ใน (2–18) ยอมรับว่า ถ้า $x = \phi(u)$ แล้ว

$$dx = \phi'(u)du$$

โดยทางวิเคราะห์ยอมรับว่าถ้า $x = f(u,v)$ แล้ว

(2–28) $$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = f_1du + f_2dv$$

จาก (2-28) จึงเขียนได้ว่า $dy = g_1du + g_2dv$ จึงได้ว่า

(2–29) $$dx\,dy = (f_1du + f_2dv)(g_1du + g_2dv)$$

$$= f_1g_1\,dudu + f_1g_2du\,dv + f_2g_1dvdu + f_2g_2dvdv$$

เมื่อนำกฎเกณฑ์ทางพีชคณิตมาช่วยจึงได้

(2–30) $$dudu = dvdv = 0$$
$$dvdu = -\,dudv$$

โดยใช้กฎนี้ (2–29) จึงกลายเป็น

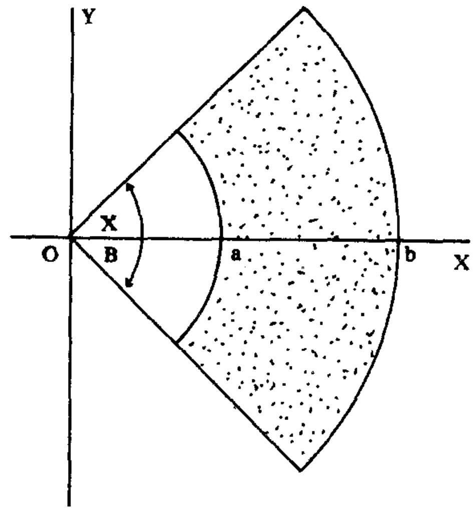
$$dx\,dy = 0 + f_1g_2dudv - f_2g_1dudv + 0$$

$$= (f_1g_2 - f_2g_1)dudv$$

หลักการทั่ว ๆ ไปนี้ก็สามารถนำไปใช้กับอินทิกรัลหลายชั้นขนาดไหนก็ได้ก็สามารถทำให้สำเร็จลงได้ แต่ก็ต้องระมัดระวังลำดับของตัวแปรที่ปรากฏอยู่

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ $f(x,y) = xy^2$ และให้ D เป็นบริเวณดังรูป 2.8 ใช้วิธีการแทนค่าใน (2–24) หาค่า $\iint_D f(x,y)dxdy$



รูปที่ 2.8

2. การแปลง (transformation) มาตรฐานระหว่างโคออร์ดิเนตระบบสเฟียริคัลและคาร์ทีเซียน ในสามมิติเป็น

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

จงแสดงว่าสูตรการแทนค่าที่ถูกต้องคือ

$$dxdydz = \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta$$

3. ใน 4–ปริภูมิพิกัดเชิงขั้วสองชั้นกำหนดโดยสมการต่อไปนี้

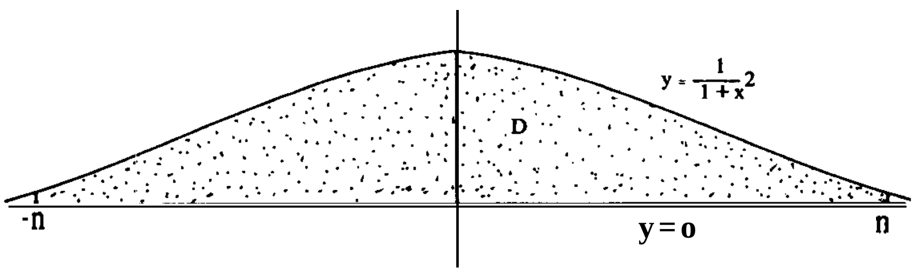
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi,\ w = \rho\sin\phi$ จงหาสูตรการแทนค่าที่ถูกต้องและแสดงว่าปริมาตรของไฮเปอร์สเฟียร์ $x^2 + y^2 + z^2 + z^2 \leqslant R^2$ คือ $\frac{\pi^2 R^4}{2}$

2.5 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

Improper Integrals

ในหัวข้อ 2.2 ได้กล่าวถึงพื้นที่ของเซตที่มีขอบเขตถ้าจะหาพื้นที่เช่นนี้สำหรับบางเซตที่ไม่มีขอบเขตซึ่งอาจมีวิธีการง่าย ๆ ที่จะหาได้ ให้ $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots$ เป็นลำดับขยาย (expanding sequence) ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด ซึ่งเซตผลผนวกของมันคือระนาบทั้งระนาบ ตัวอย่างเช่นเลือก R_n เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจุดศูนย์กลางคือจุดกำเนิดและจุดยอดอยู่ที่ (n,n) ให้ D เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตซึ่งต้องการจะหาพื้นที่ สร้างเซตที่มีขอบเขต $D_n = R_n \cap D$ คือส่วนของ D ใน R_n และสมมติว่าจุดขอบเขตของ D มีคุณสมบัติดีพอที่ทำให้ D_n มีพื้นที่ เนื่องจากลำดับ $\{D_n\}$ เป็นลำดับขยายอันหนึ่ง ลำดับของพื้นที่ก็คือ $\{A(D_n)\}$ เป็นลำดับที่เพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียว ถ้า $\{A(D_n)\}$ มีขอบเขตอันดับนี้ก็ลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง (converge) ก็เขียนได้ว่า $A(D) = \lim\limits_{n\to\infty} A(D_n)$ ถ้า $\{A(D_n)\}$ ไม่มีขอบเขตลำดับนี้ก็ลู่ออกจากจำนวนใด ๆ (diverge) และกล่าวได้ว่า $A(D) = \infty$

เพื่อพิจารณาว่าขบวนการนี้ใช้การได้สมมติว่า D เป็นเซตของทุกจุด (x,y) ซึ่ง $0 \leqslant y \leqslant (1+x^2)^{-1}$ ดังรูป 2.9 เลือก R_n ดังกล่าวข้างต้นจึงได้



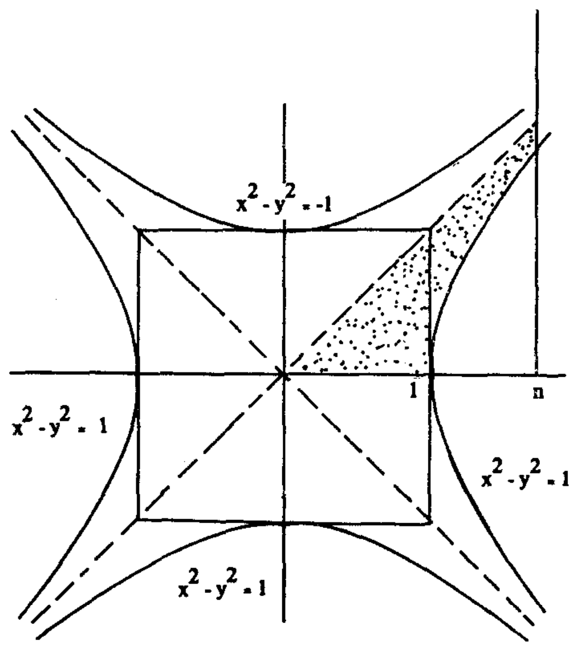
รูปที่ 2.9

$$A(D_n) = \int_{-n}^{n} dx \int_0^{\frac{1}{1+x^2}} dy = \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 2\arctan(n)$$

และ $A(D) = \lim_{n\to\infty} A(D_n) = \pi$

อีกตัวอย่างหนึ่งให้ D เป็นเซทของทุกจุด (x,y) ซึ่ง $|x^2 - y^2| \leqslant 1$ ดังรูป 2.10 จึงได้



รูปที่ 2.10

$$A(D_n) = 8\int_0^1 dx \int_0^x dy + 8\int_1^n dx \int_{\sqrt{x^2-1}}^{x} dy$$

$$= 4 + 8\int_1^n (x - \sqrt{x^2-1})dx$$

เนื่องจาก $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{\qquad}{, \quad + \quad \& \quad \& \quad x}$

$$A(D_n) \geqslant 4 + 8\int_1^n \frac{dx}{2x} = 4 + 4\log n$$

เพราะฉะนั้น $A(D) = \infty$

สำหรับตัวอย่างนี้ถ้าปรับปรุงโดยให้บริเวณ D มีพื้นที่แน่นอน ให้ D เป็นเซตของจุด (x, y) ซึ่ง $|x^4 - y^4| \leqslant 1$ กราฟของ D ก็ดูคล้ายกับรูป 2.10 มาก จึงได้

$$A(D_n) = 4 + 8\int_1^n (x - \sqrt[4]{x^4 - 1})\, dx$$

จึงพบว่า ถ้า $x > 1$ แล้ว

$$x - \sqrt[4]{x^4 - 1} \leqslant \frac{1}{x^3}$$

ซึ่งตรวจสอบได้ดังนี้

$$\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^4 = x^4 - 4 + 6x^{-4} - 4x^{-8} + x^{-12} \leqslant x^4 - 1$$

เมื่อ $x \geqslant 1$ ดังนั้น

$$A(D_n) \leqslant 4 + 8\int_1^n x^{-3} dx = 4 + 8\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) \leqslant 8$$

สำหรับทุก n เนื่องจาก D_n ขยายออก ลำดับ $\{A(D_n)\}$ เป็นลำดับที่เพิ่มอย่างเดียวและ $\lim\limits_{n\to\infty} A(D_n)$ มีค่าค่าหนึ่งจึงแสดงได้ว่า $A(D)$ มีค่าแน่นอนและมีค่าไม่เกิน 8 และก็ยังไม่ทราบค่าที่แน่นอนของ $A(D)$ เพียงแต่ทราบว่ามี

อาจมีคำถามทั่ว ๆ ไปในการเลือกสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\{R_n\}$ มีผลต่อค่าของ $A(D)$ หรือไม่ คำตอบก็คือไม่เกี่ยวข้องกัน เพียงแต่ต้องการให้เป็นลำดับขยายของบริเวณที่เซตผลผนวกเป็นระนาบทั้งระนาบ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่า $A(D)$ อิสระจากการเลือก R_n

ทฤษฎีบท 2.13 *ให้ $\{R'_n\}$ และ $\{R_n\}$ เป็นลำดับขยายออกของสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดและ ขอบเขตซึ่งเซตของจุดข้างในปกคลุมระนาบ ให้ D เป็นเซตซึ่ง*

$$D_n = D \cap R_n \text{ และ } D'_n = D \cap R'_n$$

มีพื้นที่สำหรับแต่ละ n = 1, 2, 3, . . . แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} A(D_n) = \lim_{n\to\infty} A(D'_n)$$

พิสูจน์ ให้ U_k เป็นเซตของจุดข้างในของ R_n และเซต $E = R'_j$ เซตปิด U_nปกคลุมระนาบและดังนั้น E โดยทฤษฎีบท Heine–Borel ย่อมมี k ซึ่ง $E \subseteq U_k$ ซึ่งแสดงว่าแต่ละ j มีจำนวนที่สมนัยกับ j คือ k ซึ่ง $R'_j \subseteq R_k$ เซตร่วม (intersection) $D'_j = D \cap R'_j$ และ $D_k = D \cap R_k$ ย่อมได้ $D'_j \subseteq D_k$ ดังนั้น $A(D'_j) \leqslant A(D_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} A(D_n)$ เนื่องจากความสัมพันธ์ข้างบนเป็นจริงสำหรับ j ใดๆ

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} A(D'_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} A(D_n)$

ในทำนองเดียวกันถ้าพิจารณากลับกันย่อมได้ว่า

$\lim_{n\to\infty} A(D_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} A(D_n)$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} A(D_n) = \lim_{n\to\infty} A(D'_n)$ □

ได้ขยายความเข้าใจในเรื่องพื้นที่ ในขณะเดียวกันก็หาหนทางที่จะขยายความเข้าใจในเรื่องอินทิกรัลจำกัดเขต

$$I(f,D) = \int_D\int f$$

เป็นเสมือนฟังก์ชันของคู่อันดับ (f,D) ซึ่งทราบแล้วว่ามีค่าเมื่อ D เป็นเซตที่มีขอบเขตและมีพื้นที่ และ f มีขอบเขตและต่อเนื่องบน D ยกเว้นเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ ในทั้งสองกรณี

คำว่ามีขอบเขตไม่สามารถจะทิ้งไปเสียได้ ตัวอย่างเช่น ถ้า f ไม่มีขอบเขตบน D แล้ว ตาตาราง N ใดๆที่แบ่ง D ค่าผลบวกข้างบนของรีมานน์ $\bar{S}(N)$ อาจมีค่าเป็น ∞ เนื่องจาก l. u. $b_p \in R_{ij} f(p)$ มีค่ากำหนดไม่ได้สำหรับบางตัวเลือก i และ j โดยเฉพาะอย่างยิ่งนิยามข้างต้นไม่สามารถให้ความหมายของอินทิกรัล $\int_0^1 \log x\,dx$ และ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ได้แนะนำการหาพื้นที่ของเซตที่ไม่มีขอบเขตแล้ว เราจะพยายามขยายความเข้าใจโดยสนใจ I(f,D) ซึ่งอาจกำหนดค่าได้สำหรับบางบริเวณ D ที่ไม่มีขอบเขตและบางฟังก์ชัน f ที่ไม่มีขอบเขต ซึ่งแตกต่างไปจากอินทิกรัลเดิมที่ได้ศึกษาแล้ว เรียกอินทิกรัลประเภทนี้ว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (inproper integrals)

$\int_c^{\infty} f$ มีความหมายอย่างไรเมื่อ f ต่อเนื่องบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต $c \leqslant x < \infty$ ถ้า f มีค่าเป็นบวก กลับไปที่การหาพื้นที่ และกำหนดค่านี้ว่าเป็นพื้นที่ของบริเวณ D ในซึ่ง

$$D = \left\{(x,y) : c \leqslant x < \infty \wedge 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

โดยใช้สิ่งที่ศึกษามาแล้วข้างต้น

$$\int_c^{\infty} f = A(D) = \lim_{n\to\infty} \int_c^n dx \int_0^{f(x)} dy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^n f(x)dx$$

ขยายความนี้เพียงเล็กน้อย โดยปรับปรุงนิยามต่อไปนี้ เมื่อตัวถูกอินทิเกรต (ฟังก์ชันในเครื่องหมายอินทิกรัล) มีค่าบวกและค่าลบ

นิยาม 2.5 *ให้* f(x) *ต่อเนื่องสำหรับ* $c \leqslant x < \infty$ *แล้ว*

$$\int_c^{\infty} f = \lim_{r\to\infty^-} \int_c^r f$$

เมื่อค่าลิมิตนี้มีค่า

ตัวอย่าง เช่น $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{r\to\infty^-} \int_0^r e^{-x}dx$

$$= \lim_{r\to\infty^-} -e^{-x}\Big|_0^r = 1$$

$\int_0^{\infty} \sin x\, dx = \lim_{r\to\infty^-} -\cos x \Big|_0^r$ หาค่าไม่ได้

เนื่องจากขั้นสุดท้ายเป็นการคำนวณหาลิมิตใช้คำว่าค่าลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง (converge) และค่าลู่ออกหรือค่าไม่ลู่เข้าสู่จำนวนใด ๆ (diverge) ในที่ของคำว่าหาค่าได้ (exist) และหาค่าไม่ได้ (does not exist) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ มีค่าลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง และ $\int_0^{\infty} \sin x\, dx$ ค่าไม่ลู่เข้าสู่จำนวนใด ๆ เช่นเดียวกับที่เข้าใจ $\int_{-\infty}^{c} f$ ว่ามีความหมายเช่นเดียวกับ $\lim_{r\to\infty^-} \int_{-r}^{c} f$

สำหรับ $\int_{-\infty}^{\infty} f$ มีอยู่สองนิยามที่ใช้กันอยู่ คือ

(2–31) $$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{r\to\infty^-} \int_c^r f + \lim_{r\to\infty^-} \int_{-r}^{c} f$$

$$= \int_c^{\infty} f + \int_{-\infty}^{c} f$$

(2–32) $$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{r\to\infty^-} \int_{-r}^{r} f$$

ข้อแตกต่างของทั้งสองอินทิกรัลข้างบนอันแรกเรียกว่าค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (ธรรมดา) อันที่ 2 เรียกว่า ค่าโคชีปรินซิปอล (Cauchy principal value) เรียกย่อ ๆ ว่า CPV ค่าของอินทิกรัลหาค่าได้จริงเมื่อทั้งสองค่าเท่ากัน แต่ค่า CPV อาจมีค่าในบางกรณีเมื่ออินกรัลไม่ตรงแบบธรรมดาหาค่าไม่ได้ เหตุผลอยู่ที่ความจริงที่ว่าการคำนวณลิมิตในกรณีธรรมดาต้องคำนวณแยกกัน ถ้าค่านี้ลู่ออกจากค่าใด ๆ ค่าของอินทิกรัลก็ลู่ออกจากค่าใด ๆ ด้วย อย่างไรก็ดี CPV ลิมิตติดต่อกันค่ากระจายออกของอันหนึ่งอาจทำให้ค่าลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งได้ เนื่องจากเกิดการลบกันภายใน ตัวอย่างพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

จึงได้ $\int_0^r \frac{1+x}{1+x^2}dx = \left[\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right|_0^r$

$$= \arctan r + \frac{1}{2}\log(1+r^2)$$

และเนื่องจาก $\lim_{r\to\infty} \log(1+r^2) = \infty$ ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบนี้มีค่าลู่ออกจากค่าใด ๆ แต่อย่างไรก็ดี

$$\int_{-r}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx = -\arctan(-r) - \frac{1}{2}\log(1+r^2)$$

$$= \arctan r - \frac{1}{2}\log(1+r^2)$$

ดังนั้น $\int_{-r}^{r} \frac{1+x}{1+x^2}dx = 2\arctan r$

และ (CPV) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \pi$

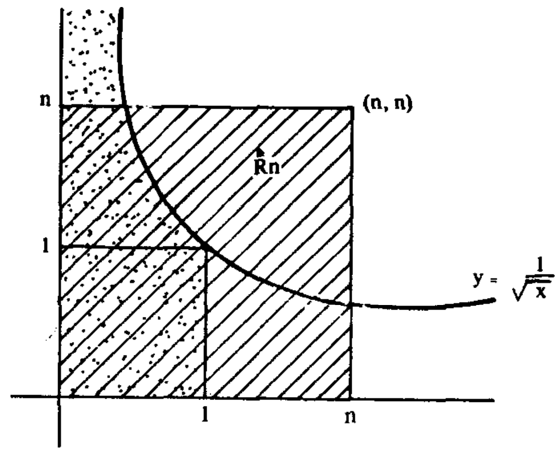
นอกจากนี้ยังมีบางสิ่งบางอย่างที่ชี้ให้เห็นได้ว่า CPV หมายความเช่นไร สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบธรรมดาซึ่งโดยปกติก็เข้าใจกันแล้วสำหรับปัญหานี้อาจเลือก r และ $-r$ ต่างออกไป เช่น

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{2r} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \pi + \log 2$$

สิ่งสำคัญในกรณีที่กล่าวมานี้ก็คือ ค่าของตัวถูกอินทิเกรตต้องเป็นบวกตลอด หรือลบตลอดช่วงในการอินทิเกรต

พิจารณาในกรณีที่ช่วงในการอินทิเกรตมีขอบเขตแต่ค่าของฟังก์ชัน (ตัวถูกอินทิเกรต) ไม่มีขอบเขต ตัวอย่างเช่น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ อาจพิจารณาเซต D ที่มีขอบเขตเป็นเส้นแกนนอนและกราฟ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ เซต D ไม่มีขอบเขตและคำนวณหาค่าของพื้นที่โดยใช้สี่เหลี่ยม

ผืนผ้า R_n ซึ่งมีจุดยอดเป็น $(\pm n, \pm n)$ เช่นเดิมดังรูป 2.11



รูปที่ 2.11

$$A(D \cap R_n) = \int_0^1 dy \int_0^1 dx + \int_1^n dy \int_0^{\frac{1}{y^2}} dx$$

$$= 1 + \int_1^n y^{-2} dy \to 2$$

ดังนั้น $A(D) = 2$ จึงได้ว่า

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

โดยทั่วๆ ไป ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ยกเว้นที่บางจุดที่มีจำนวนจำกัด $f(x) \geqslant 0$ สำหรับทุก x ให้ f_n เป็นฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นบนช่วงปิด $[a,b]$ โดยให้

$f_n(x)$ = ค่าน้อยสุดระหว่างค่า $f(x)$ และ n

ถ้า D เป็นเซตของจุดซึ่งอยู่เหนือแกนนอน ภายใต้กราฟของ f และระหว่างเส้น $x = a$ และ $x = b$ แล้วพื้นที่ของเซตที่ไม่มีขอบเขตนี้คือ

$$A(D) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

ยังไม่เคยใช้นิยามนี้สำหรับ $\int_a^b f$ จะพบว่านำมาใช้ได้ไม่ง่ายนักเมื่อ f ไม่ซับซ้อน ต่อไปนี้จะปรับปรุงเพื่อคำนวณอินทิกรัลจากตัวถูกอินทิเกรต มีทั้งค่าบวกและลบบนช่วงของอินทิกรัล จะเลียนแบบนิยามผลต่างซึ่งจะเป็นผลสำหรับจุดประสงค์ และนำไปสู่ผลลัพธ์เดียวกัน ครั้งแรกแยกความไม่ต่อเนื่องของ f โดยแยกช่วงในการอินทิเกรตเป็นช่วงย่อย ๆ ที่ f ต่อเนื่อง ยกเว้นที่จุดปลาย ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ และช่วงในการอินทิเกรตเป็น $[-1,2]$ จึงได้

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$ เพราะฉะนั้นสรุปว่าเราพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งต่อเนื่องบนช่วงครึ่งเปิด $a < x \leqslant b$ และมีค่าไม่มีขอบเขตที่นั้น ซึ่งไม่ได้ต้องการว่า f เป็นบวกหรือไม่

นิยาม 2.6 *ให้* $f(x)$ *ต่อเนื่องสำหรับ* $a < x \leqslant b$ *แล้ว*

$$\int_a^b f = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f$$

เมื่อค่าลิมิตหาค่าได้

โดยการใช้นิยามนี้สำหรับอินทิกรัล $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$ จึงได้

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_r^1 = \lim_{r\to 0^+} (2-2\sqrt{r}) = 2$$

เป็นข้อตกลงในแคลคูลัสมาแต่เดิม และข้อตกลงนี้ไม่ใช่ข้อตกลงโดยอุบัติเหตุ

ทฤษฎีบท 2.14 *ให้* f *ต่อเนื่องสำหรับ* $a < x \leqslant b$ *ซึ่ง* $f(x) \geqslant 0$ *ให้* D *เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้น* $y = 0,\ x = a,\ x = b$ *และเส้น* $y = f(x)$ *แล้ว*

$$A(D) = \int_a^b f$$

พิสูจน์ สำหรับข้อยืนยันที่ว่า $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ และ $\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$ ทั้งสองอาจกำหนดค่าไม่ได้ หรือทั้งสองกำหนดค่าได้ และเท่ากัน เลือก $r>a$ และให้ $M_r = \max_{x\in[r,b]} f(x)$

เมื่อ $n > M_r, f_n(x) = f(x)$ บน $[r,b]$ ดังนั้น

$$\int_a^b f_n = \int_a^r f_n + \int_r^b f_n \geqslant \int_r^b f$$

โดยใช้ความจริงที่ว่า f มีค่าเป็นบวก ให้ n เพิ่มขึ้น จึงพบว่าสำหรับทุก $r > a$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \geqslant \lim_{r\to a^+}\int_n^b f$$

พิจารณาตรงข้ามของความไม่เท่ากัน เลือก n ใดๆ เนื่องจาก $f(x) \geqslant f_n(x)$ สำหรับทุก x, ขณะที่ $f_n(x) \leqslant n$

$$\int_r^b f_n \leqslant \int_r^b f \text{ และ } \int_a^r f_n \leqslant n(r-a)$$

เมื่อรวมทั้งสองข้างบนย่อมได้

$$\int_a^b f_n \leqslant n(r-a) + \int_r^b f$$

และให้ r เข้าใกล้ a จึงพบว่าสำหรับตัวเลือก n ใดๆ

$$\int_a^b f_n \leqslant \lim_{r\to a^+}\left(n(r - a> + \int_r^b f\right) = \lim_{r\to a^+}\int_r^b f$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \leqslant \lim_{r\to a^+}\int_r^b f$ ❑

ตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งจะปรับปรุงถ้าความไม่ต่อเนื่องของตัวถูกอินทิเกรตที่จุดปลายข้างบน และถ้ามีมากกว่าหนึ่งจุดที่ไม่ต่อเนื่องในช่วงของการอินทิเกรต

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{r\to 1^-}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{r\to 1^-}\arcsin r$

$= \frac{\pi}{2}$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}$

จากขบวนการอินทิเกรตจึงได้

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)} = \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)} = \lim_{r\to 0^+} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Bigg|_r^{\frac{1}{2}} = \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

แต่ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)} = \lim_{r\to 1^-} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^r = \infty$

ดังนั้นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}$ ค่าลู่ออกจากค่าใด ๆ

ขยายนิยามของอินทิกรัลโดยวิธีแยกออกอย่างเบา ๆ มาอย่างยืดยาวเกี่ยวกับช่วงในการอินทิเกรตมีขอบเขตและตัวถูกอินทิเกรตก็มีขอบเขต ซึ่งอาจมีอินทิกรัลหลายอันบวกกันอยู่ เช่น อินทิกรัล $\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}dx$ หมายความว่า $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$ และกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบเดิมลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่งเมื่อทั้งสองต่างลู่เข้า

ถ้าฝึกฝนโดยระมัดระวังวิธีการนี้อาจนำวิธีการไปสู่ อินทิกรัลแท้ (proper integral) ธรรมดามาใช้ในการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบได้ ถ้า $\phi(u)$ อยู่ใน C' สำหรับ $\propto \leqslant u \leqslant \beta$ และถ้า $\phi(\propto) = a$ และ $\lim_{u\to\beta^-} \phi(u) = b$ และเปลี่ยนตัวแปร $x = \phi(u)$ แล้วเปลี่ยนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)dx$ เป็น $\int_\propto^\beta f(\phi(u))\phi'(u)dx$ ถ้าเป็นอินทิกรัลแท้ อินทิกรัลเดิมก็ลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ถ้าอินทิกรัลใหม่เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบแล้วทั้งสองย่อมลู่เข้าหรือลู่ออกทั้งคู่พร้อม ๆ กัน ตัวอย่างเช่นแทน $x = u^2$ ใน $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$ จึงได้

$$\int_0^1 \frac{2u\,du}{u} = \int_0^1 2\,du = 2$$

วิธีการนี้เป็นจริงสำหรับการอินทิเกรตบนช่วงที่ไม่มีขอบเขตอินทิกรัล $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ กลายเป็น $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2 d\theta$ โดยการแทนค่า $x = \tan\theta$ หรืออาจกล่าวได้ว่า $\int_1^\infty x^{-2}\sin x\,dx$ มีค่าลู่เข้าเนื่องจากเมื่อแทน $x = \frac{1}{u}$ อินทิกรัลไม่ตรงแบบเดิมก็กลายเป็นอินทิกรัลแท้

(2–33) $$\int_1^0 -\sin\left(\frac{1}{u}\right) du = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{u}\right) du$$

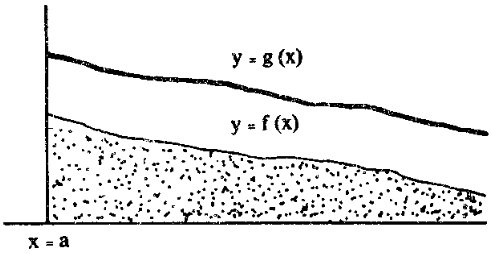
เมื่อช่วงในการอินทิเกรตแยกออกเป็นเซตผลผนวกของช่วงย่อย ๆ อินทิกรัลเดิมถูกแทนด้วยผลบวกของอินทิกรัล แต่ละอินทิกรัลมีตัวถูกอินทิเกรตอันเดียวกัน และอินทิกรัลเดิมลู่ออกจากจำนวนใด ๆ ถ้าอินทิกรัลอันใดอันหนึ่งมีค่าลู่ออกจากจำนวนใด ๆ พิจารณาข้อผิดพลาดดังกล่าวข้างต้นเมื่ออินทิกรัลที่แบ่งออกเป็นผลบวกของสองอินทิกรัล อย่างไรก็ดี อินทิกรัล $\int_0^1 \frac{1+x}{x}dx$ และ $\int_0^1 \frac{2x-1}{x}dx$ ซึ่งทั้งคู่มีค่าลู่ออกจากจำนวนใด ๆ แต่

$$\int_0^1 \frac{1+x}{x}dx + \int_0^1 \frac{2x-1}{x}dx = \int_0^1 \frac{1+x+2x-1}{x}dx$$

$= \int_0^1 3\,dx$ มีค่าลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

การลู่เข้าสู่จำนวนใดจำนวนหนึ่งของอินทิกรัลไม่ตรงแบบเช่น $\int_0^\infty f(x)dx$ ขึ้นอยู่กับความเป็นไปของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่ามาก ต่อไปนี้เป็นการทดสอบแบบเปรียบเทียบ (comparison test) ซึ่งใช้บ่อย ๆ ในการแสดงว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือลู่ออก สมมติว่าฟังก์ชัน f และ g ต่อเนื่องบนช่วง $a \leq x < b$ และ b เป็นจำนวนใด ๆ หรือ ∞

ทฤษฎีบท 2.15 *ให้* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *สำหรับ* $a \leq x < b$ *แล้วถ้า* $\int_a^b g$ *ลู่เข้าแล้ว* $\int_a^b f$ *ลู่เข้าด้วยและ* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$



รูปที่ 2.12

พิสูจน์ จากรูป 2.12 จะทำให้เข้าใจทฤษฎีบทดีขึ้น ถ้าพื้นที่ใต้เส้น $y = g(x)$ มีค่าแน่นอนค่าหนึ่งดังนั้นพื้นที่ใต้เส้น $y = f(x)$ ย่อมมีค่าแน่นอนค่าหนึ่งด้วย เพราะว่าในที่นี้ f และ g ต่างมีค่าเป็นบวก ต่อไปนี้จะเป็นวิธีการพิสูจน์

กำหนด F และ G โดยให้ $F(r) = \int_a^r f$ และ $G(r) = \int_a^r g$ เนื่องจาก $f(x) \leqslant g(x)$ ดังนั้น $F(r) \leqslant G(r)$ สำหรับทุก $r < b$ เนื่องจากอินทิกรัลของ g ลู่เข้าดังนั้น $\lim\limits_{r\to b^-} G(r)$ มีค่าเนื่องจาก f เป็นบวกดังนั้น F เพิ่มอย่างเดียวเนื่องจาก $F(r)$ มีขอบเขตข้างบนคือ $G(r)$ และเพราะฉะนั้นโดย $\lim\limits_{r\to b^-} G(r)$ มีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง ดังนั้น $\lim\limits_{r\to b^-} F(r)$ มีค่าและ

$$\lim_{r\to b^-} F(r) = \int_a^b f \leqslant \lim_{r\to b^-} G(r) = \int_a^b g \quad \square$$

บทแทรกของทฤษฎีบทนี้บางครั้งเรียกว่าการทดสอบแบบอัตราส่วน (ratio test) สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

บทแทรก *ให้* $f(x) \geqslant 0$ *และ* $g(x) \geqslant 0$ *สำหรับ* $a \leqslant x < b$ *และให้*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

เมื่อ $0 < L < \infty$ *แล้วอินทิกรัล* $\int_a^b f$ *และ* $\int_a^b g$ *ทั้งสองลู่เข้าหรือไม่ก็ทั้งสองลู่ออก*

พิสูจน์ ถ้า $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ย่อมมี x_0 ระหว่าง a และ b ซึ่ง $x_0 < x < b$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $-\varepsilon + L < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + L$

เนื่องจาก $L > 0$ สำหรับ $\varepsilon < L$ ใด ๆ ดังนั้น

$$M < \frac{f(x)}{g(x)} < N \text{ ซึ่ง } M > 0 \text{ และ } N > 0$$

ดังนั้น $f(x) < Ng(x)$ และ $g(x) < \frac{f(x)}{M}$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_0 < x < b$

โดยใช้ทฤษฎีบท 2-15 จึงพบว่า ถ้า $\int_a^b g$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^b f$ ลู่เข้าด้วย และถ้า $\int_a^b g$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^b f$ ลู่ออกด้วย □

โดยใช้การทดลอบเหล่านี้มีรายการอินทิกรัลที่ทราบกันดีเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบที่ใช้กันบ่อย ๆ คือ

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \text{ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ } p > 1$$

(2–34) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ } p < 1$$

$$\int_a^c \frac{dx}{|c-x|^p} \text{ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ } p < 1$$

ตัวอย่าง $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ ลู่เข้า เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรต $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}} <$ ในช่วง $(0, 1]$ และ $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ บนช่วง $[1, \infty)$ อินทิกรัล $\int_0^\infty \frac{dx}{x+x^2}$ ลู่ออกเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x+x^2}} = 1$ และ $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ ในช่วง $[1, \infty)$ ซึ่ง $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ลู่ออก

การทดสอบแบบเปรียบเทียบเหล่านี้ใช้ได้เมื่อตัวถูกอินทิเกรตมีค่าบวกในช่วงของอินทิกรัล อย่างไรก็ดีผลลัพธ์ต่อไปก็มักใช้กันบ่อย ๆ เพื่อทำให้เป็นกรณีทั่ว ๆ ไปยิ่งขึ้น

ทฤษฎีบท 2.16 $\int_a^b f$ *ย่อมลู่เข้า ถ้า* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *ลู่เข้า*

พิสูจน์ เนื่องจาก $f(x)$ อยู่ระหว่าง $-|f(x)|$ และ $|f(x)|$,

$$0 \leqslant |f(x)| + f(x) \leqslant 2|f(x)|$$

ถ้า $\int_a^b |f|$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^b \left[f(x) + |f(x)|\right]dx$ ลู่เข้าด้วย

เพราะฉะนั้น $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า □

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการใช้ทฤษฎีบทนี้โดยทฤษฎีบทแล้วมา

(i) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ ลู่เข้า เนื่องจาก $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$

(ii) $\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\, dx$ ลู่เข้าเนื่องจาก $\frac{|\cos(\frac{1}{x})|}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$ ลู่เข้าเนื่องจาก $\left|x^{-\frac{3}{2}} \sin x\right| \leqslant x^{-\frac{3}{2}}$ บนช่วง $[1,\infty)$

และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} = 1$

การลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f$ กล่าวได้ว่าลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (absolutely convergent) ถ้า $\int_a^b |f|$ ลู่เข้าและลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ถ้า $\int_a^b |f|$ ลู่ออก ตัวอย่างการลู่เข้าทุกตัวอย่างที่ได้ศึกษามาแล้วเหล่านี้เป็นการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทั้งสิ้น ตัวอย่างสำหรับการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขก็คือ $\int_1^\infty x^{-1} \sin x\, dx$ ถ้าจะใช้วิธีการดังกล่าวข้างต้นไม่สามารถทราบได้เนื่องจาก $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{x}$ ในช่วง $[1, \infty)$ แต่ $\int_1^\infty x^{-1}dx$ ลู่ออก ดังนั้นจึงไม่สามารถ

ใช้ทฤษฎีบท 2.16 ได้และวิธีนี้จึงไม่ได้คำตอบว่า $\int_1^{\infty} x^{-1}\sin x\, dx$ และ $\int_1^{\infty} x^{-1}|\sin x| dx$ อันไหนลู่เข้าหรือลู่ออกอย่างไร การพิสูจน์ว่าอันแรกลู่เข้าและอันที่สองลู่ออก

กลับมาใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) ที่ว่า

$$(2\text{–}35) \qquad \int_a^b f(x)\, dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$$

นำมาใช้กับอินทิกรัลดังกล่าวจึงได้

$$\begin{aligned}\int_1^r \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_1^r \frac{1}{x}\, d(-\cos x)\\ &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^r + \int_1^r \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{\cos r}{r} + \cos(1) - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2}\, dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{r\to\infty^-} r^{-1}\cos r = 0$ จึงได้ว่า

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos(1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

และ $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เนื่องจาก $|x^{-2}\cos x| \leqslant x^{-2}$ ในช่วง $[1,\infty)$

ซึ่งแสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ลู่เข้า

การแสดงว่า $\int_1^{\infty} x^{-1}\sin x\, dx$ ไม่ใช่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

$$\int_1^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

เนื่องจากค่าน้อยที่สุดของ $\frac{1}{x}$ ในช่วง $[n\pi, (n+1)\pi]$ คือ $\frac{1}{(n+1)\pi}$

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx\\ &\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi} \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

และ $\sum_{n=1}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{2}^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \log \frac{m+1}{2}$$

ดังนั้น $\int_{1}^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} \leqslant \int_{1}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{2}{\pi} \log \frac{m+1}{2}$

นั่นคือ $\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ ลู่ออก

แต่ละส่วนของการอินทิเกรตทีละส่วน อาจใช้ในกรณีอื่น ๆ ด้วย ในการศึกษาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{2}^{\infty} \frac{\cos x}{\log x} dx$ เริ่มด้วยการอินทิเกรตทีละส่วน (ใช้ ∞ เป็นตัวย่อของการลิมิตที่กล่าวแล้ว)

$$\int_{2}^{\infty} \frac{\cos x}{\log x} dx = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{\log x} d(\sin x)$$

$$= \frac{\sin x}{\log x}\Big|_{2}^{\infty} - \int_{2}^{\infty} \sin x \, d\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= -\frac{\sin 2}{\log 2} + \int_{2}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\log x)^2} dx$$

เนื่องจาก $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ ลู่เข้า (อย่างสัมบูรณ์) ดังนั้น

$\int_{2}^{\infty} \frac{\cos x}{\log x} dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.17 (Dirichlet Test) *ให้* f, g *และ* g′ *ต่อเนื่องบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต* $c \leqslant x < \infty$ *แล้วอินทิกรัล* $\int_{c}^{\infty} f(x)g(x)dx$ *ลู่เข้าถ้า* f และ g *มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้*

i) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

ii) $\int_c^\infty |g'|$ *ลู่เข้า*

iii) $F(r) = \int^r f$ *มีขอบเขตบนช่วง* $c \leqslant r < \infty$

พิสูจน์ จาก $\int_c^r fg = \int_c^r g(x)dF(x)$

$$= F(x)g(x)\Big|_c^r - \int_c^r F(x)dg(x)$$

$$= F(r)g(r) - F(c)g(c) - \int_c^r F(x)g'(x)dx$$

จากโจทย์ $|F(r)| \leqslant M$ สำหรับทุก $r \geqslant c$ ดังนั้น

$$|F(r)\ g(r)| \leqslant M\,|g(r)|,\ \lim_{r\to\infty} F(r)g(r) = 0$$

$|F(x)g'(x)| \leqslant M|\,g'(x)|$ และโดยโจทย์

$\int_c^\infty |g'(x)|dx$ ลู่เข้า

ดังนั้นโดยการทดสอบแบบเปรียบเทียบจึงได้ว่า

$$\int_c^\infty F(x)g'(x)dx \text{ ลู่เข้า}$$

นั่นคือ $\lim_{r\to\infty^-} \int_c^r fg$ หาค่าได้ □

สองกรณีพิเศษที่ใช้ทดสอบกันบ่อย ๆ

บทแทรก 1 $\int_c^\infty fg$ *ลู่เข้าถ้า* f *คล้องตามเงื่อนไข* (iii) *และ* $g(x)$ *เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวเข้าสู่* 0 *เมื่อ* $x\to\infty$

พิสูจน์ เมื่อ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียว ดังนั้น $g'(x)$ มีค่าลบเสมอ

$$\int_c^r |\ g'(x)\ |\ dx = -\int_c^r g'(x)\ dx = -g(x)\Big|_c^r = g(c) - g(r)$$

และ $\lim_{r\to\infty} \int_c^r \left|g'(x)\right| dx$ หาค่าได้คือ $g(c)$

นั่นคือ $\int_c^\infty fg$ ลู่เข้า

บทแทรก 2 *ถ้า* g *อยู่ใน* C^1 *สำหรับ* $c \leqslant x < \infty$ *และ* $g(x)$ *เป็นฟังก์ชันลดเข้าสู่ศูนย์เมื่อ* $x\to\infty$ *แล้ว* $\int_c^\infty g(x)\ \sin x\, dx$ *และ* $\int_c^\infty g(x)\ \cos x\, dx$ *ลู่เข้า*

บทแทรกนี้เป็นผลจากทฤษฎีบท 2.17 และบทแทรก 1 เพราะว่าถ้าให้ $F(r) = \int_c^r \sin x\ dx$ หรือให้ $F(r) = \int_c^r \cos x\, dx$ ย่อมได้ว่า $F(r)$ มีขอบเขตบน $c \leqslant r < \infty$ ซึ่งคล้องตามเงื่อนไข (iii) ดังนั้นโดยบทแทรก 1 $\int_c^\infty g(x)\ \sin x\, dx$ และ $\int_c^\infty g(x)\ \cos x\, dx$ ลู่เข้า

พิจารณาอินทิกรัล

$$(2-36)\qquad \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

จะพิสูจน์ว่าอินทิกรัลนี้ลู่เข้า ดังนั้นแสดงว่า $\int_c^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าโดยที่ไม่ต้องคำนึงว่า $f(x)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$ - โดยใช้การแทนค่าโดยให้ $u = x^2$ จึงได้อินทิกรัลใหม่เป็น

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\, du$$

เมื่อ u เข้าใกล้ 0 ตัวถูกอินทิเกรตเข้าใกล้ $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ จึงได้

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$$

$\left|\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}}$ ในช่วง $[0, 1]$ ดังนั้น $\int_0^1 \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$ ลู่เข้า

และ $\int_1^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$ ลู่เข้าตามบทแทรก 2 ดังนั้น $\int_0^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\, du$ ลู่เข้า นั่นคือ $\int_0^\infty \cos(x^2)du$ ลู่เข้าด้วย

อีกตัวอย่างหนึ่ง $\int_0^1 x^{-1} \sin (x^{-1})dx$ กลายเป็น $\int_1^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ เมื่อแทนค่า $x = \frac{1}{u}$ ดังนั้น $\int_0^1 x^{-1} \sin (x^{-1})dx$ ลู่เข้า

การศึกษาอินทิกรัลไม่ตรงแบบสองชั้นและสามชั้นต่อไปก็เป็นแบบเดียวกันกับที่กล่าวแล้วเพียงแต่มิติเปลี่ยนไป สิ่งสำคัญที่แตกต่างกันคือไม่ได้กล่าวถึงการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข เหตุผลจะได้กล่าวในภายหลัง ในต่อไปนี้จะพิจารณาเฉพาะตัวถูกอินทิเกรตที่มีค่าเป็นบวก ให้ D เป็นเซตในระนาบที่มีขอบเขต และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีค่าเป็นบวกใน D ถ้าตกลงได้เช่นนี้ $\iint_D f$ เป็นการวัดปริมาตรของบริเวณ V ใน 3 – ปริภูมิที่อยู่เหนือบริเวณ D และปิดกั้นด้วยผิว $z = f(x,y)$ แล้วจึงถูกนำไปสู่นิยามต่อไปนี้

นิยาม 2.7 $\iint_D f$ *คือ* $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ *เมื่อ* $D_n = D \cap R_n$ *และ* $\{R_n\}$ *เป็นลำดับขยายของสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งเขตของจุดข้างในปกคลุมระนาบ*

เช่นเดียวกับในทฤษฎีบท 2.13 ทฤษฎีบท Heine – Borel แสดงว่าค่าที่คำนวณได้ไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกลำดับ $\{R_n\}$ ในการแสดงให้เห็นสิ่งเหล่านี้ พิจารณาเซต D ในจตุภาค (quadrant) ที่หนึ่ง และ $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ เลือก R_n เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและจุดยอดเป็น $(\pm n, \pm n)$

$$\iint_{D_n} f = \int_0^n \int_0^n xye^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^n dx \int_0^n xe^{-x^2} ye^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^n xe^{-x^2} dx \int_0^n ye^{-y^2} dy$$

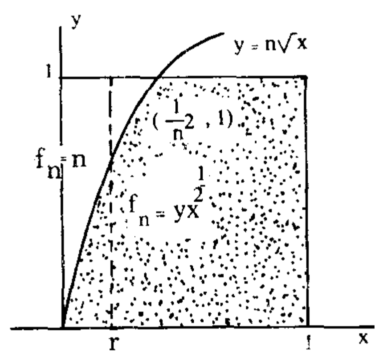
$$= \left[\frac{1-e^{-n^2}}{2}\right]^2$$

และ $\iint_D f = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \frac{1}{4}$

เมื่อ D เป็นเซตที่มีขอบเขต แต่ f ไม่มีขอบเขต บริเวณ V ที่อยู่เหนือ D และอยู่ใต้เส้น $z = f(x,y)$ ซึ่งไม่มีขอบเขตใน 3 ปริภูมิ ปริมาตรหาได้โดยฟังก์ชัน f_n เมื่อ $f_n(p) = \min\left[n, f(p)\right]$ ค่านี้มีขอบเขตและปริมาตรของ V ก็คือ $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_D f_n$ ซึ่งยอมรับว่าเป็นนิยามของ $\iint_D f$ เมื่อลิมิตหาค่าได้ ในกรณีที่ง่าย ๆ ซึ่งจะแนะนำต่อไปนี้ เป็นขบวนการที่ยุ่งยากแต่ก็สามารถที่จะทำความเข้าใจได้ เช่น ให้ D เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่หนึ่งหน่วยและมีจุดยอดอยู่ที่ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) และ $f(x,y) = yx^{-\frac{1}{2}}$ ตัด f ที่ความสูง n จึงพบว่า $f(p) \leqslant n$ เมื่อ $y \leqslant n\sqrt{x}$ และ

$$f_n(p) = \begin{cases} yx^{-\frac{1}{2}} & \text{เมื่อ } y \leqslant n\sqrt{x} \\ n & \text{เมื่อ } y > n\sqrt{x} \end{cases}$$

ดังรูป 2.13



รูป 2.13

ดังนั้น $$\iint_D f_n = \int_0^{\frac{1}{n^2}} dx \int_{n\sqrt{x}}^{1} n\, dy + \int_0^{\frac{1}{n^2}} dx \int_0^{n\sqrt{x}} yx^{-\frac{1}{2}}\, dy + \int_{\frac{1}{n^2}}^{1} dx \int_0^{1} yx^{-\frac{1}{2}}\, dy$$
$$= \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

จึงได้ $\iint_D f = 1$ ในกรณีนี้อาจใช้อินทิกรัลอันเดียวก็ย่อมได้ตัวถูกอินทิเกรต $yx^{-\frac{1}{2}}$ d o เนื่อง ใน D ยกเว้นที่ขอบ $x = 0$ ให้ D_r เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งปิดล้อมด้วยเส้น $x = 1$, $x = r$, $y = 0$ และ $y = 1$ เมื่อ $r \to 0^+$, $D_r \to D$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องใน D_r จึงอินทิเกรต f บน D_r และกำหนด $\iint_D f$ ได้โดย $\lim_{r\to 0} \iint_{D_r} f$ จึงได้

$$\iint_{D_r} f = \int_r^1 dx \int_0^1 yx^{-\frac{1}{2}}dy = \int_r^1 dx\left[\frac{y^2}{2\sqrt{x}}\right|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_r^1 dx \frac{y^2}{2\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{r}$$

และ $\iint_D f = 1$

ต่อไปนี้จะแนะนำนิยามทั่ว ๆ ไป

นิยาม 2.8 *ให้ D เป็นเขตเปิดซึ่งขอบเขตประกอบด้วยเส้นเรียบ (smooth curve) จำนวนจำกัดและจุดเอกเทศ (isolated points) และให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีค่าเป็นบวกบน D แล้ว* $\iint_D f$ *เข้าและมีค่า c ก็ต่อเมื่อมีลำดับขยายของเขตปิด* $\{D_n\}$ *ซึ่งเข้า* D_n *ในทางที่ทุกจุดของ D เป็นจุดข้างในของ* D_n *ในขณะที่แต่ละ* D_k *อยู่ใน* closure *ของ D และ f มีขอบเขตในทุก* D_k *และ*

$$c = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$$

เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ความมีอยู่ของค่าลิมิตและค่าของอินทิกรัลอิสระจากการเลือกลำดับ $\{D_n\}$ เพื่อเป็นการสนับสนุนนิยาม 2.8 จงคำนวณอินทิกรัลของ $(x^2 + y^2)^{-\lambda}$ บนจานกลมมีรัศมีหนึ่งหน่วยความยาว จึงได้ $D = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ และ $D_n = \{(x,y) : \frac{1}{n} = \rho \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\}$ และคำนวณ $\iint_{D_n} (x^2 + y^2)^{-\lambda}dxdy$ เพื่อให้การคำนวณง่ายเข้า จึงเปลี่ยนเป็นพิกัดเชิงขั้วโดยให้ $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, $dxdy = r\, dr\, d\theta$ จึงได้

$$\iint_{D_n} (x^2+y^2)^{-\lambda}dxdy = \int_{\rho}^{1} dr \int_{0}^{2\pi} r^{-2\lambda} r d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\rho}^{1} r^{1-2\lambda}dr$$

ดังนั้น $\iint_{D}(x^2+y^2)^{-\lambda}\,dxdy = \lim_{\rho\to 0^+} 2\pi\int_{\rho}^{1} r^{1-2\lambda}dr$

$$= 2\pi\int_{0}^{1} r^{1-2\lambda}dr$$

ซึ่งลู่ออกเมื่อ $\lambda \geqslant 1$ และลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{1-\lambda}$ เมื่อ $\lambda < 1$

ตัวอย่างต่อไปอาจช่วยแสดงว่าทำไมจึงได้กล่าวไกลจากจะกล่าวว่าตัวถูกอินทิเกรตต้องมีค่าเป็นบวก ลองคำนวณ $\iint_D f$ เมื่อ D เป็นจตุภาคที่หนึ่งและ $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ โดยวิธีที่ได้เคยทำมาแล้วคือเลือกลำดับของบริเวณ $\{D_n\}$ ที่ลู่เข้าสู่ D แล้วทดสอบ $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ สมมติว่า D_n เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจุดยอดอยู่ที่ (0,0), (0,n), (n,0), (n,n) แล้ว

$$\iint_{D_n} f = \int_0^n dx \int_0^n \sin\left(x^2+y^2\right) dy$$

$$= \int_0^n \sin(x^2)\,dx \int_0^n \cos(y^2)\,dy + \int_0^n \cos(x^2)\,dx \int_0^n \sin(y^2)\,dy$$

$$= 2\int_0^n \sin(x^2)\,dx \int_0^n \cos(x^2)\,dx$$

และ $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = 2\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$

แต่ละอินทิกรัลข้างบนสามารถแสดงได้ว่าลู่เข้า ซึ่งได้กล่าวแล้วใน (2–36) โดยประการแรกเปลี่ยนตัวแปรเป็น $u = x^2$ และใช้บทแทรก 2 ของทฤษฎีบท 2.17 โดยใช้วิธีพิเศษในฟังก์ชันของจำนวนเชิงซ้อนโดยปรับปรุงการอินทิเกรตตามเส้นชั้นความสูง (contour integation) ในระนาบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นไปได้ที่จะแสดงได้ว่า

(2–37) $\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx = \int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$

[(2–37) เรียกว่า Fresnel integrals และปรากฏในเรื่องแสง]

สมมติว่า $2\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ เป็นค่าของ $\iint_D f$ ดังกล่าว อย่างไรก็ดีลองเลือก $\{D_n\}$ ใหม่ ให้ D_n เป็นส่วนของจานกลมในจตุภาคแรกคือ

$D_n = \{(x,y) : 0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant n\}$ โดยใช้พิกัดเชิงขั้วจึงได้

$$\iint_{D_n} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n r \sin(r^2)\, dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[1 - \cos(n^2)\right]$$

จึงได้ $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ หาค่าไม่ได้

ในตัวอย่างนี้สำหรับสองตัวเลือก $\{D_n\}$ ที่เลือกขึ้นมาอย่างธรรมดา ๆ ซึ่งนำมาซึ่งผลลัพธ์ที่ต่างกัน

กุญแจสำหรับปัญหาประหลาดนี้ก็คือเป็นอินทิกรัลของ $|f|$ บน D ลู่ออกนั่นเอง

ทฤษฎีบท 2.18 *ให้* f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* D *และ* $\iint_D |f|$ *ลู่เข้าแล้ว* $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f$ *หาค่าได้และมีค่าเดียวไม่ว่าจะเลือกลำดับ* $\{D_n\}$ *ใด ๆ ที่ลู่เข้าสู่* D

พิสูจน์ ทฤษฎีบทนี้เป็นการวิเคราะห์ทฤษฎีบท 2.16 และได้พิสูจน์โดยใช้ 2– ปริภูมิเป็นการวิเคราะห์การทดสอบแบบเปรียบเทียบในทฤษฎีบท 2.15 แต่แบบฝึกหัดข้อ 7

สำหรับจุดใด ๆ $p \in D,\ 0 \leqslant f(p) + |f(p)| \leqslant 2|f(p)|$

ดังนั้นให้ $\iint_D \{f + |f|\}$ ลู่เข้าสู่ A และ $\iint_D |f|$ ลู่เข้าสู่ B

แล้วสำหรับลำดับใด ๆ $\{D_n\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ D

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \{f + |f|\} = A \text{ และ } \lim_{n\to\infty} \iint_{D} |f| = B$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f = \lim_{n\to\infty} \left\{\iint_{D_n} (f + |f|) - \iint_V |f|\right\}$

$$= A - B \quad \square$$

จากผลลัพธ์ข้างบนทำให้สามารถพิสูจน์การลู่เข้าได้หลายจำพวกสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบซึ่งตัวถูกอินทิเกรตมีค่าทั้งเป็นบวกและลบ จึงทราบได้โดยพลันว่าอินทิกรัลของ $\sin(x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ บนระนาบทั้งระนาบลู่เข้า อย่างไรก็ดียังไม่มีการวิเคราะห์สำหรับการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบหรือสำหรับการทดสอบแบบ Dirichlet สำหรับอินทิกรัลหลายชั้น เหตุผลอยู่ที่นิยามสำหรับการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบสองชั้นและความเป็นอิสระในการเลือก $\{D_n\}$ ซึ่งปรากฏในนิยาม ในขณะนี้ก็เพียงกล่าวได้ว่า $\iint_D f$ หาค่าได้เมื่อ $\lim_{n\to\infty}\iint_D f$ หาค่าได้และอิสระจากการเลือกบริเวณ D_n ซึ่งจำกัดเพียงสิ่งจำเป็นว่าทุกเซตปกคลุมแน่นเป็นเซตของจุดข้างในของ D จะต้องถูกปกคลุมโดย D_n เมื่อ n มีค่ามาก ด้วยนิยามเหล่านี้จึงได้ว่า $\iint_D f$ หาค่าไม่ได้โดยปราศจากการหาค่าได้ของ $\iint_D |f|$ คือ $\iint_D |f|$ ลู่ออกลองพิสูจน์สั้น ๆ ดังต่อไปนี้

ให้ $f_1 = (|f| + f)/2$ และ $f_2 = (|f| - f)/2$ จะสรุปว่า $\iint_D f_i$ ลู่ออก เนื่องจาก $f_1 f_2 = 0$ ดังนั้นเซตเมื่อ f_1 และ f_2 เป็นบวกไม่พบกันเลย เลือก $\{D_n\}$ ให้เหมาะกับ f_1 จึงเหมาะกับ f_2 ด้วย ดังนั้น $\iint_{D_n} f_1$ ลู่ออกได้เร็วกว่า $\iint_{D_n} f_2$ เป็นผลให้ $\iint_{D_n} f$ ซึ่งเป็นผลต่างของทั้งสองดังกล่าวลู่ออกด้วย

ในตัวอย่างต่อไปเป็นการเสริมพลังในการนี้โดยจะพยายามอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ บนสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีพื้นที่หนึ่งหน่วย S ซึ่งจุดยอดตรงข้ามเป็น (0,0) และ (1,1) จึงได้อินทิกรัลซ้ำสองอันที่ต่างกันต่อไปนี้

(2–38) $$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

(2–39) $$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 \frac{-dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

สังเกตว่าตัวถูกอินทิเกรต $f(x, y)$ ต่อเนื่องที่ทุกจุดในสี่เหลี่ยมจัตุรัส S ยกเว้นที่ $(0, 0)$ ซึ่งเป็นจุดที่ f ไม่มีขอบเขตอาจมีค่าเป็นทั้งบวกและลบ ถ้าจะใช้วิธีที่สามต่อไปโดยอินทิเกรต f บน S โดยใช้อินทิเกรตบนส่วนของจานกลมที่อยู่บนจตุภาคแรกซึ่งมีรัศมี ρ โดยยกเว้นที่จุดกำเนิด แล้วให้ $\rho \to 0$ ค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบนี้เป็น 0 สิ่งที่จะยึดในขณะนี้ว่า ถ้า $\iint_S |f|$ ลู่ออก จะสรุปการลู่เข้าของ $\iint_S f$ ไม่ได้

ได้เคยกล่าวไว้แล้วแต่ต้นเกี่ยวกับการหาค่าของอินทิรัลไม่ตรงแบบ และได้ใช้วิธีประมาณค่าที่เคยใช้มาแล้ว ประการแรกจะต้องแทนที่ช่วงเดิม หรือเซตอื่นซึ่งการอินทิเกรตโดยเซตที่มีขอบเขตตัวอย่างเช่น ต้องการประมาณค่า $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ ให้ได้ค่าผิดไปไม่เกิน .001 สังเกตว่า

$$\left| \int_R^\infty e^{-t^2} dt \right| \leqslant \int_R^\infty e^{-t}\, dt = e^{-R}$$

เมื่อเลือก R ให้มีค่ามาก ๆ ให้ได้ $e^{-R} < .0005$ แล้วหาค่า $\int_0^R e^{-t^2} dt$ โดยใช้กฎของซิมสันให้ได้ค่าความผิดพลาด .0005 ซึ่งเป็นคำตอบที่ต้องการ เครื่องมือเฉพาะอาจเป็นเครื่องมือที่จะหาฟังก์ชันเพื่อนำมาประมาณค่าอาจเป็นจำนวนคงที่หรืออาจเป็นฟังก์ชัน

ต่อไปนี้จะหาค่าแท้จริงของอินทิกรัลที่กล่าวข้างต้น โดยเริ่มจากการแทนตัวแปรในการอินทิเกรต t ด้วย x และโดย y และพิจารณาผลคูณของอินทิกรัลผลลัพธ์ แล้วเปลี่ยนอินทิกรัลนี้เป็นอินทิกรัลสองชั้น

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

ให้ R มีค่าเพิ่มขึ้นและให้ I เป็นค่าที่ต้องการหา จึงได้

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

เมื่อ D เป็นจตุภาคแรก ตัวถูกอินทิเกรตมีค่าเป็นบวกและอินทิกรัลลู่เข้าสามารถคำนวณอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยลำดับขยายของจานกรมในจตุภาคแรกโดยการเปลี่ยนเป็นพิกัดเชิงขั้วจึงได้

$$I^2 = \lim_{R\to\infty} \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^R = \frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น

(2–40) $$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

วิธีการคำนวณค่าอินทิกรัลเฉพาะจะได้ให้ต่อไปในบทต่อ ๆ ไป

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = e^x$, $y = 2 \cosh x$ เมื่อ $x \geqslant 0$

2. จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลต่อไปนี้

   a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

   c) $\int_0^{\infty} \sin 2x \, dx$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

   e) $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ f) $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} \, dx$

   g) $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ h) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

3. จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลต่อไปนี้

   a) $\int_0^{\infty} e^x \sin e^x dx$ b) $\int_0^{\infty} x \sin e^x dx$

   c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (\sec x) dx$ d) $\int_0^1 \frac{\sin (\frac{1}{x}) dx}{x}$

e) $\int_0^1 x \log x \, dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} \, d\theta$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\sec x} \, dx$

4. สำหรับค่าใดของ $\propto$ และ β ที่ $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\propto + x^\beta}$ ลู่เข้า

5. สำหรับค่าใดของ $\propto$ และ β ที่ $\int_0^\infty x^\propto \left| x - 1 \right|^\beta dx$ ลู่เข้า

6. ให้ D เป็นบริเวณสามเหลี่ยมที่ไม่มีขอบเขตในครึ่งขวาของระนาบซึ่งปิดล้อมด้วยเส้น $y = 0$ และ $y = x$ และให้ $f(x,y) = x^{-\frac{3}{2}} e^{y-x}$ แล้ว $\iint_D f$ ลู่เข้าหรือไม่

7. ให้ $0 \leqslant f(p) \leqslant g(p)$ สำหรับทุก $p \in D$ และสมมติว่า $\iint_D g$ ลู่เข้า จงพิสูจน์ว่า $\iint_D f$ ลู่เข้าด้วย

8. จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2 + 1}$$

เมื่อ D เป็นจตุภาคที่หนึ่ง

9. จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัล

$$\iiint \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

เมื่ออินทิเกรตบน 3 – ปริภูมิ

10. จงคำนวณ (2 – 38) และ (2 – 39)

11. สำหรับจำนวนจริง α ใด ซึ่งมีจำนวน c ซึ่ง

$$\int_0^c \frac{dx}{1 + x^\alpha} = \int_c^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha}$$

12. ให้ $F(x,y) = y^2/\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ และให้ S เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจุดยอดตรงข้ามเป็น

$(0,0)$ และ $(1,1)$

(a) จงแสดงว่า ทำไม $\iint_S F$ หาค่าได้

(b) ด้วยการอินทิกรัลซ้ำจะเลือกอันใด

(c) จงแสดงว่า $\iint_S F = \log(1+\sqrt{2})$