำหรับหนึ่งมิติทั่ว ๆ ไป

$$S(N,F,\{p_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1} F(p_i)\Delta x_i$$ และเลือกจุดตัด y_j บน $[c,d]$

สิ่งเหล่านี้กำหนดตาตาราง N^* ซึ่งแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ให้ R_0 เป็นเซตผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบด้วยจุดใน E และ R_1 เป็นเซตผลรวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหลือจึงได้

$$F(p_i) = \int_{y_0}^{y_m} f(p_i, y)dy = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(p_i, y)dy$$

เนื่องจาก $f(p_i, y)$ ต่อเนื่องเนื่องจากเป็นฟังก์ชันของ y ยกเว้นที่อย่างมาก k จุด ใน $[y_j, y_{j+1}]$ จึงแบ่งช่วงนี้ออกไปอีกที่ k จุดเหล่านั้น โดยใช้ทฤษฎีบทค่ากลางดังทฤษฎีบท 2.9 และแทนพจน์เหล่านี้ด้วย $f(p_{ij})\triangle y_j$ สำหรับพจน์ที่เหลือ k พจน์มีขอบเขตในรูป $B\triangle y_j$ เมื่อ B เป็นขอบเขตข้างบนสำหรับ $|f|$ ใน R ค่าโดยประมาณของ $F(p_i)\triangle x_i$ จึงได้

(2–3) $$\left| S(N, F, \{p_i\}) - \sum_{R_{ij} \in R_1} f(p_{ij})A(R_{ij}) \right| \leqslant B \sum_{R_{ij} \in R_0} A(R_{ij})$$

เนื่องจาก R_0 เป็นเซตที่ปกคลุม E และ E มีพื้นที่เป็นศูนย์ทางขวามือของ (2–3) มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้เมื่อ $d(N^*)$ มีค่าน้อยลง ผลบวกของรีมานน์ $S(N, F, \{p_i\})$ มีค่าลู่เข้าสู่อินทิกรัลของ F และผลบวก $\Sigma f(p_{ij})A(R_{ij})$ มีค่าลู่เข้าสู่อินทิกรัลของ f บน R นั่นคือได้แสดงแล้วว่า

$$\iint_R f = \int_a^b F(x)dx \quad \square$$

ในกรณีพิเศษที่เป็นมาตรฐานถ้าต้องการจะหาค่า $\iint_D f$ เมื่อ D เป็นเซตที่กำหนดโดย $a \leqslant x \leqslant b, \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$ เมื่อ ϕ และ ψ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน D และให้สี่เหลี่ยมผืนผ้า R ประกอบด้วย D ด้วย $(D \subseteq R)$ และให้ f มีค่าเป็นศูนย์สำหรับ $p \notin D$ เซต E ที่ f ไม่ต่อเนื่องก็คือกราฟของ ϕ และ ψ และ $A(E) = 0$ และเส้นดิ่งตัด E สองแห่งดังนั้น $k = 2$ จึงได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก *ถ้า* D *เป็นบริเวณ (region) ที่มีขอบเขตโดยเส้น* $x = a$, $x = b$ *และกราฟของ* ϕ *และ* ψ *ซึ่ง* $\phi(x) \leqslant \psi(x)$ *และถ้า* f *ต่อเนื่องบน* D *และ* ϕ *และ* ψ *ต่อเนื่องบน* $[a,b]$

(2–4) $$\iint_D f = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

ทางขวามือของ (2–4) เป็นอินทิกรัลซ้ำซึ่งส่วนมากจะคำนวณโดยใช้ปฏิยานุพันธ์ ตัวอย่างเช่นให้ D เป็นบริเวณระหว่างเส้น $y = x$ และพาราโบลา $y = x^2$ และให้ $f(x,y) = xy^2$ แล้ว

$$\iint_D f = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{xy^3}{3} \Big|_{x^2}^{x} \right.$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4-x^7}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}$$

เนื่องจากบริเวณ D เป็นบริเวณที่ขอบเขตถูกตัดด้วยเส้นระดับสองครั้ง $\iint_D f$ สามารถคำนวณโดยอินทิกรัลซ้ำสำหรับอีกตัวแปรได้คือ

$$\iint_D f = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{x^2y^2}{2}\right|_y^{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^3-y^4)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]\Big|_0^1$$

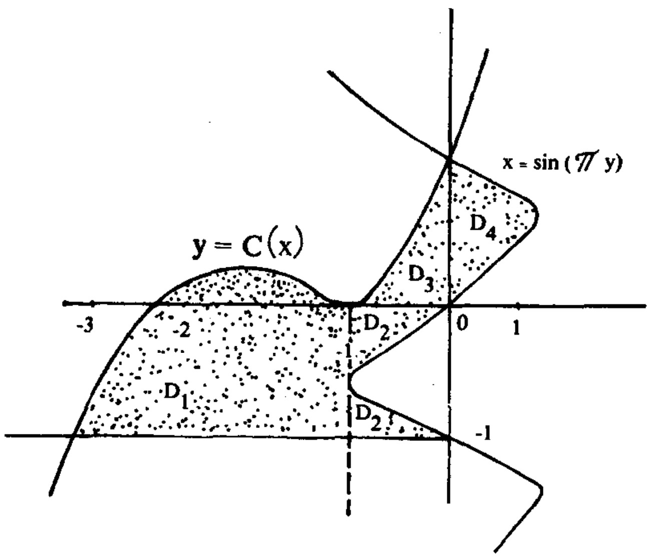
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{40}$$

ในกรณีเหล่านี้โดยปกติก็จะคำนวณค่าของอินทิกรัลสองชั้นอาจคำนวณได้ด้วยอินทิกรัลซ้ำสำหรับอันใดอันหนึ่งข้างต้น พิจารณาตัวอย่างที่บริเวณ D ล้อมด้วยเส้น $y = -1$ และเส้น

$$x = \sin(\pi y) \text{ และ } y = (x+1)^2\left(\frac{5}{12}x + 1\right) = C(x)$$

ดังรูป 2.5 การคำนวณ $\iint_D f$ อาจแบ่งออกเป็น 4 บริเวณย่อย ๆ



รูป 2.5

คือ $$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f + \iint_{D_4} f$$

เมื่อ $$\iint_{D_1} f = \int_{-3}^{+1} dx \int_{-1}^{C(x)} f(x, y)\, dy$$

$$\iint_{D_2} f = \int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{\sin(\pi y)} f(x, y)\,dx$$

$$\iint_{D_3} f = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{C(x)} f(x, y)\,dy$$

$$\iint_{D_4} f = \int_0^1 dy \int_0^{\sin(\pi y)} f(x, y)dy$$

สองอินทิกรัลสองชั้นสุดท้ายอาจรวมกันคำนวณครั้งเดียวได้เป็น

$$\iint_{D_3 \cup D_4} f = \int_0^1 dy \int_{\lambda(y)}^{\sin(\pi y)} f(x, y)dx$$

เมื่อ $x = \lambda(y)$ ซึ่งได้จากการแก้สมการ $y = C(x)$ ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ สามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างอินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลซ้ำ เพื่อพิสูจน์ความเท่ากันของอนุพันธ์ย่อยผสม ซึ่งปรากฏในหัวข้อ 1.3 ในกรณีของ f_{xy} และ f_{yz}

ทฤษฎีบท 2.11 *ให้* f *อยู่ใน* C^2 *ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า* R *ซึ่งจุดยอดเป็น*

$P_1 = (a_1,b_1)$, $Q_1 = (a_2,b_1)$, $P_2 = (a_2,b_2)$,

$Q_2 = (a_1,b_2)$ *เมื่อ* $a_1 \leqslant a_2$ *และ* $b_1 \leqslant b_2$ *แล้ว*

$$\iint_R f_{12} = \iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy$$

$$= f(P_1) - f(Q_1) + f(P_2) - f(Q_2)$$

พิสูจน์ เมื่อเขียนอินทิกรัลสองชั้นในรูปของอินทิกรัลซ้ำ จึงได้

$$\iint_R f_{12} = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy$$

$$= \int_{a_2}^{a_2} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{b_1}^{b_2} dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} f_1(x,b_2)\, dx - \int_{a_1}^{a_2} f_1(x,b_1)\, dx$$

$$= f(x,b_2)\Big|_{x=a_1}^{x=a_2} - f(x,b_1)\Big|_{x=a_1}^{x=a_2}$$

$$= f\,(a_2,b_2) - f\,(a_1,b_2) - f\,(a_2,b_1) + f\,(a_1,b_1)$$
$$= f\,(P_1) - f\,(Q_1) + f\,(P_2) - f(Q_2) \quad \square$$

บทแทรก *ถ้า f อยู่ใน C^2 เขตเปิด D และใน $f_{12} = f_{21}$ ใน D*

พิสูจน์ ใน R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าใด ๆ ที่อยู่ใน D $(R \subseteq D)$ โดยทฤษฎีบท 2.11 ได้ว่า $\iint_R f_{12}$ และ $\iint_R f_{21}$ ต่างมีค่าเท่ากับ $f(P_1) - f(Q_1) + f(P_2) - f(Q_2)$ เมื่อ P_1, Q_1, P_2, Q_2 เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ใด ๆ ลำดับตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น

$$\iint_R f_{12} - \iint_R f_{21} = \iint_R (f_{12} - f_{21})$$
$$= 0$$

สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ใด ๆ ใน D

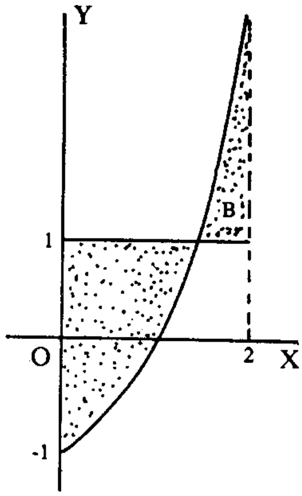
ดังนั้น $f_{21} - f_{21} = 0$ ใน D

นั่นคือ $f_{12} = f_{21}$ ใน D $\square$

แม้ว่าอินทิกรัลซ้ำมีรูปเช่น (2–4) ซึ่งปรากฏในกระบวนวิชาที่เกี่ยวกับการคำนวณค่าอินทิกรัลสองชั้น ซึ่งอาจปรากฏในหลาย ๆ ทาง (ตัวอย่างเช่นการประมาณค่าของความน่าจะเป็น) และบางครั้งไม่ปรากฏในรูปของอินทิกรัลหลายชั้น เช่น

(2–5) $$V = \int_0^2 dx \int_1^{x^2-1} f\,(x,y)\, dy$$

ก็มีรูปเดียวกับ (2–4) ซึ่งดูเหมือนว่าอินทิกรัลซ้ำเกิดขึ้นจากอินทิกรัลสองชั้นของ f บนบริเวณ D ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้น $y = 1, y = x^2 - 1, x = 0, x = 2$ พิจารณาจากรูป 2.6 จะพบว่าไม่ใช่อินทิกรัลสองชั้น เนื่องจากมีหลายบริเวณ ยิ่งกว่านั้นก็ยังสังเกตได้ว่าค่าลิมิตบนภายในอินทิกรัลไม่จำเป็นต้องมากกว่าค่าลิมิตล่างเสมอไปเช่นเดียวกับที่ได้แสดงไว้แล้วใน (2–4)



รูป 2.6

อินทิกรัลซ้ำไม่จำเป็นต้องสมนัยกับอินทิกรัลสองชั้น อย่างไรก็ดีก็สามารถเขียนได้ด้วยผลต่างของอินทิกรัลสองชั้นสองอัน จากความจริงที่ว่าสำหรับฟังก์ชันใด ๆ $\phi(x)$ และ $\psi(x)$ และ c ใด ๆ

$$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f dy = \int_{c}^{\psi(x)} f dy - \int_{c}^{\phi(x)} f\, dy$$

ถ้าจะพิจารณาเฉพาะอินทิกรัลที่มีค่าลิมิตเป็น $\phi(x)$, $\psi(x)$ ซึ่งไม่จริงเสมอไปที่ ϕ (x) จำจะต้องน้อยกว่า ψ (x) เลือก c ซึ่งน้อยกว่า $\phi(x)$ และ $\psi(x)$ ใด ๆ ก็สามารถยกอินทิกรัลออกเป็นผลต่างของสองอินทิกรัลดังกล่าวข้างต้น

โดยหลักการดังกล่าวข้างต้น พิจารณา (2–5) และดำเนินการดังต่อไปนี้ ให้ c = 1 ซึ่งเป็นค่าน้อยที่สุดของ $x^2 - 1$ เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant 2$ แล้วเขียนอินทิกรัลซ้ำเสียใหม่เป็น

$$V = \int_{0}^{2} dx \int_{1}^{x^2-1} f(x, y) dy$$

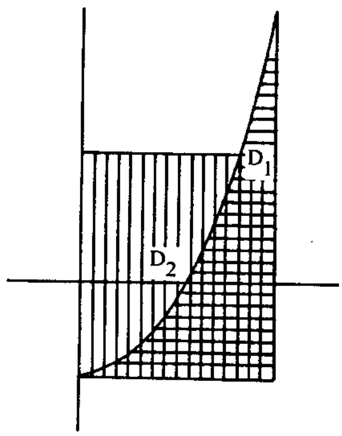
$$= \int_0^2 dx\left[\int_{-1}^{x^2-1} f(x, y)dy - \int_{-1}^{1} f(x, y)dy \right]$$

$$= \int_0^2 dx \int_{-1}^{x^2-1} f(x, y)dy - \int_0^2 dx\int_{-1}^{1} f(x, y)dy$$

แต่ละอินทิกรัลซ้ำทั้งสองอันข้างท้ายก็คืออันทิกรัลสองชั้น ก็เขียน (2–5) ได้เป็น

(2–6) $$V = \iint_{D_1} f - \iint_{D_2} f$$

เมื่อทั้งสองบริเวณ ดังรูป 2.7 เมื่อ D_1 มีขอบเขตข้างบนเป็น $y = x^2 - 1$ และ D_2 เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 2.7

วิธีที่สองสังเกตว่า D_1 และ D_2 มีเนื้อที่ซ้ำกันอยู่แต่ละส่วนของอินทิกรัลสองชั้นใน (2–6) คือค่าเดียวกันดังนั้นอาจละทิ้งที่จะทำซ้ำ ๆ เสียจึงได้

(2–7) $$V = \iint_B f - \iint_A f$$

เมื่อทั้งสองบริเวณ A และ B ดังรูป 2.6 นี่เป็นการทำความเข้าใจจุดเริ่มต้นของอินทิกรัลซ้ำซึ่งสามารถอ่านโดยสังเกตว่าเมื่อ x อยู่ระหว่าง 0 และ 1, y เคลื่อนที่จาก 1 ไปยัง $x^2 - 1$ ซึ่ง

เสนอแนะว่าอินทิกรัลในบริเวณ A มีค่าเป็นลบและบริเวณ B มีค่าเป็นบวก

ทำไมจึงต้องศึกษาการกระทำทวนกลับจากอินทิกรัลซ้ำเพื่อให้เชื่อมโยงกับอินทิกรัลสองชั้น พิจารณาต่อไปนี้

(2–8) $$V = \int_1^3 dx \int_x^2 e^{\frac{x}{y}} dy$$

ซึ่งไม่สามารถจะหาค่าในขั้นแรกได้เนื่องจากไม่สามารถหาพึงก์ชันซึ่งอนุพันธ์กระทำมุ่งต่อ y ได้เป็น $e^{\frac{x}{y}}$ (นี่เป็นเพียงพึงก์ชันหนึ่งในจำนวนมากมายนับไม่ถ้วนของพึงก์ชันง่าย ๆ ซึ่งอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไม่สามารถแสดงได้ในพึงก์ชันรูปที่คุ้นเคยกัน) แต่อย่างไรก็ดีก็สามารถอินทิเกรตมุ่งต่อ x ได้ถ้าเรากระทำ (2–8) กลับในรูปของหนึ่งหรือสองอินทิกรัลสองชั้นแล้วเขียนในรูปของอินทิกรัลซ้ำในลำดับตรงข้ามของการอินทิเกรตโดยให้ dy อยู่ภายนอกและให้ dx อยู่ภายในอย่างน้อยก็สามารถอินทิเกรตขั้นแรกได้ ถ้ากระทำตามขบวนการข้างต้นก็จะพบว่า (2–8) สามารถแสดงได้ในรูปของผลต่างของอินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณเป็นรูปสามเหลี่ยมและเขียนแต่ละอินทิกรัลซ้ำจึงได้

$$V = \int_1^2 dy \int_1^y e^{\frac{x}{y}} dx - \int_2^3 dy \int_y^3 e^{\frac{x}{y}} dx$$

ซึ่งจะได้

$$V = 4e - \int_1^2 y\, e^{\frac{1}{y}} dy - \int_2^3 y\, e^{\frac{3}{y}} dy$$

อินทิกรัลที่เหลือย่อมหาค่าได้

เทคนิคในการกลับลำดับของอิทิเกรชันในอินทิเกรตซ้ำเป็นวิธีหนึ่งที่เป็นประโยชน์อีกตัวอย่างหนึ่งมีสูตรที่เป็นประโยชน์

(2–9) $$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx$$

ซึ่งมีข้อสังเกตต่อไปว่าทั้งสองข้างได้มาจากอินทิกรัลสองชั้นของ f บนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด

เป็น (a, a), (b, a), (b, b) ต่อไปนี้เป็นการประยุกต์ที่ใช้กันบ่อยๆ พิจารณาอินทริกรัลซ้ำ n ครั้ง (n–fold)

$$\int_0^b dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n$$

อินทิกรัลภายในสองอันสุดท้ายในรูป

$$\int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n$$

ซึ่งใช้ (2–9) จึงได้

$$\int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^{x_{n-2}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-2}} f(x_n)\, dx_{n-1}$$

$$= \int_0^{x_{n-2}} dx_n \left[f(x_n)\, x_{n-1} \right|_{x_{n-1}=x_n}^{x_{n-1}=x_{n-2}}$$

$$= \int_0^{x_{n-2}} f(x_n)\ (x_{n-2} - x_n)\, dx,$$

จะต้องทำอินทิกรัลซ้ำอีก n–1 ครั้ง โดยขบวนการข้างบนก็พิจารณา

$$\int_0^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{x_{n-2}} f(x_n)\ (x_{n-2} - x_n)\, dx,$$

ก็คือ

$$\int_0^{x_{n-3}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-3}} f(x_n)\, (x_{n-2} - x_n)\, dx_{n-2}$$

$$= \int_0^{x_{n-3}} f(x_n)\, \frac{(x_{n-3} - x_n)^2}{2!} dx_n$$

เมื่อกระทำไปได้เรื่อย ๆ ย่อมได้

$$\int_0^b dx_1 \int_0^{x_2} dx_2 \int_0^{x_1} dx_3 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\ dx_n = \int_0^b f(x_n)\, \frac{(b-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_n$$

ตัวอย่างสุดท้ายสำหรับเทคนิคนี้ ให้พิสูจน์ทฤษฎีบทโดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดโดยความหมายของอินทิกรัลที่กล่าวแล้วข้างต้นถ้า $f(x,y)$ ต่อเนื่องสำหรับ $a \leqslant x \leqslant b$ และ $c \leqslant y \leqslant d$ แล้ว

$$(2-10) \qquad F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

ต่อเนื่องสำหรับ x ในช่วงปิด $[a,b]$ (แบบฝึกหัดข้อ 18) มีเหตุผลที่จะสมมติได้ว่าอนุพันธ์ย่อย

$$f_1(x,y) = \frac{\partial x}{\partial f} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

มีค่าสำหรับ x ในช่วงปิด $[a,b]$ และ y ใน $[c,d]$ แล้วอาจหาอนุพันธ์ (2–10) ภายในเครื่องหมายอินทิกรัลได้

$$(2-11) \qquad F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}\, dy = \int_c^d f_1(x,y)dy$$

ภายใต้สมมติฐานว่า f_1 ต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.12 *ให้* f *และ* f_1 *มีค่าและต่อเนื่องสำหรับ* $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ *และและ* F *กำหนดโดย (2–10) แล้ว* $F'(x)$ *มีค่าบน* $[a, b]$ *และกำหนดได้โดย (2–11)*

พิสูจน์ เนื่องจาก f_1 ต่อเนื่องจากแบบฝึกหัดข้อ 18 แสดงว่า

$\phi(x) = \int_c^d f_1(x,y)dy$ ต่อเนื่องสำหรับ $x \in [a, b]$ สำหรับ x_0 ใด ๆ และ

พิจารณา

$$\int_a^{x_0} \phi = \int_a^{x_0} bx \int_a^d f_1(x, y)dy$$

กลับลำดับของการอินทิเกรตเสียใหม่จึงได้

$$\int_a^{x_0}\phi = \int_c^d dy \int_a^{x_0} f_1(x,y)dx$$

$$= \int_c^d dy \int_a^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx$$

$$= \int_c^d \left[f(x_0,y) - f(a,y)\right]dy$$

$$= F(x_0) - F(a)$$

ซึ่งแสดงว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์สำหรับ ϕ ดังนั้น F' มีค่าและก็คือ ϕ นั่นเอง สำหรับตัวอย่างถ้า $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin xy}{y} dy$ แล้ว

$$F'(x) = \int_0^1 \cos xy \ dy = \frac{\sin (xy)}{x}\Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{\sin x}{x}$$

วิธีการนี้บางครั้งใช้ในการหาค่าของรูปพิเศษในอินทิกรัลจำกัดเขตตัวอย่างเช่น ให้แสดงว่า สำหรับ $x > 0$

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta)\, d\theta$$

$$= \pi \log \frac{x+1}{2}$$

การหาอนุพันธ์ของอินทิกรัลเมื่อกำหนด F แล้วจึงได้

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + x^2 \cos^3 \theta}\, d\theta$$

ดังนั้น $\frac{F'(x)\,(x^2 - 1)}{2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2 - 1) \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta} d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta}$$

และ $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta + x^2}$

$$x^{-1}\arctan\left[x^{-1}\tan\theta\right]$$

ดังนั้นสำหรับ $x > 0$ และ $x \neq 1$

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{x+1}$$

ได้สร้าง $F'(x)$ สำหรับ $x > 0$ ยกเว้นที่ $x = 1$ แต่เมื่อ $x = 1$ จึงได้

$$F'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

หรือได้ว่า F' ต่อเนื่อง เนื่องจาก $\lim_{x\to 1} F'(x) = \frac{\pi}{2}$ เมื่ออินทิเกรต F' จึงได้

$$F(x) = \pi\log(x+1) + C$$

สำหรับค่า C พบว่า

$$F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1)\, d\theta = 0$$

ดังนั้น $F(1) = \pi\log 2 + C = 0$

เพราะฉะนั้น $C = -\pi\log 2$

และ $F(x) = \pi\log\dfrac{x+1}{2}$

ขณะนี้จะให้กฎเกณฑ์ในการหาอนุพันธ์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นของฟังก์ชันที่กำหนดโดยอินทิกรัลที่ต้องการ พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดโดย

(2 - 12) $$F(x) = \int_{\propto(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$$

ในการหา $F'(x)$ ใช้กฎลูกโซ่โดยให้ G เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร คือ

$$G(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)dy$$

ก็สามารถคำนวณอนุพันธ์ย่อยของ G โดยใช้ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัสสำหรับ $\frac{\partial}{\partial u}$ และ $\frac{\partial}{\partial v}$ จึงได้

$$G_1(x,u,v) = \int_u^v f_1(x,y)dy$$

$$G_2(x,u,v) = -f(x,u)$$

$$G_3(x,u,v) = f(x,v)$$

แล้วเนื่องจาก $F(x)$ ใน (2 - 12) ก็คือ $G(x,\propto(x),\beta(x))$ โดยกฎลูกโซ่ของการหาอนุพันธ์ จึงได้

(2 - 13) $$F'(x) = \beta'(x)\, f(x,\beta(x)) - cc'(x)\, f(x,\propto(x)) + \int_{\propto(x)}^{\beta(x)} f_1(x, y)\, dy$$

ตัวอย่าง t-i? $$F(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{\sin(x u)}{u}\, du$$

แล้ว $$F'(x) = e^x \frac{\sin(x e^x)}{e^x} - 2x \frac{\sin(x^3)}{x^2} + \int_{x^2}^{e^x} \cos(xu)du$$

$$= \sin(xe^x) - \frac{2 \sin (x^3)}{x} + \frac{\sin(x^3)}{x}$$

$$= (1 + x^{-1}) \sin xe^x - 3x^{-1} \sin(x^3)$$

ในหลาย ๆ กรณีทั้งอินทิกรัลชั้นเดียวและอินทิกรัลหลายชั้นวิธีที่ดีและมีประสิทธิภาพที่สุดก็คือการประยุกต์บางวิธีของการประมาณค่าอินทิเกรชัน การกระทำเช่นนั้นจะกระทำเมื่อการอินทิเกรตแบบไม่จำกัดเขตเป็นไปไม่ได้และอาจได้คำตอบแน่นอนเมื่อกระทำไปจนถึงขั้นสุดท้ายหรืออาจหาค่าได้จากตารางสำเร็จสำหรับฟังก์ชันมาตรฐานทั้งหลาย สิ่งที่ง่ายในการคำนวณสำหรับอินทิกรัลสองชั้นก็คือการสร้างสิ่งที่คุ้นเคยคือตาตารางให้ปกคลุม D แล้วคำนวณผลบวกของรีมานน์ $\overline{S}(N)$ และ $\underline{S}(N)$ สำหรับ f ค่าแน่นอนของ $\iint_D f$ จะต้องอยู่ระหว่างสองค่านี้ ค่าผลต่างของมันประมาณได้แน่นอน ผลบวกของรีมานน์รูปอื่น ๆ คือ $\sum_{ij} f(p_{ij})A(R_{ij})$ อาจต้องใช้ในการประมาณค่าด้วย ในการฝึกฝนค่าของสูตรง่าย ๆ มักใช้ในการประมาณค่าของอินทิกรัลชั้นเดียว ผลบวกของรีมานน์สำหรับ $\int_a^b f$ อาจใช้รูป $\sum_{i=o}^{n-1} f_i \triangle x_i$ เมื่อ $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$, $a = x_0 < x_2 < x_1 < \ldots < x_n = b$ และเมื่อ $f_i = f_i(p_i)$ เป็นค่าของ f ที่บางจุดในช่วง $[x_i , x_{i+1}]$ โดยทฤษฎีบทค่าตัวกลางถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงและ A และ B เป็นค่าของ f ในช่วงนั้นแล้วทุกจำนวนระหว่าง A และ B ก็อาจนำมาใช้และในกรณีพิเศษค่า $(A + B)/2$ ก็เป็นค่าของ f ให้ทั่ว ๆ ไปยิ่งขึ้นถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$ เป็นค่าของ f ในช่วงนั้นดังนั้นค่านี้ก็คือ

$C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3 + \ldots + C_r A_r$ เมื่อ $C_i \geqslant 0$ และ $\Sigma_{c_j} = 1$ (คือน้ำหนักเฉลี่ยทั่วไปของ A_j)

ทั้งสองกรณีดังกล่าวนำไปสู่กฎสี่เหลี่ยมคางหมูและกฎของซิมพ์สัน (Trapezoidal rule and Simpson's rule) สำหรับกฎแรกให้ $f_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]/2$ และสำหรับกฎที่ 2 ให้ $f_i = [f(x_i) + 4f(\bar{x}) + f(x_{i+1})]/6$ เมื่อ $\bar{x}$ เป็นจุดกึ่งกลาง $\bar{x} = (x_i + x_i + 1)/2$ เหตุผลเบื้องหลังกฎที่ 2 เลือกในผลลัพธ์ของแบบฝึกหัดข้อ 26 ซึ่งแสดงว่ากฎของซิมพ์สันมีค่าเที่ยงตรงเมื่อ f เป็นพหุนามกำลังอย่างมากสาม เพราะฉะนั้นในการนำสูตรไปใช้จึงได้ว่าเป็นการประมาณค่าผลรวมของ f ในแต่ละช่วง $[x_i , x_{i+1}]$ โดยพหุนามที่เลือกให้เหมาะกับ f ที่จุดปลายทั้งสองข้างและที่จุดกึ่งกลางของช่วงวิธีประมาณค่าอินทิกรัลจะได้พบต่อไปในแบบฝึกหัด

สำหรับอินทิกรัลชั้นเดียวทางที่ดีที่จะประมาณค่าของ $\int_b^a f$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่งไม่มีอินทิกรัลไม่จำกัดเขตเบื้องต้น เป็นการประมาณค่าของ f ด้วยฟังก์ชันอื่นที่สามารถอินทิเกรตได้โดยง่าย ในที่นี้พหุนามเป็นตัวเลือกที่ง่ายที่สุดและทฤษฎีบทของเทเลอร์จะช่วยได้มาก พิจารณา

$$C = \int_0^1 \sqrt{xe^{\sqrt{x}}}\,dx$$

แทนที่จะกระจายตัวถูกอินทิเกรต(integrand) $\sqrt{x}\;e^{\sqrt{x}}$ โดยตรงก็กลับไปดูว่า

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

ซึ่งผิดพลาดไปไม่เกิน .005 บนช่วง $[-1,1]$ บนช่วง $[0,1]$ จึงได้

$$\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} \approx \sqrt{x}\;\left[1 + x^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{120}\right]$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} + \ldots + \frac{x^3}{120}$$

ซึ่งผิดพลาดไม่เกิน .005 ด้วยแทนค่าลงไปในอินทิกรัลจึงได้

$$C \approx \int_0^1 \left(x^{2} + x + \frac{x^{2}}{2} + \ldots + \frac{x^3}{120}\right) dx = \mathbf{1.436210}$$

ในขณะที่แน่ใจว่าคำตอบมีค่าผิดพลาดอย่างมาก $\int_0^1 .005dx = .005$ ซึ่งความจริงสามารถจะประมาณค่าได้ดีกว่านั้น ถ้าแทนค่า $u = \sqrt{x}$ อินทิกรัลก็กลายเป็น

$$C = \int_0^1 2u^2e^u du = (4 - 4u + 2u^2)e^u \Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$= 1.43656366$$

อินทิกรัลซ้ำช่วยการอินทิเกรตมากมายซึ่งปรากฏบ่อย ๆ ที่ทำให้เป็นปัญหาธรรมชาติที่สุด พิจารณาคำถามต่อไป ให้ $I_1 = [a, b]$ และ $I_2 = [c, d]$ เป็นสองช่วงบนเส้น

ที่ $I_1 \cap I_2$ เป็นเซตเปล่า เลือกจุดในแต่ละเส้น คือ $p_i \in I_i$, $i = 1, 2$ คำถามว่าระยะทางระหว่าง p_1 กับ p_2 เป็นเท่าไร ในความคิดทางทฤษฎีความน่าจะเป็น

ถ้าให้ x เป็นพิกัดหนึ่งของ p_1 และ y เป็นพิกัดหนึ่งของ p_2 และให้ L_i เป็นความยาวของ I_i แล้วระยะทางระหว่างจุดเป็น $|y-x| = f(x,y)$ และปัญหาก็ตอบได้โดยถามถึงค่าของอินทิกรัลสองชั้น

(2–14) $$V = \frac{1}{L_1 L_2} \int\int_R f$$

เมื่อ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า $I_1 \times I_2$ ซึ่งจุดยอดเป็น (a,c), (b,c), (a,d), (b,d), ในกรณีนี้ V สามารถคำนวณได้โดยง่ายและคำตอบอาจออกมาเป็นระยะทางระหว่างจุดกึ่งกลางของช่วงทั้งสอง (แบบฝึกหัดข้อ 30) [ไม่สามารถตอบได้ ถ้าช่วงเหลื่อมกันหรือเกยกัน]

สมมติว่าพิจารณาปัญหาที่สมนัยกันสำหรับตัวแปรของจุดในระนาบ พิจารณาสองบริเวณ D_1 และ D_2 ซึ่ง $D_1 \cap D_2$ เป็นเซตเปล่า และ $p_i \in D_i$ ถามเช่นเดียวกันถึงระยะทาง $|P_1 - P_2|$ จากแบบอย่างข้างบน ให้ $p_i = (x_i, y_i)$ และ

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1,x_2,y_2) &= |p_1 - p_2| \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_1)^2} \end{aligned}$$

แล้วคำตอบที่ต้องการ คือ

(2–15) $$V = \frac{1}{A(D_1)A(D_2)} \int\int_S\int\int f$$

เมื่อ S เป็นเซต $D_1 \times D_2$ ใน 4 − ปริภูมิ

สำหรับตัวอย่างนี้ ให้ D_1 เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจุดยอดตรงข้ามเป็น (0, 0) และ (1, 1) และ D_2 เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจุดยอดตรงข้ามเป็น (1, 0) และ (2, 1) แล้ว

$$V = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy_1 \int_1^2 dx_2 \int_0^1 f(x_1,y_1,x_2,y_2)dy_2$$

ซึ่งท้าทายให้คิดออกมาได้ ซึ่งก็คือค่าเดียวกันกับ (2–15)

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงคำนวณ $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx$ จากนิยามของอินทิกรัล (ข้อแนะนำวิธีการเช่นเดียวกับในหนังสือนี้สำหรับ $\sqrt{x}$)
2. ถ้าเป็นไปได้ให้สูตรโดยชัดแจ้ง (explicit) สำหรับฟังก์ชัน F ซึ่งทุก x

   (a) $F'(x) = x + |x-1|$ (b) $\log F'(x) = 2x + e^x$
3. ให้ $f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{เมื่อ } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

   (a) จงหา $F(x) = \int_0^x f$ บน $[0,3]$

   (b) ฟังก์ชัน F ต่อเนื่องหรือไม่

   (c) $F'(x) - f(x)$ หรือไม่
4. อธิบายค่าผิดพลาดในตัวอย่าง (i) และ (ii)
5. ให้ F กำหนดโดย

   $$F(x) = \int_1^x \exp\left(\frac{u^2+1}{u}\right)\frac{du}{u}$$

   จงแสดงว่า $F\left(\frac{1}{x}\right) = -\ F(x)$
6. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ และสมมติว่าสำหรับทุก x ซึ่ง $0 < x < 1$ แล้ว $\int_0^x f = \int_x^1 f$ สามารถเขียนฟังก์ชันของ f ได้หรือไม่
7. จงหาว่าสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f ซึ่งทุก $x \geqslant 0$ แล้ว

   $$(f(x))^2 = \int_0^x f$$
8. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_D x^2 y\,dxdy$ เมื่อ D เป็นบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วย

   (a) เส้น $y = x$ และพาราโบลา $y = x^2$

   (b) เส้น $y = x-2$ และพาราโบลา $x = 4 - y^2$

9. จงเขียนอินทิกรัลซ้ำต่อไปนี้ในรูปของอินทิกรัลสองชั้น และแล้วเขียนอินทิกรัลซ้ำโดยกลับลำดับอินทิกรัล

$$\int_2^1 dx \int_0^x f\,(x,y)dy$$

10. จงแสดงว่าการกลับลำดับการอินทิเกรตในอินทิกรัล (2–5) แล้วได้

$$\int_1^3 dy \int_{\sqrt{y+1}}^2 f\,dx - \int_{-1}^1 dy \quad \int_0^{\sqrt{y+1}} f\,dx$$

11. ถ้าลำดับของอินทิเกรชันถูกสลับใน

$$\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{x+1} f(y)dy$$

ผลบวกของสองอินทิกรัลในรูป $\int_0^1 dy\,[\quad] + \int_1^2 dy\,[\quad]$ จงเติมค่าใน [ ]

12. ถ้า D เป็นบริมิตซึ่งจุดยอดเป็น (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1) , (0,0,0)

จงหา $\iiint_D (xy+z)\,dxdydz$

13. จงเขียนอินทิกรัลซ้ำต่อไปนี้ในรูปของอินทิกรัลสามชั้นแล้วเขียนในหลายลำดับในรูปของอินทิกรัลซ้ำ

$$\int_0^2 dx \int_1^{2-\frac{2}{x}} dy \int_x^2 f(x,y,z)dz$$

14. จงคำนวณอินทิกรัลในข้อ 13 ถ้า $f(x,y,z) = x + yz$

15. เส้น $y = x$ แบ่งสี่เหลี่ยมจัตุรัสพื้นที่ 1 ซึ่งจุดยอดตรงข้ามเป็น (0,0), (1,1) เป็นสองเซตสามเหลี่ยม บนแต่ละเซตฟังก์ชัน $f(x,y) = \frac{y}{x}$ สามารถอินทิเกรตหรือไม่ จงหาค่าอินทิกรัลบนสามเหลี่ยมนั้น

16. จงหาค่า

a> $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx$ b) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y e^{xy} dy$

17. จงกลับลำดับของอินทิกรัลสำหรับอินทิกรัลซ้ำต่อไปนี้แล้วหาค่าด้วย

$$\int_{-6}^{8} dx \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(x+6)/7} xy\,dy$$

18. ให้ f (x,y) มีค่าและต่อเนื่องสำหรับ $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$ ให้

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

จงพิสูจน์ว่า F ต่อเนื่องบน $[a,b]$

19. จงพิสูจน์สูตรต่อไปนี้ในการสลับลำดับการบวกในผลบวกที่มีจำนวนการบวกแน่นอน

$$\sum_{i=r}^{n} \sum_{j=r}^{i} a_{ij} = \sum_{j=r}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

และเปรียบเทียบกับ (2–9) คำแนะนำพยายามครั้งแรกโดยกำหนดค่าสำหรับ r และ n

20. ให้ f (x) ต่อเนื่องสำหรับทุก x

(a) จงหาค่าของ $\int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(t)dt$

(b) สามารถอธิบายคำตอบที่ได้ได้หรือไม่

21. โดยการเลือกตาตารางและคำนวณ $\overline{S}(N)$ และ $\underline{S}(N)$ ประมาณค่า $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ให้ผิดพลาดไม่เกิน .05 แล้วเปรียบเทียบกับค่าแน่นอนที่คำนวณได้โดยขบวนการธรรมดา

22. โดยการเลือกตาตารางประมาณค่าของ $\int_0^2 dy \int_0^1 \frac{dx}{x+y+10}$ ให้ผิดพลาดไม่เกิน .02 และเปรียบเทียบโดยคำนวณหาค่าโดยตรง

23. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ จงแสดงว่า

$$\left[\int_a^b fg\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

(อินทิกรัลนี้อยู่ในรูปของ Schwarz inequality)

24. โดยใช้ข้อ 23 จงแสดงว่า

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx < .47$$

25. ใช้วิธีเดียวกันกับข้อ 24 จงประมาณค่าของ

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\,dx$

2.6 จงแสดงว่า $\int_a^b P = (b - a)\dfrac{P(a) + P(b) + 4P([a + b]/2)}{6}$

เมื่อ p เป็นพหุนามกำลังสูงสุดอย่างมาก 3

2.7 จงแสดงว่า

(a.) ถ้า $F(x) = J',\ \log(1 + xe^{u})du$ แล้ว

$$F'(x) = x\text{-'}\log\left(\frac{1 + ex}{1 + e^{-1}x}\right)$$

(b) ถ้า $F(x) = \int_0^{\pi} u^{-1} e^{xu} \sin u\,du$ แล้ว

$$F'(x) = \frac{3\cos(x^8)}{2x} - \frac{\cos x}{2x}$$

(c) ถ้า $F(x) = \int_0^{\pi} u^{-1} e^{xu} \sin u\,du$ แล้ว

$$F'(x) = \frac{e^{\pi x}\ i\text{-}1}{x^2 + 1}$$

28. โดยใช้สูตร (2–13) เพื่อหา $F'(x)$ ถ้า

(a) $F(x) = \int_x^{x^2} t^{-1} e^{xt}\,dt$ (b) $F(x) = \int_{2x}^{3x} \cos(4x)\,dx$

29. ให้ $F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 2y & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

จงแสดงว่า $\int_0^1 dx \int_0^1 F(x,y)dy = 1$ แต่ $\int_0^1 dy \int_0^1 F(x,y)\,dx$ หาค่าไม่ได้

30. ให้ $I_1 = [a,b]$ และ $I_2 = [c,d]$ ซึ่ง $b < c$ จงแสดงว่าค่าของสูตร (2 – 14) คือ $(c + d - a - b)/2$

31. สุ่มเลือกจุดสองจุดจากช่วงที่มีความยาว L จงแสดงว่าระยะทางที่คาดเป็น L/3

32. (a) โดยใช้ทฤษฎีบท 2.11 หาค่าอินทิกรัลสองชั้น

$$\int_2^5 dx \int_{-1}^3 (x^2y + 5xy^2)dy$$

(b) ให้สูตรและพิสูจน์ทฤษฎีบทสำหรับหาค่าของอินทิกรัลสามชั้น

2.4 การแทนค่าในอินทิกรัลหลายชั้น

(Substitution in multiple integrals)

ในการหาค่าอินทิกรัลชั้นเดียวใช้วิธีการทางตัวเลขหรือการแทนค่าวิธีใดวิธีหนึ่ง และทฤษฎีบทพื้นฐานสำหรับแคลคูลัส (ทฤษฎีบท 2.5) เป็นธรรมชาติที่จะหวังว่าสถานการณ์เหมือนกับอินทิกรัลหลายชั้น อย่างไรก็ดี ในที่สุดอินทิกรัลหลายชั้นวัดด้วยวิธีทางตัวเลขหรือโดยแทนด้วยอินทิกรัลซ้ำชั้นเดียวที่เท่ากัน และวิธีการการแทนค่าส่วนใหญ่ใช้วิธีการมาตรฐานเพื่อทำให้ปัญหาที่ยุ่งยากง่ายขึ้น ในหัวข้อนี้มุ่งหวังจะให้สูตรในการใช้เปลี่ยนแปลงตัวแปรเพื่อคำนวณค่า

สำหรับตัวแปรตัวเดียว โดยปกติขบวนการต่อไปนี้เพื่อเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัล กำหนดให้

$$V = \int_a^b F(x)dx$$

สมมติว่าต้องการแทน $x = \phi(u)$ วิธีการสามขั้นคือ

(2–16) กำหนดช่วง $[\alpha, \beta]$ สำหรับค่าของ u ซึ่งส่ง (map) โดย $x = \phi(u)$ ไปบน $[a,b]$

(2–17) แทน $F(x)$ ด้วย $F(\phi(u))$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ u กำหนดบนช่วง $[\alpha, \beta]$

(2–18) แทน dx ด้วย $\phi(u)du$

ในทฤษฎีบท 2.8 ในหัวข้อที่แล้ว ได้แสดงแล้วว่าขั้นเหล่านี้เพื่อเปลี่ยนอินทิกรัลเดิม ให้เป็นอินทิกรัลอื่นที่มีค่าเท่ากัน

$$V = \int_{\infty}^{\beta} F(\phi(u))\, \phi'(u)du$$

พิจารณาอินทิกรัลสองชั้น

(2–19) $$V = \iint_D F(x,y)dxdy$$

และแทนค่า

(2–20) $$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$$

โดยใช้วิธีการสามขั้น

(2–21) กำหนดบริเวณ D^* ในระนาบ UV ซึ่งส่งโดย (2–20) ไปบนบริเวณ D, (1–ต่อ–1)

(2–22) แทน $F(x,y)$ โดย $f(u,v)$, $g(u,v)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ (u,v) กำหนดค่าได้บน D^*

(2–23) แทนค่า dxdy ด้วย $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}\right| du\, dv$

สำหรับขั้นที่สาม พิจารณาจากสิ่งที่คุ้นเคยจากแคลคูลัสเบื้องต้น ก็คือสูตรที่เปลี่ยนพิกัดเป็นพิกัดเชิงขั้ว

(2–24) $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ในกรณีนี้ ขั้นที่สามในวิธีการนี้ก็เป็น

(2–25) แทน dxdy ด้วย $rdrd\theta$

ซึ่งพบได้บ่อย ๆ ในการอธิบายความหมายทางเรขาคณิต

กลับไปดูใน (1–25) สำหรับจาโคเบียนทั่วๆ ไป จาก (2–20) จึงได้

(2–26) $$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}$$

$$= f_1 g_2 - f_2 g_1$$

ดังนั้น ขั้นที่ 3 จึงเป็น

(2–27) แทน $d\,x\,d\,y$ ด้วย $\left| \frac{\partial (x, y)}{\partial x, y)} \right| dudv$

ในพิกัดเชิงขั้ว ก็คือ

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r \left\{ (\cos\,\theta)^2 + (\sin\,\theta)^2 \right\}$$

$$r$$

ซึ่งได้ตาม (2-25) ดังกล่าว

ในขณะที่เห็นได้ชัดเจนว่าวิธีการขนานกันระหว่างวิธีการสามขั้น สำหรับอินทิกรัลชั้นเดียวและอินทิกรัลสองชั้น มีบางสิ่งบางอย่างแตกต่างกันออกไป ซึ่งสำหรับในอินทิกรัลหลายชั้น ขั้นที่ 2 สนใจว่าการส่งจะต้องเป็น 1 – ต่อ – 1 และในขั้นที่ 3 จาโคเบียน (ซึ่งแทนที่อนุพันธ์ $\phi(u)$ อยู่ภายในเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ $|\;\;|$ เพราะทำให้พิสูจน์ทฤษฎีบท (ทฤษฎีบท 2.8) สำหรับตัวแปรตัวเดียวง่ายกว่าสำหรับกรณีหลายตัวแปร จะจบการอภิปรายในรายละเอียดของวิธีอื่นเพื่อนำมาซึ่งการแทนค่าในอินทิกรัลหลายชั้นซึ่งไม่ต้องนำสัญลักษณ์ของจาโคเบียนซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายและอัตโนมัติเช่นที่คุ้นเคยกันในอินทิกรัลชั้นเดียวทั้งหลาย