บทที่ 1
การหาอนุพันธ์
Differentiation

1.1 คำนำ

ความสำคัญส่วนใหญ่ในข้อแตกต่างระหว่างแคลคูลัสเบื้องต้นกับแคลคูลัสขั้นสูง (Advanced Calculus) ก็คือเริ่มต้นค้นหาบางสิ่งบางอย่างที่ซับซ้อนของปัญหาและเทคนิคเพื่อกระทำกับฟังก์ชันที่มีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปร โดยเฉพาะอย่างยิ่งให้เกิดความคุ้นเคยกับความคิดในทางเรขาคณิตเบื้องต้นไม่เพียงแต่ในระนาบ และสามมิติเท่านั้น แต่มุ่งให้เข้าใจให้มิติสูง ๆ ขึ้นไปด้วย

ขบวนการทั้งหมดเพื่อทำความเข้าใจให้ชัดเจนในความหมายของพจน์ที่สำคัญในเรขาคณิต เช่น เส้นตรง ระนาบ วงกลม มุม ระยะทาง และอื่น ๆ ซึ่งรู้จักกันมาแล้วในคณิตศาสตร์ตอนต้น ๆ ในตอนต้น ๆ มักจะต้องการสิ่งที่สามารถมองเห็นได้ในปริภูมิ (space) แล้ว ตอบปัญหาในทางเรขาคณิตเกี่ยวกับเรื่องราวที่มองเห็นหรือสัมผัสสิ่งเหล่านั้นได้

สำหรับกรณีที่ยุ่งยากจะได้เรียนรู้โดยเริ่มงานจากแผนภาพสองมิติของเหตุการณ์ที่เป็นจริง ในบทนี้จะได้ศึกษาเพื่อทำความเข้าใจคุณสมบัติของอนุพันธ์ค่าเป็นเวกเตอร์ Df ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลาย ๆ ตัว บางกรณีเรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของ f และสัมพันธ์กับอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) และอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f อย่างไร จะมีทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับตัวแปรตัวเดียวรวมทั้งทฤษฎีบทค่าตัวกลาง (mean value theorem) และ *l' Hospital's rule* จะได้ศึกษา *Taylor's theorem* สำหรับตัวแปรตัวเดียวและหลายตัวในรูปทฤษฎีบทค่าตัวกลางของฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวแปร

การศึกษากฎลูกโซ่ (Chain rule) สำหรับการหาอนุพันธ์และจะแสดงให้เห็นในกรณีที่ซับซ้อนรวมทั้งการเปลี่ยนตัวแปร ซึ่งการเขียนแผนภาพก็จะช่วยให้เข้าใจและง่ายต่อการเข้าใจการศึกษาและการประยุกต์การหาอนุพันธ์ดีขึ้น ในปัญหาที่สำคัญ ๆ และตำแหน่งของค่าวิกฤตต่าง ๆ

1.2 ทฤษฎีบทค่าตัวกลางและ l' Hospital's rule

ตัวอย่างที่แน่นอนและเข้าใจกันในคุณสมบัติของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว จากแคลคูลัสเบื้องต้นที่ว่า f กล่าวได้ว่าหาอนุพันธ์ได้ (differentiable or to have a derivative) ที่ x_0 ถ้า f ถูกกำหนดขึ้นให้มีค่าบนย่านของจุด x_0 (neighbourhood of the point x_0) และถ้า $f'(x_0)$ มีค่าและกำหนดขึ้นโดย

$$(1-1) \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า

$g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ มี x_0 เป็นความไม่ต่อเนื่องขจัดได้ (removable discontinuity)

ความไม่ต่อเนื่องอาจแบ่งออกเป็นความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้ และ essential ถ้า $f(p_0)$ มีค่า และ $L = \lim_{p\to p_0} f(p)$ มีค่าแต่ $L \neq f(p_0)$ แล้ว p_0 เป็นความไม่ต่อเนื่องสำหรับ f อย่างไรก็ดีอาจเปลี่ยนแปลงตามนิยามสำหรับ f ที่ p_0 ถ้าจะสร้างฟังก์ชันใหม่ F โดยให้ $F(p) = f(p)$ สำหรับทุก p ในโดเมนของ f ยกเว้น p_0 และให้ $F(p_0) = L$ ดังนั้น F ต่อเนื่องที่ p_0 อีกอย่างหนึ่งถ้าฟังก์ชัน f กำหนดค่าไม่ได้ที่ p_0 แต่ $L = \lim_{p\to p_0} f(p)$ มีค่าแล้วอาจกำหนดค่า $f(p_0)$ เป็น L แล้วเพิ่มโดเมนของ f ให้รวม p_0 เข้าไว้ด้วย ดังนั้น f ต่อเนื่อง ที่ p_0 ในทั้งสองกรณีที่กล่าวแล้วข้างต้นอาจกล่าวได้ว่าที่ p_0 เป็นความไม่ต่อเนื่อง

ที่ขจัดได้สำหรับ f ถ้า $\lim_{p \to p_0} f(p)$ หาค่าไม่ได้ p_0 กล่าวได้ว่าเป็นความไม่ต่อเนื่องแบบ essential สำหรับ f เนื่องจากไม่สามารถกำหนดค่าสำหรับ $f(p_0)$ เพื่อให้ f ต่อเนื่องที่ p_0 ได้

การประยุกต์แคลคูลัสในการหาอนุพันธ์ที่พบกันบ่อย ๆ ก็คือปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (maximum–minimum problem) กล่าวว่า f มีค่าสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum) ที่ x_0 ถ้ามีย่าน U ประกอบด้วย x_0 ซึ่ง $f(x) \leqslant f(x_0)$ สำหรับทุก $x \in U$ สำหรับค่าต่ำสุดเฉพาะที่ (local minimum) นิยามได้คล้ายๆ กันว่า f มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0 ถ้ามีย่าน U ประกอบด้วย x_0 ซึ่ง $f(x) \geqslant f(x_0)$ สำหรับทุก $x \in U$ คำว่า f มีค่าสุดขีด (extreme value) ที่ x_0 หมายความว่า f อาจมีค่าสูงสุดเฉพาะที่หรือไม่ก็มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่ที่ x_0

ทฤษฎีบท 1.1 *ให้ $f(x)$ มีค่าบนย่านของ x_0 และมีค่าสุดขีดเฉพาะที่ (local extreme value) ที่ x_0 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x_0 และ $f'(x_0) = 0$*

พิสูจน์ สมมติว่า $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ สำหรับทุก h ซึ่ง $|h| < \delta$ และ

$$C = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ มีค่า}$$

ค่าลิมิตนี้อาจคำนวณได้จากการให้ h เข้าใกล 0 จากทางขวา และทางซ้าย จึงทราบว่า

$$C_1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0 \text{ และ}$$

$$C_2 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

เนื่องจาก f มีอนุพันธ์ที่ x_0 ดังนั้น $C = C_1 = C_2 = 0$

นั่นคือ $f'(x_0) = 0$ □

ข้อควรจำว่า $f'(x_0)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ถ้า x_0 เป็นจุดปลาย ซึ่งไม่ใช่จุดข้างใน (interior point) ของ U ดังนั้นในการใช้ทฤษฎีบทนี้ในปัญหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชันพิจารณาแยกจากกันกับความเป็นไปได้ของค่าสุดขีดที่จุดปลาย (endpoint) ของกราฟ

ทฤษฎีบท 1.2 *(Rolle's Theorem) ให้* f *ต่อเนื่องบนช่วงปิด* $[a,b]$ *และให้* $f'(x)$ *มีค่าสำหรับทุก* $x \in (a, b)$ *ถ้า* $f(a) = f(b)$ *แล้วย่อมมีจุด* x_0 *อย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่ง* $f'(x_0) = 0$

พิสูจน์ 1) ถ้า f มีค่าคงที่ก็สามารถเลือก x_0 ใดๆ ซึ่ง $x_0 \in (a, b)$ แล้ว $f'(x_0) = 0$ เสมอ

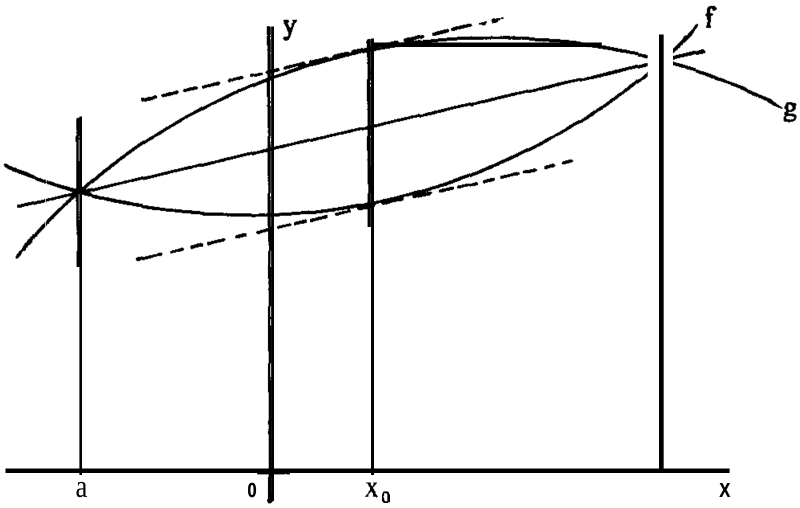
2) ถ้า f มีค่าไม่คงที่ แล้ว f ย่อมมีค่าสูงสุดเฉพาะที่ หรือต่ำสุดเฉพาะที่ที่จุดข้างใน $x_0 \in (a,b)$ และเนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ใน (a, b)
ดังนั้น $f'(x_0) = 0$ □

บทแทรก 1.2.1 *ถ้า* f *หาอนุพันธ์ได้บนช่วง* (a, b) *แล้วที่ค่าศูนย์ของ* f *ถูกแบ่งแยกโดยค่า* 0 *ของ* f'

บทแทรกนี้อธิบายให้เราทราบว่าถ้า $f(c) = 0$ และ $f(d) = 0$, c และ d อยู่ใน (a, b) หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งค่า $x_0 \in (c, d)$ ซึ่ง $f'(x_0) = 0$

บทแทรก 1.2.2 *ให้* f *และ* g *ต่อเนื่องบน* $[a, b]$ *และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง* (a, b) *สมมติว่า* $f(a) = g(a)$ *และ* $f(b) = g(b)$ *แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด* $x_0 \in (a, b)$ *ซึ่ง* $f'(x_0) = g'(x_0)$

สำหรับบทแทรก 1.2.2 จะยังไม่อธิบายใดๆ ในขณะนี้ ผู้อ่านจะเข้าใจเองจากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4 ในภายหลัง ถ้าจะพิจารณาจากภาพด้วยกราฟ ดังรูป 1.1 ผู้อ่านก็คงยังสงสัยอยู่ว่าจุด x_0 ดังภาพนั้นสำหรับ f และ g จะเป็น x_0 เดียวกันหรือไม่ที่ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสบน f และบน g ที่ x_0 เท่ากัน คือ



รูป 1.1

$$f'(x_0) = g'(x_0) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

ถ้าผู้อ่านติดตามอ่านต่อไปในผลการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4 ดังกล่าวแล้วข้างต้นก็จะพบเองว่ามี x_0 ซึ่ง

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ทฤษฎีบท 1.3 ***(Mean Value Theorem)*** *ให้* f *ต่อเนื่องบน* [a, b] *และให้* $f'(x)$ *มีค่าที่ทุก* $x \in (a, b)$ *แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด* $x_0 \in (a, b)$ *ซึ่ง*

(1–2) $$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0)$$

ทฤษฎีบทนี้ก็เช่นเดียวกับบทแทรก 1.2.2 ผลลัพธ์จะได้จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4

ทฤษฎีบท 1.4 ***(General Mean Value Theorem)*** *ให้* f *และ* g *ต่อเนื่องบนช่วง* [a, b] *และให้* $f'(x)$ *และ* $g'(x)$ *ทั้งสองมีค่าบน* (a,b) *แล้วย่อมมีอย่างน้อยหนึ่งจุด* $x_0 \in (a,b)$ *ซึ่ง*

(1–3) $$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

พิสูจน์ 1) ถ้า $f'(x) = 0$ บนช่วง (a,b) ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงที่

2) ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายเลยบนช่วง (a,b) ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียว (monotonic function)

3) ถ้า g เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) หรือฟังก์ชันกำลังหนึ่ง คือ $g(x) = x$ หรือ $g(x) = mx + c$ ทฤษฎีบทนี้ก็คือ ทฤษฎีบท 1.3

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้พิสูจน์ได้โดยสร้างฟังก์ชันพิเศษ F โดยการนำทฤษฎีบทของ Rolle มาใช้ดังนี้ ให้

$$F(x) = f(x) - Kg(x)$$

K เป็นค่าคงที่ที่จะเลือกในภายหลัง จากฟังก์ชัน F ข้างบนก็ทราบว่า F ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) โดยการใช้ทฤษฎีบทของ Rolle ให้ $F(a) = F(b)$ ด้วยวิธีนี้จึงได้

$$f(a) - K\,g(a) = f(b) - Kg(b)$$

หรือ $f(b) - f(a) = K(g(b) - g(a))$

จากสมการข้างบนมีกรณีที่อาจเป็นไปได้สองกรณีคือ

a) ถ้า $g(b) - g(a) = 0$ จึงได้ $f(b) - f(a) = 0$ แต่อย่างไรก็ดีสมการ (1–3) เป็นความจริงคือทั้งสองข้างต่างเป็น 0 เท่ากัน

b) ถ้า $g(b) - g(a) \neq 0$ ก็สามารถแก้สมการเพื่อหาค่า K และ F ได้ โดยทฤษฎีบทของ Rolle ย่อมมีจุด x_0 ที่ $F'(x_0) = 0$

เนื่องจาก $F'(x) = f'(x) - Kg'(x)$

จึงได้ $f'(x_0) = Kg'(x_0)$

เมื่อแทนค่า K ใน $f(a) - Kg(a) = f(b) - Kg(b)$ ก็จะได้สมการ (1–3) □

จากผลการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4 ดังที่กล่าวไว้แล้วใน 3) ถ้า $g(x) = mx + c$ ผ่านจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$

ดังนั้น $g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(x_0)$ และ $g(b) = f(b)$, $g(a) = f(a)$

แทนใน **(I-3)** จึงได้

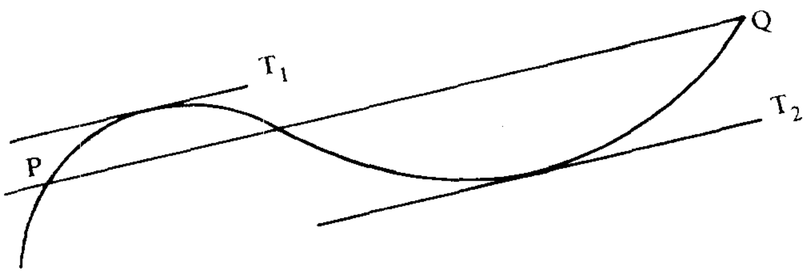
$$[f(b) - f(a)] \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = [f(b) - f(a)] \ f'(x_0)$$

จึงได้ $f(b) \quad f(a) = (b - a) \ f'(x_0)$

ความหมายในทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่าทั่ว ๆ ไป (ทฤษฎีบท 1.4) คล้ายคลึงกับทฤษฎีบทค่าตัวกลาง (ทฤษฎีบท 1.3) ถ้าสมมติว่า $g'(x) \neq 0$ บนช่วง $[a, b]$ แล้วจากทฤษฎีบทของ Rolle และทราบว่า $g(b) \neq g(a)$ ก็สามารถเขียนสมการ (1–3) เสียใหม่ได้เป็น

$$\text{(1–4)} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ให้ Γ เป็นเส้นในระนาบซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation) เป็น $x = g(t)$, $y = f(t)$ ซึ่ง t เป็นค่าใด ๆ ในช่วง $[a, b]$ ทำให้ได้จุด (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้น Γ จากจุด P $(g(a), f(a))$ ไปยังจุด Q $(g(b), f(b))$ ทางซ้ายมือของสมการ (1–4) คือค่าความชันของเส้นตรงที่ต่อจุด P กับ Q ทางขวามือของสมการ (1–4) สามารถเขียนได้ในรูป 1.2 $(dy/dt)/(dx/dt)$ เป็นความชันของเส้น ดังนั้นความหมายของทฤษฎีบท 1.4 ว่าต้องมีจุดบนเส้น Γ ซึ่งความชันเดียวกันกับเส้นตรง PQ ดังรูป 1.2



รูป 1.2

ควรสังเกตว่าเพื่อให้สมการ (1–3) เป็นรูปทั่ว ๆ ไปสำหรับผลลัพท์ที่กล่าวแล้วนี้มากกว่า (1–4) เนื่องจากได้กำหนดไว้แล้วว่า g' ต้องไม่ใช่ศูนย์ ตัวอย่างเช่นให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^3$ บนช่วง $[-1, 1]$ ทางซ้ายมือของ (1–4) เป็นศูนย์ อย่างไรก็ดีเนื่องจาก $f'(x)/g'(x) = (2x)/(3x^2) = \frac{2}{3x}$ ก็หาตัวเลือก $x_0 \in [-1, 1]$ ให้ (1–4) เป็นจริงได้ (เพื่อป้องกันเส้น Γ ซึ่งการอธิบายความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบท 1.4 เป็นไปไม่ได้ดูได้จากแบบฝึกหัดข้อ 17)

ในทางวิเคราะห์รูปแบบของทฤษฎีบทเหล่านี้ให้เข้าใจ เนื่องจากจุด x_0 อยู่ระหว่าง a และ b ก็สามารถเขียนได้ว่า $x_0 = a + \theta h$ เมื่อ $h = b - a$ และ $0 < \theta < 1$ จากทฤษฎีบท 1.3 จะเขียนได้เป็น

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a+\theta h)$$

การใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางใช้กันอยู่ 2 ทางคือ ในทางปฏิบัติและทางทฤษฎีค่าที่แตกต่างกันเป็นเรื่องที่เป็นปัญหาเช่นตัวอย่างก่อน ๆ ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางเพื่อการประมาณค่าของบางฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 1.5 *เมื่อ* $u > 0$ *และ* $v \geqslant 0$, $\sqrt{u^2 + v}$ *อาจเขียนแทนได้ด้วย* $u + v/2$" *ด้วยค่าผิดพลาดไม่เกิน* $v^2/4\,u^3$

โดยการทดลอง $\sqrt{87} = \sqrt{81 + 6} \approx 9 + \frac{6}{18} = 9\frac{1}{3}$ ซึ่งผิดไปไม่เกิน $\frac{36}{(4)(9)^3} \approx .012$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = \sqrt{u^2 + x}$ ดังนั้น $f(0) = u$ ในขณะที่ $f(v)$ เป็นค่าที่ต้องการประมาณ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางย่อมมี x_0 ซึ่ง $0 < x_0 < v$ ที่

$$f(v) = f(0) + (v + 0)\, f'(x_0)$$

$$= u + \frac{v}{2\sqrt{u^2 + x_0}}$$

เนื่องจาก $x_0 > 0$, $\sqrt{u^2 + x_0} > u$ และได้กล่าวแล้วว่า $f(v) < u + \frac{v}{2u}$

ดังนั้นค่าโดยประมาณ $u + \frac{v}{2u}$ มีค่ามากกว่าค่าจริง $\sqrt{u^2 + v}$ เสมอ

ค่าผิดพลาดที่คาดในการประมาณค่าสังเกตว่า $x_0<v$ ดังนั้น

$\sqrt{u^2+x_0}<\sqrt{u^2+v}<u+\frac{v}{2u}$ เพราะฉะนั้น

$$f(v) = u+\frac{v}{2\sqrt{u^2+x_0}}$$

$$> u+\frac{v}{2\left[u+\frac{v}{2u}\right]} = u+\frac{uv}{2u^2+v}$$

และดังนั้น

$$u+\frac{uv}{2u^2+v}<\sqrt{u^2+v}<u+\frac{v}{2u}$$

ค่าผิดพลาดอย่างมากที่สุดคือ

$$\left[u+\frac{v}{2u}\right]-\left[u+\frac{uv}{2u^2+v}\right] = \frac{v^2}{(2u)(2u^2+v)} < \frac{v^2}{4u^3} \Box$$

[วิธีการที่เป็นไปได้โดยทฤษฎีบท Taylor ในหัวข้อ 1.5 แสดงว่าโดยค่าประมาณ $u+\frac{v}{2u}$ ซึ่งมีค่าแน่นอนภายใน $\frac{v^2}{4u^3}$]

ผลลัพท์ที่มีประโยชน์ซึ่งได้จากทฤษฎีค่าตัวกลางทั่ว ๆ ไป (ทฤษฎีบท 1.4) ก็คือ กฎของ l' Hospital (l' Hosptital's rule) โดยใช้ผลลัพธ์นี้เพื่อคำนวณหาค่าลิมิตของฟังก์ชันผลหาร

ทฤษฎีบท 1.6 *(l'Hospital's Rule) ให้* f *และ* g *หาอนุพันธ์บนช่วง* $a \leqslant x < b$ *ซึ่ง* $g'(x) \neq 0$ *บนช่วงดังกล่าว ถ้า*

i) $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$

หรือถ้า

ii) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$

และถ้า $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว

$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ด้วย

จุดปลายข้างบน b อาจมีค่าแน่นอนหรือ ∞ และ L อาจมีค่าแน่นอนหรือ ∞ ก่อนที่จะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้พิจารณาค่าลิมิตต่อไปนี้เสียก่อนเช่น ในการคำนวณหาค่า

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0+} 1-\cos(x^2) = \lim\limits_{x\to 0+} x^4 = 0$ ถ้าพิจารณาค่าต่อไปนี้แทนคือ

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x \sin(x^2)}{4x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

โดยทฤษฎีบทนี้ก็ได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \dfrac{1}{2}$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ เนื่องจาก $\log(x^x) = x \log x$ จึงพิจารณา

$\lim\limits_{x\to 0+} x\log x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$

โดยใช้ทฤษฎีบทนี้จึงได้

$$\lim_{x\to 0+} \log x^x = \lim_{x\to 0+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

เนื่องจากฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\log x^x}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

ในแบบฝึกหัดข้อ 24 และ 25 ซึ่งจะชี้ให้เห็นว่าไม่สามารถใช้กฎของ l' Hospital ได้ในข้อ 24 ให้หาค่าลิมิตซึ่งทราบแล้วว่าหาค่าไม่ได้ แต่หาค่าแล้วได้คำตอบเป็นศูนย์ ในกรณีนี้ให้พิจารณาสมมติฐานของทฤษฎีบท 1.6 ในข้อ 25 ให้พิจารณาผลลัพธ์ที่ผิด แต่ในที่นี้ข้อผิดพลาดอยู่ที่การสรุปว่าบทกลับของทฤษฎีบท 1.6 เป็นจริงคือ ถ้า $\lim f'(x)/g'(x)$ หาค่าไม่ได้ แต่ $\lim f(x)/g(x)$ หาค่าได้

พิสูจน์ (i) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างเป็น 0 จึงไม่ทราบว่ามีค่าเท่าไร สมมติว่า b มีค่าแน่นอนค่าหนึ่งและให้ $f(b) = g(b) = 0$ จึงได้ว่า f และ g ต่างต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไปใน (1–4) ให้ x เป็นจุดข้างในใดๆ ของ $[a,b]$ จึงมั่นใจว่ามีจุด t ที่ $x < t < b$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

เนื่องจาก $f(b) = g(b) = 0$ จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f'(t)}{g'(t)} - L$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{t\to b} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \quad L = 0$

เมื่อให้ t เข้าใกล้ b เนื่องจาก t อยู่ระหว่าง x และ b จะสำเร็จลงได้โดยการควบคุม x

นั่นคือกำหนด $\varepsilon > 0$ สามารถเลือก $\delta > 0$ ดังนั้นถ้า $b - \delta < x < b$ ทำให้ได้ $|b - t| < \delta$ และ $|f(x)/g(x) - L| < \varepsilon$ จึงได้ $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ii) เนื่องจากค่าลิมิตของเศษและส่วนต่างไม่ลู่เข้าต่างเป็น ∞ ซึ่งไม่สามารถทราบค่าที่แน่นอนของเศษนั้นได้ให้ $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ และ $f'(x)/g'(x) \to L$ เมื่อ $x\to b$ และเนื่องจาก $g'(x)$ ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่งทราบว่าต้องเป็นบวก ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียว เพราะฉะนั้น $g(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ เลือก x_o ดังนั้นถ้า $x_o < t < b$

$$-\varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} - L < \varepsilon$$

เนื่องจาก $g'(t) > 0$ จึงได้

(1–5) $\quad (L-\varepsilon)g'(t) < f'(t) < (L+\varepsilon)\, g'(t)$

ส่วนหนึ่งทางขวาของ (1–5) ได้

$$f'(t) - (L+\varepsilon)\, g'(t) < 0$$

แสดงว่า $f(x) - (L+\varepsilon)\, g(x)$ เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวบนช่วง $[x_0,b]$ เพราะว่าค่าอนุพันธ์เป็นลบบนช่วงนั้น ย่อมมีขอบเขตข้างบนในช่วงปิด$[x_0,b]$ ให้ $f(x) - (L + \varepsilon)\, g(x) < B$

หารตลอดด้วย $g(x) > 0$ จึงได้

$$\frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon + \frac{B}{g(x)}$$

เนื่องจาก $g(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to b^-$ จึงพบว่าสำหรับ x_1 ที่อยู่ใกล้ ๆ b, $f(x)/g(x) < L + 2\varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_1 < x < b$

ถ้านำทางซ้ายมือของ (1-5) และคำนวณด้วยวิธีการเดียวกันก็จะได้ว่า $f(x)/g(x) > L - 2\varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x_1 < x < b$, $-2\varepsilon < f(x)/g(x) - L < 2\varepsilon$ หรือ $\left| f(x)/g(x) - L \right| < 2\varepsilon$ นั่นคือ $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ □

พังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียว (monotonic function) เป็นพังก์ชันที่ง่ายต่อการพิจารณากว่าพังก์ชันอื่น ตัวอย่างจะพบในภายหลัง กราฟของพังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียวที่ต่อเนื่อง มักจะมีความยาวแน่นอนซึ่งอาจไม่จริงสำหรับพังก์ชันต่อเนื่องชนิดอื่น ๆ พังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียวเป็นช่วง ๆ ติดต่อกัน (piecewise monotonic) ก็มีลักษณะง่ายต่อการคำนวณเช่นกัน พังก์ชันพหุนาม (polynomial function) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$ เป็นพังก์ชันที่เพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียวเป็นช่วง ๆ ติดต่อกัน (ดูแบบฝึกหัดข้อ 6)สำหรับพังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ก็ง่ายที่จะทดสอบ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการเพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียวและ $f'(x)$ ดูแบบฝึกหัดข้อ 30พังก์ชัน f ที่เพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียว เป็นช่วง ๆ ติดต่อกันอาจแบ่งกันดำเนินการคำนวณเป็นช่วงๆ ของโดเมน ถ้า f หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์ไม่ใช่ศูนย์ พังก์ชันผกผัน(inverse function) ของมันก็หาอนุพันธ์ได้ด้วย

ทฤษฎีบท 1.7 *ให้ f ลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียวบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก x ซึ่ง $a < x < b$ แล้ว g เป็น พังก์ชันผกผันของ f มีค่าบนช่วง $[\alpha,\beta]$ และ g หาอนุพันธ์ได้ในจุดข้างในของ $[\alpha,\beta]$ และได้สำหรับทุก r, $\alpha < r < \beta$*

พิสูจน์ จะต้องแสดงว่า $\lim_{x \to r} (g(x) - g(r))/(x - r)$ มีค่า

ให้ $g(x) = y$ และ $g(r) = c$

ดังนั้น $x = f(y)$ และ $r = f(c)$

และเนื่องจาก f และ g ต่อเนื่องทั้ง 2 ฟังก์ชัน

ค่าลิมิตที่พิจารณาคือ

$$\begin{aligned} g'(r) &= \lim_{x \to r} \frac{g(x) - g(r)}{x - r} \\ &= \lim_{y \to c} \frac{y - c}{f(y) - f(c)} \\ &= \lim_{y \to c} \frac{1}{\frac{f(y) - f(c)}{y - c}} \\ &= \frac{1}{f'(c)} \\ &= \frac{1}{f'(g(r))} \quad \square \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.1

1. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก x ซึ่ง $a < x < b$ จงแสดงว่า f มีค่าคงที่บน (a,b)
2. โดยใช้ทฤษฎีบทของ Rolle พิสูจน์ว่าถ้า $g(x)$ เป็นพังก์ชันพหุนาม และถ้า $g(a) = g'(a) = g''(a) = g^{(3)}(a) = 0$ และ $g(b) = 0$ และย่อมมีจำนวน c ซึ่ง $a < c < b$ ที่ $g^{(4)}(c) = 0$
3. ถ้า $f(x)$ มีค่าและ $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับแต่ละ x ซึ่ง $a < x < b$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องบน (a,b) ด้วย
4. ถ้า $f(x)$ มีค่าและ $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับ x ซึ่ง $a < x < b$ จงแสดงว่า
   a) ถ้า $f'(x) \geqslant 0$ สำหรับ $a < x < b$ แล้ว f เป็นพังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวหรือไม่ได้ลดอย่างเดียวบน (a,b) ด้วย
   b) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับ $a < x < b$ แล้ว f ต้องเพิ่มหรือลดอย่างเดียวบน (a,b) ด้วย

5. ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ ต่างเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อย่างน้อยสามครั้งและแต่ละฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์สี่ที่ อยากทราบว่า $F^{(2)}$ มีค่าเป็นศูนย์กี่ที่เมื่อ $F(x) = f(x)g(x)$

6. จงแสดงว่าฟังก์ชันพหุนาม $P(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวหรือลดอย่างเดียวเป็นช่วง ๆ ติดต่อกัน

7. จงพิสูจน์ว่าถ้า $f'(x) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty^-}(f(x+1) - f(x)) = 0$

8. สมมติว่า f ซึ่ง $\left|f(a) - f(b)\right| \leqslant M\left|a - b\right|^2$ สำหรับทุก $a,\ b \in R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันคงที่

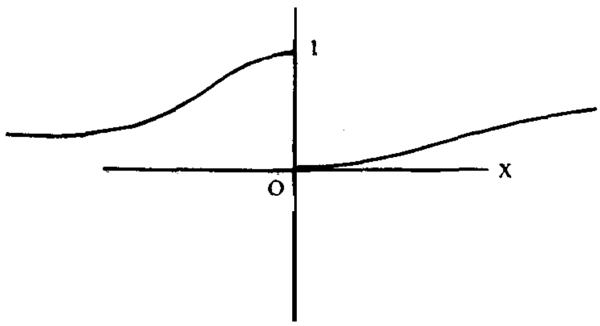
9. ให้ f' หาค่าได้และมีขอบเขตสำหรับ $-\infty < x < \infty$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน เส้น (บน $(-\infty, \infty)$)

10. ให้ f'' หาค่าได้และเป็นลบบนช่วง $[0, 1]$ จงแสดงว่าถ้า P และ Q อยู่บนกราฟของ f แล้วเส้น PQ จะอยู่ใต้กราฟของ f ระหว่างจุด P และ Q

11. อนุพันธ์ทางซ้ายและทางขวาที่จุด x_0 ของฟังก์ชัน f มีค่าโดยคำนวณจาก $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ และ $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ตามลำดับ จงแสดงโดยยกตัวอย่างว่าค่าลิมิตดังกล่าวอาจจะหาค่าได้เมื่อค่าลิมิตสองข้างปกติ $(x\to x_0)$ หาค่าไม่ได้ ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x_0 หรือไม่

12. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ หาค่าได้สำหรับทุก $x \neq 0$

a> อภิปรายความมีค่าของ $f'(x)$ ที่ $x = 0$ (พิจารณาจากรูปข้างล่าง)



b) ขัดแย้งกับแบบฝึกหัดข้อ 3 หรือไม่

13. ให้ $f'(x)$ หาค่าได้และต่อเนื่องสำหรับทุก x จงพิสูจน์ว่า f เป็นไปตามเงื่อนไข Lipschitz บนช่วงปิดใด ๆ

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f กล่าวได้ว่าเป็นไปตามเงื่อนไข Lipschiz บนเซต D ถ้ามีจำนวนคงที่ M ซึ่ง

$$\left|f(p) - f(q)\right| \leqq M\left|p - q\right|$$

สำหรับทุกตัวเลือก p และ q ใน D

14. ถ้า $f(x) > 0$ และ $f''(x) \leqslant 0$ สำหรับ $x > 0$

a> จงแสดงว่า $f'(x) \geqslant 0$ สำหรับ $x > 0$

b) $f(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to \infty^{-}$ หรือไม่

15. a> ถ้า $f(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to a < \infty$ แล้ว $f'(x)$ มีขอบเขตหรือไม่

b) ถ้า $f(x) \to \infty^{-}$ เมื่อ $x \to \infty^{-}$ แล้ว $f'(x) \to \infty$ หรือไม่

c) ถ้า $f(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to a < \infty$ แล้ว $f'(x) \to \infty$ หรือไม่

16. ถ้า $P(x)$ เป็นพังก์ชันพหุนามซึ่ง $P(0) = 1$, $P(2) = 3$ และ $\left|P'(x)\right| \leqslant 1$ สำหรับ $0 \leqslant x \leqslant 2$ แล้วจงเขียนพังก์ชันพหุนาม $P(x)$

17. จงเขียนกราฟซึ่งกำหนดขึ้นโดย $y = f(t) = t^2$, $x = g(t) = t^3$ เมื่อ $t \in [-1,1]$ จงแสดงว่าเส้นเส้นนี้เป็นตัวอย่างที่การอธิบายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบท 1.4 ผิด

18. ทฤษฎีบทค่าตัวกลางทั่วไปมีสูตรทางเรขาคณิตในพจน์ของเส้นสัมผัสเส้นที่ขนานกับคอร์ด ผลลัพธ์อันนี้เป็นจริงสำหรับเส้นในปริภูมิหรือไม่ (ดูรูป 1.2)

19. ให้ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากด้านยาวกว่าเท่ากับ B ด้านสั้นกว่าเท่ากับ b ด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ H และให้มุมที่เล็กที่สุดเป็น θ จงแสดงว่าการสำรวจการประมาณค่าซึ่งกำหนดโดย $\theta = 3b/(2H + B)$ ผิดพลาดไปไม่เกิน .02 เรเดียน (ข้อแนะนำเขียน b และ B ในพจน์ของ θ แล้วเปรียบเทียบกับ $36/(2H + B)$

20. จงแสดงว่าสำหรับ x ที่มีค่ามาก ๆ $\arctan x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ และจงประมาณค่าผิดพลาด

21. ให้ $f'(A) \to A$ เมื่อ $x \to \infty$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{f(x)}{x} \to A$

22. a) ใช้กฎของ l' Hospital เพื่อหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 7x + 2}{2x^3 - 5x^2 + 6x - 8}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty^-} \frac{x^m}{e^x}$

b) ใช้ได้สำหรับ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{2}{x-1} + 3}{4 + \frac{5}{x^2 - \frac{3}{x+2}}}$ หรือไม่ ?

23. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\log(1 + x^2)}$

24. ทราบแล้วว่า $\lim\limits_{x \to \infty^-} e^{-\sin(x)}$ หาค่าไม่ได้ เขียนลิมิตนี้เป็น

$\lim\limits_{x \to \infty^-} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin 2x)\, e^{\sin x}}$ และใช้กฎ l' Hospital

เพื่อหาผลลัพธ์และได้

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4 \cos x}{(2x + 4\cos x + \sin 2x)\, e^{\sin x}} = 0$$

จงอธิบายข้อขัดแย้งนี้

25. ให้ $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ และ $g(x) = \sin x$ จงคำนวณ

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)/g(x)$ โดยกฎ l' Hospital ค่าลิมิตหาได้หรือไม่ (ตรวจสอบค่าลิมิตด้วยวิธีอื่นด้วย)

26. ใช้ $x = g(t)$, $y = f(t)$ เป็นสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้น Γ สร้างรูปเพื่อแสดงความหมายทางเรขาคณิตทั้ง 2 กรณีของกฎ l' Hospital (คำแนะนำ : ดูว่าความชันของ Γ ที่จุด $t = t_0$ เป็น $f'(t_0)/g'(t_0)$)
27. ให้ $f(x) \to \infty$ และ $g(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to \infty$ จงแสดงว่าถ้า $f(x)/g(x) \to L$ แล้ว $\log f(x) / \log g(x) \to 1$ เมื่อ $0 < L < \infty$
28. $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ มีค่าเมื่อ $x = 0$ จงพิสูจน์ว่า $f'(x)$ มีค่าทุก x แต่ไม่ต่อเนื่อง
29. ให้ f' มีค่าสำหรับ $x \in [a, b]$ และสมมติว่า $f'(a) = -1, f'(b) = 1$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า f' ไม่ต่อเนื่องแล้วย่อมมีจำนวน c, $a < c < b$ ซึ่ง $f'(c) = 0$
30. เป็นที่ทราบแล้วว่าถ้า f หาอนุพันธ์ได้และ $f'(x_0) = 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวหรือเพิ่มอย่างเดียวในย่านของ x_0 เขียนรูปเพื่ออธิบายข้อความนี้โดยวิเคราะห์ทางเรขาคณิต สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 2x + x^2 \sin \frac{1}{x}$
31. ถ้า f, f', f'' ต่อเนื่องบน $1 \leqslant x < \infty$, $f > 0$ และ $f' < 0$ แล้ว $f' \geqslant 0$

1.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันใน R^n

(Derivatives for function on R^n)

ในแคลคูลัสเบื้องต้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสำหรับตัวแปรหลายตัวได้กระทำกันเช่นเดียวกับฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว โดยให้ตัวแปรที่เหลือเป็นค่าคงที่เช่น $w = f(x, y, z) = x^3y^2 + xz^4$ ก็จะว่า $\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2y^2 + x^4$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2x^3y$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ $4xz^3$ ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาอนุพันธ์ค่าเวคเตอร์ (vector–valued derivative) ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว ค่านี้อาจเรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของ f หรือเชิงอนุพันธ์ของ f หรืออนุพันธ์ ((total) derivative) ของ f จะศึกษาได้หลายรูปแบบของทฤษฎีบทค่าตัวกลางสำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว และค้นหาคุณสมบัติของอนุพันธ์ค่าเวคเตอร์

ขบวนการหาอนุพันธ์มีความหมายที่เข้าใจกันดีว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ทำให้เข้าใจยิ่งขึ้น สำหรับฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียวมีเพียงหนทางในการแปรค่าไปได้เพียง 2 ทาง

คือ t อาจเข้าทางซ้ายของ t_0 หรือทางขวาของ t_0 ดังนั้นเราก็จบลงด้วยมโนทัศน์ที่สำคัญของอนุพันธ์ $f'(t)$ และ การแปรค่าย่อยสองทางคืออนุพันธ์ทางซ้ายและอนุพันธ์ทางขวา (ดูแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 11)

กลับมาที่ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว การคำนวณยุ่งยากขึ้น จุด p ที่เคลื่อนที่ไปจาก p_0 ได้หลายทิศทางที่ต่างกัน ในกรณีเช่นนี้ผลลัพธ์ในการเปลี่ยนแปลงของ F กล่าวคือ $F(p) - F(p_0)$ เห็นได้แน่ชัดว่าต้องขึ้นกับทิศทางในการเปลี่ยนแปลงไปพร้อม ๆ กับระยะทาง $|p - p_0|$ ด้วย หนทางที่จะนำไปสู่ความเข้าใจการหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันโดยเริ่มจากอนุพันธ์ตามทิศทาง (directional derivative)

ใน 1 – ปริภูมิมีเพียง 2 ทิศทาง ซ้ายและขวา (ข้างล่างและข้างบน) ใน 2 – ปริภูมิ ก็คำนึงถึงที่กำหนดขึ้นเพื่ออธิบายทิศทางอื่น ๆ ใน 3 – ปริภูมิ และใน n – ปริภูมิ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ง่ายที่จะกล่าวว่าทิศทางเป็นเวคเตอร์ตำแหน่ง (position vector) ของจุด β ซึ่ง $|\beta| = 1$ เป็นจุดที่อยู่บนขอบเขตของวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย ก็คือ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดและจุดปลายอยู่ที่ β ตัวอย่างเช่นต้องการเคลื่อนจุดจากจุด p_0 "ในทิศทาง β" ก็คือเราเลื่อนจุดจาก p_0 ไปตามส่วนของเส้นตรงที่ต่อระหว่างจุด p_0 และจุด $p_0 + \beta$ โดยทั่ว ๆ ไป ray หรือกึ่งเส้นอนันต์ (half line) ที่เริ่มต้นที่ p_0 และชี้ไปตามทิศทาง β ประกอบด้วยทุกจุด $p_0 + t\beta$ เมื่อ $0 \geqslant t$

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันค่าเป็นจำนวนจริง (real–valued function) ฟังก์ชันหนึ่งมีค่าและต่อเนื่องบนย่านของ p_0 อัตราการแปลค่าของ f ที่ p_0 ในทิศทาง β หรืออนุพันธ์ตาม ทิศทางของ f ที่ p_0 ในทิศทาง β กำหนดได้เป็น

$$(1\text{–}6) \qquad (D_\beta f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + t\beta) - f(p_0)}{t}$$

ตัวอย่างเช่น ให้ $f(x, y) = x^2 + 3xy$, $p_0 = (2, 0)$ และ $\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ทิศทาง -45°

เนื่องจาก $p_0 + t_\beta = (2 + \frac{t}{\sqrt{2}}, - \frac{t}{\sqrt{2}})$ จึงได้

$$f(p_0 + t_\beta) = (2 + \frac{t}{\sqrt{2}})^2 + 3(2 + \frac{t}{\sqrt{2}})(- \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$= 4 - \frac{2}{\sqrt{2}} t - t^2$$

ดังนั้น $(D_\beta f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{(4 - \frac{2}{\sqrt{2}} t - t^2) - 4}{t}$

$$= - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

ถ้าให้จุด p_0 คงที่และให้ β แปรค่าไป ค่าของ $(D_\beta f)(p_0)$ ไม่จำเป็นต้องเหมือนเดิม เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้นสำหรับการเปลี่ยนแปลงไปของทิศทางของ β ค่าอนุพันธ์ตามทิศทางก็เปลี่ยนค่าไปด้วย เช่น

$$(D_{-\beta} f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 - t\beta) - f(p_0)}{t}$$

ถ้าให้ $\lambda = -t$ ก็จะได้

$$\frac{f(p_0 - t\beta) - f(p_0)}{t} = - \frac{f(p_0 + \lambda\beta) - f(p_0)}{a}$$

ดังนั้น $(D_{-\beta} f)(p_0) = - (D_\beta f)(p_0)$

อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f ของตัวแปร n ตัวแปรเป็นอนุพันธ์ตามทิศทางซึ่งคำนวณโดย β ที่มีทิศทางเฉพาะของแต่ละเวคเตอร์หนึ่งหน่วย มาตรฐาน (basic unit vectors) คือ $(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$ ในการแปรค่าไปได้ของ β มีสัญลักษณ์

ที่ใช้เขียนกันได้หลายรูปแบบแล้วแต่ผู้ใช้ เช่นตารางต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์ที่นิยมใช้กันทั่วๆ ไปในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสามตัวแปร

$w = f(x, y, z)$

$\beta =$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$
$D_\beta f =$	f_1	f_2	f_3
	$D_1 f$	$D_2 f$	$D_3 f$
	af / 3·X	$\frac{af}{\partial y}$	$\frac{af}{\partial z}$
	f_x	f_y	f_z
	$\frac{\partial w}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$
	w_x	w_y	w_z

สิ่งที่ควรระวังและการอธิบายความหมายที่ต้องการในการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อาจนำมาซึ่งความสับสนและไม่เข้าใจยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ตัวแปรเฉพาะในตารางข้างบน (เช่น w_0 และ $\frac{\partial w}{\partial x}$) ต้องระมัดระวัง สองบันทัดแรกทำให้สับสนน้อยที่สุด เลขที่ใช้ห้อยท้ายเป็นลำดับของตัวแปรสำหรับพิกัด (coordinate) สำหรับ $f_1 = D_1 f$ ก็คือ $\beta = (1, 0, 0)$ ในนิยามของ $D_\beta f$ จึงได้

$$f_1(x, y, z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y, z) - f(x, y, z)}{t}$$

จึงพบว่า f_1 กระทำเสมือนว่า $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวแปรเดียว โดย y และ z เป็นค่าคงที่ การหาอนุพันธ์กระทำเสมือนเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว ด้วยเหตุผลนี้จึงกล่าวได้ว่า f_1 เป็นอนุพันธ์ย่อยของ f กระทำมุ่งตรงต่อตัวแปรตัวแรกเพียงตัวเดียว ตัวอย่างเช่นให้

$$f(x,y,z) = w = x^2y + y^3\sin(z^2) \text{ แล้ว}$$

$$f_1(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 2xy$$

$$f_2(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial y} = x^2 + 3y^2\sin(z^2)$$

$$f_3(x,y,z) = \frac{\partial w}{\partial z} = 2y^3z \cos(z^2)$$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวอาจหาอนุพันธ์ย่อยได้อีก ถ้าค่าลิมิตดังกล่าวมีค่า ก็หาอนุพันธ์ย่อยลำดับสูงขึ้นได้อีกเช่น

$$f_{11}(x,y,z) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$

$$f_{12}(x,y,z) = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2x$$

$$f_{22}(x,y,z) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6y \sin(z^2)$$

$$f_{21}(x,y,z) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 2x$$

ให้ทั่วไปยิ่งขึ้นไปอีกเมื่อ β คงที่ $D_\beta f$ ก็คือฟังก์ชันใหม่ก็อาจหาอนุพันธ์ตามทิศทางของฟังก์ชันนี้ได้อีกเช่น $D_\alpha D_\beta f$ เมื่อ α เป็นทิศทาง ซึ่งอาจเป็นทิศทางเดียวกับ β ก็ได้

ในการสร้างนิยามให้กับ $D_\beta f$ ที่จุด p_0 สิ่งที่ต้องมีก็คือ f มีค่าในย่านของ p_0 ด้วยเหตุผลอันนี้จะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทุกฟังก์ชันบนเซตเปิด และทิ้งการพิจารณาที่จะหาอนุพันธ์ที่จุดขอบเขตของเซตของโดเมนของฟังก์ชันไว้ก่อน

นิยาม 1.3.1. *ให้ f มีค่าและต่อเนื่องบนเซตเปิด $D \subseteq R^n$ แล้ว f กล่าวได้ว่าอยู่ในคลาสส์ (class) C^k ใน D ถ้าทุกอนุพันธ์ย่อยของ f ตั้งแต่ลำดับต้น ๆ จนถึงลำดับที่ k มีค่าและต่อเนื่องทุกจุดใน D สัญลักษณ์ C' และ C'' บางครั้งใช้เขียนแทน C^1 และ C^2*

อนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องและการหาค่าไม่ได้ ในบทต่อไปจะได้แสดงให้เห็นว่าถ้า $f \in C^2$ ในระนาบ อนุพันธ์ย่อยผสม f_{12} และ f_{21} จะต้องเท่ากัน ให้ทั่ว ๆ ไปยิ่งขึ้นถ้า $f \in C^k$ แล้วอนุพันธ์ย่อยผสมลำดับที่ k โดยตัวแปรเหมือนกันย่อมเท่ากันเช่น C^4, $f_{xyxx} = f_{xxxy}$ อย่างไรก็ดีในแบบฝึกหัดข้อ 11 ได้ให้ตัวอย่างว่า $f_{12} \neq f_{21}$ แม้ว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 คือ f_1 และ f_2 ต่อเนื่องและทุกอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 2 หาค่าได้ มีข้อแตกต่างอื่น ๆ ระหว่างการหาอนุพันธ์ในฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียวและในตัวแปรหลายตัวแปร ในกรณีต้น ๆ ฟังก์ชันจะต้องต่อเนื่องจึงจะมีอนุพันธ์ ในแบบฝึกหัดข้อ 4 ได้ให้ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องสำหรับ f_1 และ f_2 หาค่าได้ทุกที่ อย่างไรก็ดีถ้าอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่อง ฟังก์ชันย่อมต่อเนื่องด้วย ต่อไปจะเป็นผลลัพธ์จากการใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางของหลายตัวแปรเป็นครั้งแรก

บทนำ 1.3.1 *ให้* $f \in C^1$ *ในย่าน* (open ball) $B(p_0,r)$ *รอบ ๆ จุด* p_0 *อยู่ใน* n *ปริภูมิ*

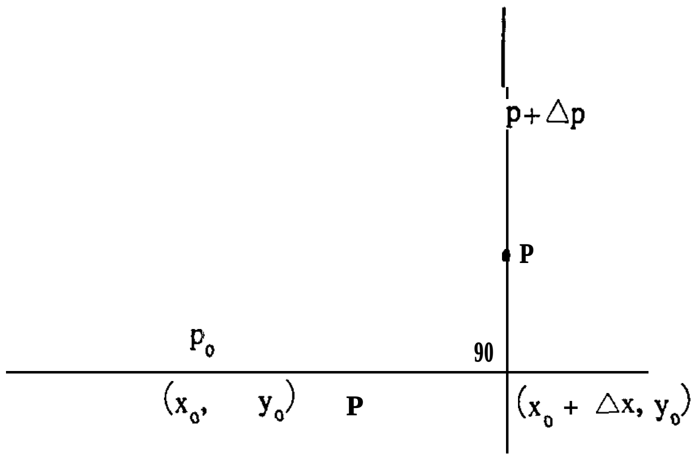
ให้ $p \in B$ *และให้* $p - p_0 = \Delta p = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n)$

แล้วย่อมมีจุด $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *ใน* B *ซึ่ง*

$$f(p) - f(p_0) = f_1(p_1)\Delta x_1 + f_2(p_2)\Delta x_2 + f_3(p_3)\Delta x_3 + \ldots + f_n(p_n)\Delta x_n \tag{1-7}$$

พิสูจน์ ในที่นี้แต่ละอนุพันธ์ย่อย f_i ได้คำนวณขึ้นจากจุดที่ต่างออกไปกล่าวคือ p_i จะปรับปรุงสิ่งเหล่านี้โดยแสดงว่าจุด p_i สามารถที่จะแทนค่าโดยการเลือกจุด p^* ซึ่งอยู่บนเส้นที่ต่อระหว่างจุด p_0 และ p

พิสูจน์บทนำนี้เพียงในกรณีสองตัวแปรเนื่องจากสามารถแสดงต่อไปได้ในหลายวิธีการ ให้ $\Delta p = (\Delta x, \Delta y)$ ให้ q เป็นจุด $p_0 + (\Delta x, 0) = (x_0 + \Delta x, y_0)$ และเขียนได้



phi 1.3

เป็น $f(p) - f(p_0) = [f(p) - f(q)] + [f(q) - f(p_0)]$

ในแต่ละวงเล็บใหญ่ทางขวามือมีเพียงตัวแปรเดียวจึงใช้ทฤษฎีบทค่ากลางของตัวแปรตัวแปรเดียว ด้วยวิธีนั้นย่อมมี x' ระหว่าง x_0 และ $x_0 + \triangle x$ และมี y' ระหว่าง y_0 และ $y_0 + \triangle y$ ซึ่งได้จุด p' และ p'' ดังรูป 1.3 ซึ่ง

$$f(q) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$= \triangle x f_1(x', x_0) = f_1(p')\triangle x$$

และ

$$f(p) - f(q) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0 + \triangle x, y_0)$$

$$= \triangle y f_2(x_0 + Ax, y') = f_2(p'')\triangle y$$

นั่นคือ $f(p) - f(p_0) = f_1(p_1)\triangle x_1 + f_2(p_2)\triangle x_2$ สำหรับตัวแปรสองตัวแปร ❑

บทแทรก *ถ้าทุกอนุพันธ์ย่อยลำดับที่หนึ่งของ f มีค่าและต่อเนื่องในช่วงเปิด D แล้ว f ต่อเนื่องใน D ด้วย*

พิสูจน์ ในการพิสูจน์บทแทรกไม่ได้ใช้ความต่อเนื่องของ f เนื่องจากโจทย์บอกเพียงว่าแต่ละ f_i ที่ต้องการนำมาสรุปความต่อเนื่องของ f โดยใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางถ้าย่าน $B(p_0, r)$ สำหรับ p_0 ใด ๆ ใน D ได้เลือกขึ้นแล้วดังนั้น closure ของ $B(p_0, r)$ อยู่ใน D แล้วแต่ละฟังก์ชัน f_i ต่อเนื่องใน D ต้องถูกจำกัดขอบเขตโดย $B(p_0, r)$ จะต้องมี M ซึ่ง $\left|f_i(p_i)\right| \leqslant M$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ จาก (1–7) จึงได้

$$
\begin{aligned}
\left|f(p) - f(p_0)\right| &= \left|f_1(p_1)\Delta x_1 + f_2(p_2)\Delta x_2 + f_3(p_3)\Delta x_3 + \ldots + f_n(p_n)\Delta x_n\right| \\
&\leqslant \left|f_1(p_1)\right|\left|\Delta x_1\right| + \left|f_2(p_2)\right|\left|\Delta x_2\right| + \left|f_3(p_3)\right|\left|\Delta x_3\right| + \ldots + \left|f_n(p_n)\right|\left|\Delta x_n\right| \\
&\leqslant M\left|\Delta x_1\right| + M\left|\Delta x_2\right| + M\left|\Delta x_3\right| + \ldots + M\left|\Delta x_n\right| \\
&\leqslant M\left|p - p_0\right| + M\left|p - p_0\right| + M\left|p - p_0\right| + \ldots + M\left|p - p_0\right|,
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\left|\Delta x_i\right| \leqslant \left|p - p_0\right|$ สำหรับทุก i

$$= nM\left|p - p_0\right|$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{p \to p_0} \left|f(p) - f(p_0)\right| = 0$

ดังนั้น $\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$

นั่นคือ f ต่อเนื่องบน D □

หลักการในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกระทำเพียงตัวแปรตัวเดียวของฟังก์ชันหลายตัวแปรจะได้ถูกนำมาเติมลงในอนุพันธ์เวกเตอร์ (vector–valued derivative) ของ f โดยเขียนด้วยสัญลักษณ์ Df ซึ่งบางครั้งเรียกว่าอนุพันธ์ (รวม) ((total) derivative) ของ f ต่างไปจากอนุพันธ์ย่อยค่าจำนวนจริงของ f ที่กล่าวแล้ว (บางครั้งนักคณิตศาสตร์เขี น f' แทน

ที่จะเป็น Df แต่จะเลือก Df เพื่อไม่ให้สับสนกับกรณีของตัวแปรเดียว) เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสามตัวแปร Df ก็คือเกรเดียนต์ (gradient) ของ f โดยปกติใช้สัญลักษณ์ ∇f

นิยาม 1.3.2 *ให้* $f \in C^1$ *ในเซตเปิด* S *ใน* n-*ปริภูมิแล้วอนุพันธ์ของ* f *คือฟังก์ชัน ค่าเวกเตอร์* Df *มีค่าใน* S *กำหนดขึ้นโดย*

(1–8) $$Df(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots, f_n(p))$$

พึงสังเกตว่า Df ต่อเนื่องใน S เนื่องจากแต่ละส่วนประกอบ (component) ของฟังก์ชัน f_i ต่อเนื่องใน S เช่นถ้า $f(x, y, z) = x^2y - y^3z^2$ แล้ว

$$Df(x, y, z) = (2xy,\ x^2 - 3y^2z^2, -2y^2z)$$

สำหรับฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว Df ก็คือ f' นั่นเอง ในที่นี้อนุพันธ์มีความหมายทางเรขาคณิต อธิบายได้โดยแผนภาพเป็นความชันของ f ในแต่ละส่วนประกอบ เส้นเหล่านี้ให้ค่าโดยประมาณที่ดีใกล้ ๆ จุดสัมผัส ข้อความวิเคราะห์ที่ติดตามมามีดังต่อไปนี้

ถ้า $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x_0 และ $\Delta x = x - x_0$ แล้วฟังก์ชันเศษ

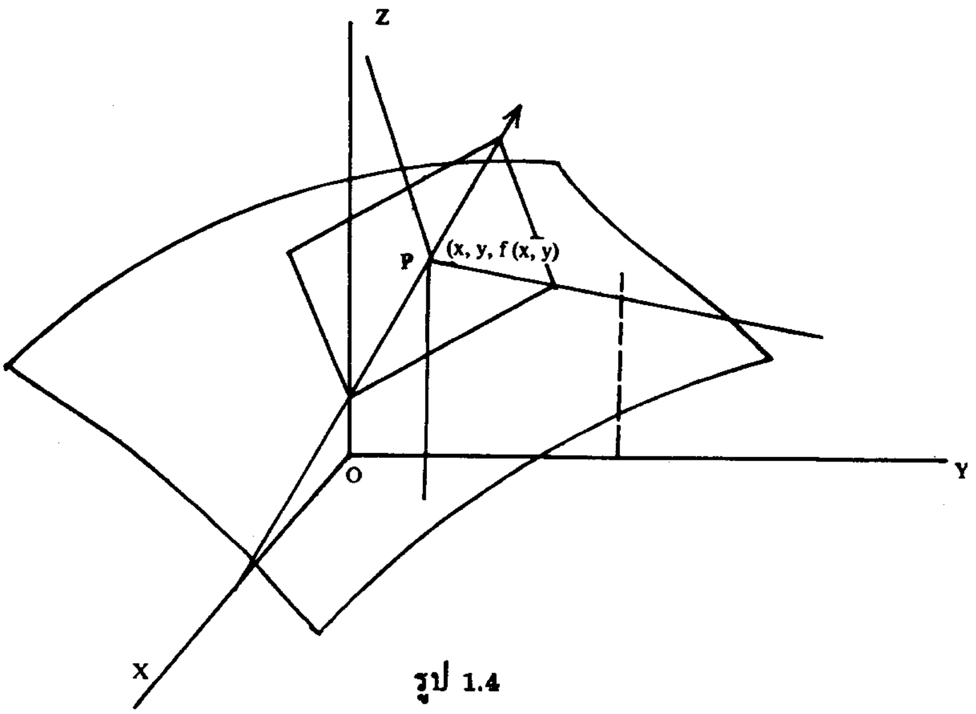
(1–9) $$R = R(\triangle x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\triangle x$$

เข้าใกล้ศูนย์ได้เร็วกว่า Δx หมายความว่า

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(\triangle x)}{\triangle x} = 0$$

เช่นเดียวกับกล่าวว่า ให้ $\varepsilon > 0$ มีย่าน N ของ x_0 ซึ่ง $|R| < |\triangle x|\,\varepsilon$ สำหรับทุก x ใน N

ด้วยวิธีเดียวกันนี้ฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวเป็นจริงสำหรับอนุพันธ์ค่าเวกเตอร์ Df ด้วย แต่ความหมายทางเรขาคณิตยากที่จะมองเห็นนอกจากกรณีย์เฉพาะของฟังก์ชันของตัวแปร ในรูป 1–4



รูป 1.4

แสดงว่ากราฟของฟังก์ชันและระนาบสัมผัสที่จุด $p = (x, y, f(x, y))$ ระหว่างระนาบทั้งหลายที่ผ่านจุด p ระนาบสัมผัสเหมาะสมสำหรับ f ในย่านของจุด $p = (x, y)$ ข้อความวิเคราะห์สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป เรียกว่าทฤษฎีบทการประมาณค่าเฉพาะที่ (local approximation theorem) และเป็นเรื่องจะศึกษากันต่อไป สังเกตข้อความข้างล่างในสูตร (1–10) ซึ่งใกล้เคียงกับ (1–9) ยกเว้นผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ $Df(p_0)$ และ $\triangle p$ และสำหรับฟังก์ชันตัวแปรตัวเดียวก็คือผลคูณของ $f'(x_0)$ กับ $\triangle x$

ทฤษฎีบท 1.8 *ให้* $f \in C^1$ *ในเขตเปิด* S *สำหรับ* p_0 *ใด ๆ* p *ใน* S *กำหนดค่าฟังก์ชันเศษ* $R = R(p_0, p)$ *โดย*

(1–10) $$R = f(p) - f(p_0) - Df(p_0) \cdot \Delta p$$

เมื่อ $\Delta p = p - p_0$ *แล้ว* R *มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ได้เร็วกว่า* Δp *หมายความว่า*

(1–11) $$\lim_{p \to p_0} \frac{R}{|\triangle p|} = 0$$

เช่นเดียวกันนี้อาจกล่าวว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ *ใด ๆ มีย่าน* N *ขึ้นอยู่กับ* p_0 *และ* ε *ซึ่ง* $|R| < |\Delta p| \varepsilon$ *สำหรับทุก* $p \in N$

พิสูจน์ สำหรับฟังก์ชันของตัวแปรสามตัวแปร $p = (x, y, z)$ และ $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ สูตร (1–10) ก็คือ

(1–12) $$R = f(p) - f(p_0) - f_1(p_0)\Delta x - f_2(p_0)\Delta y - f_3(p_0)\Delta z$$

จะพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.8 ในกรณีนี้และง่ายที่จะเข้าใจใน n ตัวแปร เริ่มด้วยการใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางในบทนำที่ผ่านมาซึ่งได้

$$f(p) - f(p_0) = f_1(p')\Delta x + f_2(p'')\triangle y + f_3(p''')\triangle z$$

เมื่อ p', p'', p''' ได้ถูกเลือกบนแต่ละส่วนของเส้นตรงสามส่วนที่ต่อจาก p_0 ไปยัง p เส้นทางนี้อยู่ใน S ถ้า p อยู่ในย่านที่เล็กมากของ p_0 กลับไปดู (1–12) จึงได้

(1–13) $$R = \left\{f_1(p') - f_1(p_0)\right\}\triangle x + \left\{f_2(p'') - f_2(p_0)\right\}\triangle y + \left\{f_3(p''') - f_3(p_0)\right\}\triangle z$$

เนื่องจากอนุพันธ์ f_1, f_2, f_3 ต่อเนื่องที่ p_0 ก็สามารถเลือกย่าน N ของจุด p_0 ดังนั้นแต่ละพจน์ใน (1–13) ในวงเล็บปีกกามีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่า ε จึงได้

$$\begin{aligned}
|R| &\leqslant \varepsilon|\triangle x| + E|\triangle y| + \varepsilon|\triangle z| \\
&\leqslant \varepsilon|p - p_0| + \varepsilon|p - p_0|; \text{ เพราะว่า} \\
&\qquad |\triangle x| \leqslant |p - p_0|, |\triangle y| \leqslant |p - p_0|, |\triangle z| \leqslant |p - p_0| \\
&= 3\varepsilon|p - p_0| \\
&= 3\varepsilon|\triangle p| \quad \text{สำหรับทุก } p \in N
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{p \to p_0} \dfrac{R}{|\triangle p|} = 0$ เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้

R จึงเข้าใกล้ศูนย์ได้เร็วกว่า $\triangle p$ □

บทกลับของทฤษฎีบท 1.4 ซึ่งให้คุณลักษณะของอนุพันธ์ค่าเวกเตอร์ Df

ทฤษฎีบท 1.9 *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนย่านของ p_0 และสมมติว่ามีเวกเตอร์ u ซึ่ง*

(1–14) $$\lim_{\vec{\Delta p} \to \vec{0}} \frac{f(p_0+\Delta p) - f(p_0) - u\cdot\Delta p}{|\Delta p|} = 0$$

แล้วอนุพันธ์ย่อยของ f มีค่าที่ p_0 และ

$u = Df(p_0)$

พิสูจน์ ถ้าให้ $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ โดยให้ Δp เข้าใกล้เวกเตอร์ศูนย์ตามแกนทีละแกนก็จะได้ว่าสำหรับแกนที่ i, $\Delta p = (O,O,O,\ldots, a_i, \ldots . 0)$; $a_i \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\vec{\Delta p} \to \vec{0}} \frac{f(p_0+\Delta p) - f(p_0)}{|\Delta p|} - u\cdot\frac{\Delta p}{|\Delta p|} = 0 \text{ จึงได้}$$

$$\lim_{\vec{\Delta p} \to 0} \frac{f(p_0+\Delta p) - f(p_0)}{|\Delta p|} - u\cdot(0,0,0,\ldots,\ldots 0) = 0 \text{ จึงได้}$$

$$\lim_{\vec{\Delta p} \to \vec{0}} \frac{f(p_0+\Delta p) - f(p)}{|\Delta p|} = u_i$$

ดังนั้น $u_i = f_i(p_0)$

นั่นคืออนุพันธ์ย่อยของ f มีค่าที่ p_0 และได้

$u = (f_1(p_0), f_2(p_0), f_3(p_0), \ldots, f''(p_0))$

$= Df(p_0)$ □

สูตร (1–14) เป็นพื้นฐานสำหรับทฤษฎีบททั่วๆไปของการหาอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น f กล่าวได้ว่า หาอนุพันธ์ได้ในเซตเปิด D ถ้ามีเวกเตอร์ u ซึ่งสมนัยกันระหว่าง $p_0 \in D$ และ u ที่เกิดขึ้นใน (1–14) ทฤษฎีบท 1.9 นำกลับมาสู่อนุพันธ์เวกเตอร์อีกครั้งหนึ่ง ทฤษฎีบทการประมาณค่าซึ่งจะนำสิ่งที่เป็นประโยชน์ ประการแรกก็คือความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์เวกเตอร์ Df กับอนุพันธ์ตามทิศทาง $D_\beta f$

ทฤษฎีบท 1.10 *ถ้า* $f \in C^1$ *ในเซตเปิด* S *แล้ว อนุพันธ์มีทิศทางของ* f *หาค่าได้ที่ทุกจุด* $p \in S$ *และ* $D_\beta f(p) = \beta \cdot Df(p)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f \in C'$ ในเซตเปิด S ดังนั้นสำหรับจุด p ใด ๆ ใน S ย่อมมี $Df(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots, f_n(p))$ โดยใช้ทฤษฎีบทการประมาณค่า (ทฤษฎีบท **1.8**) โดยให้ $\triangle p = \lambda\beta$ และ $|\triangle p| = |\lambda|$

$$f(p + \lambda\beta) - f(p) - Df(p)\cdot\lambda\beta = R$$

และ $$\frac{f(p+\lambda\beta) - f(p)}{\lambda} = Df(p)\cdot\beta + \frac{R}{\lambda}$$

ดังนั้น $$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(p+\lambda\beta) - f(p)}{\lambda} = \beta\cdot Df(p) + \lim_{\lambda\to 0}\frac{R}{\lambda}$$

นั่นคือ $D\beta f(p) = \beta\cdot Df(p)$ เนื่องจาก $\lim_{\lambda\to 0}\frac{R}{\lambda} = 0$ □

บทแทรก *อนุพันธ์* Df *ที่จุด* p *เป็นเวกเตอร์ซึ่งชี้ในทิศทางที่ฟังก์ชัน* f *แปรค่ามากที่สุดที่* p *และความยาวของเวกเตอร์คืออนุพันธ์ของ* f *ในทิศทางนี้*

พิสูจน์ บทแทรกนี้ตั้งขึ้นจากการสังเกตที่ง่าย ๆ ว่าเวกเตอร์ β แปรค่าไปจนได้ค่าสูงสุดของ $\beta \cdot Df(p)$ ก็จะพบว่ามุมระหว่าง β และ $Df(p)$ เป็น $\vec{0}$ และค่าสูงสุดนี้ ก็คือ $|Df(p)|$ □

จากผลลัพธ์เหล่านี้ก็จะสามารถคำนวณผลลัพธ์ต่าง ๆ ได้อีกหลายอย่างสำหรับฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัว

ทฤษฎีบท 1.11 *ให้* $f \in C^1$ *ในเซตเปิด* S *และสมมติว่า* f *มีค่าสูงสุด (ต่ำสุด) เฉพาะที่* (*local maximum (minimum)*) *ที่จุด* $p_0 \in S$ *แล้ว* $Df(p_0) = \vec{0}$ *นั่นคือทุกอนุพันธ์ย่อยของ* f *ที่* p_0 *เป็นศูนย์*

พิสูจน์ สมมติว่าที่ p_0 เป็นค่าสูงสุดเฉพาะที่สำหรับ f ดังนั้น

$f(p) \leqslant f(p_0)$ สำหรับทุก p ที่อยู่ใกล้ ๆ p_0 สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย β ใด ๆ

$$D_{\beta}f(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\beta)-f(p_0)}{t} \geqslant 0$$

และ $$D_{-\beta}f(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t(-\beta))-f(p_0)}{t} \geqslant 0$$

เนื่องจาก $D_{\beta}f(p_0) = -D_{-\beta}f(p_0)$

เพราะฉะนั้น $D_{\beta}f(p_0) = 0$ สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย β ใด ๆ

จึงได้ $D_{\beta}f(p_0) = \beta\cdot Df(p_0) = 0$ สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย β ใด ๆ ($\beta \neq 0$

และไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับ $Df(p_0)$)

ดังนั้น $Df(p_0) = \vec{0}$ □

ที่จุดใด ๆ ซึ่ง $Df = \vec{0}$ กล่าวได้ว่าที่จุดนั้นเป็นจุดวิกฤต (critical point) สำหรับ f จึงกล่าวได้ว่าทุกค่าสุดขีดเฉพาะที่ (local extremum) ของ f ย่อมมีจุดวิกฤตคู่กันไป อย่างไรก็ดีไม่ทุกจุดวิกฤตจะให้ค่าสุดขีดเนื่องจากบางทีมันเป็นจุดอานม้า (saddle point)

ทฤษฎีบท 1.12 *ถ้า $f \in C^1$ ในเขตเปิด S ซึ่งไม่ขาดตอน (connected) และ $Df = \vec{0}$ ที่ทุกจุดใน S แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่ใน S*

พิสูจน์ โดยใช้บทนำค่าตัวกลางในสูตร 1–7 และจะได้ความจริงว่าอนุพันธ์ย่อย $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ มีค่าเป็นศูนย์ใน S จึงได้ $f(p) - f(p_0) = 0$ สำหรับทุก p ที่อยู่ใกล้ ๆ p_0 ดังนั้น f คงที่เฉพาะที่ใน S เนื่องจาก S ไม่ขาดตอนจึงได้ว่า f คงที่ในวงกว้าง (globally constant) ใน S □

โดยทั่ว ๆ ไปจะมีคำถามว่าถ้าเพียงหนึ่งตัวแปรอนุพันธ์ย่อยเป็นศูนย์จะเกิดอะไรขึ้นเช่น

$f(x,y,z) = x^2 + y^2$ เมื่อค่า z ไม่มีในฟังก์ชันและ $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ที่ทุกจุด

ทฤษฎีบท 1.13 *ให้* $w = f(x, y, z)$ *เมื่อ* f *อยู่ใน* C^1 *ใน เซตนูน (Convex set) เปิด* D *และ* $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ *ใน* D *แล้ว* z *ไม่มีในพังก์ชันนั้น ในกรณีเช่นนี้*

$$f(x, y, z') = f(x, y, z'')$$

เมื่อ (x, y, z') *และ* (x, y, z'') *ทั้งสองจุดอยู่ใน* D

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหา $f_1(x,y)$, $f_2(x, y)$, $f_{12}(x,y)$ ถ้า

   a) $f(x,y) = x^2\log(x^2 + y^2)$

   b) $f(x,y) = x^y$

2. ให้ $f(x,y) = x^2y^3 - 2y$ จงหา $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_2(2,3)$ และ $f_2(y,x)$

3. จงคำนวณหา Df ของแต่ละพังก์ชันที่จุดกำหนดให้

   a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2$ ที่ $(1,2)$

   b) $f(u,v) = u\sin(uv)$ ที่ $(\frac{\pi}{4},2)$

   c) $f(x,y,z) = x^2yz + 3xz^2$ ที่ $(1,2,-1)$

4. a> ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{d o } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   จงแสดงว่า f_1 และ f_2 มีค่าที่ทุก (x,y) แต่ไม่อยู่ใน C^1

   b) f มีอนุพันธ์ตามทิศทางที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

   c) f ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ หรือไม่

5. ให้พังก์ชัน f มีค่าในเซตเปิด D ในระนาบและสมมุติว่า f_1 และ f_2 มีค่าและมีขอบเขตที่ทุกจุดใน D จงแสดงว่า f ต่อเนื่องใน D

6. จงเขียนและพิสูจน์ทฤษฎีบทของ Rolle สำหรับพังก์ชันของตัวแปร 2 ตัวแปร

7. ให้ f และ g อยู่ใน C^1 ในเซตปกคลุมแน่น (compact set) S และให้ $f = g$ บนขอบเขตของ S จงแสดงว่าจะต้องมีจุด $p_0 \in S$ ซึ่ง $Df(p_0) = Dg(p_0)$

8. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ ที่จุด (1,1,2) ในทิศทาง $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

9. ให้ $f(x,y) = xy$ จงแสดงว่าทิศทางของเกรเดียนต์ของ f ตั้งฉากกับเส้นระดับของ f เสมอ

10. จงแสดงว่าแต่ละสมการต่อไปนี้คล้องตาม $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

   a) $u = e^x \cos y$

   b) $u = \exp\left((x^2 - y^2)\sin(2xy)\right)$

11. ให้ $f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

   จงแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดและ f_1, f_2, f_{12} และ f_{21} มีค่าที่ทุกจุดแต่ $f_{12} \neq f_{21}$

12. จงหาอนุพันธ์ตามทิศทางของ $F(x,y,z) = xyz$ ที่ (1,2,3) ในทิศทางจากจุดนี้ไปยังจุด (3,1,5)

13. ถ้า $F(x,y,z,w) = x^2y + xy - 2yw^2$ จงหาอนุพันธ์ของ F ที่จุด (1,1,−1,1) ในทิศทาง $\beta = \left(\frac{4}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

14. นักศึกษาเศรษฐศาสตร์บางคนกล่าวว่า $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงถ้าตัวแปรตัวหนึ่งแปรค่าไปแต่แปรค่าไปเมื่อแปรค่าสองตัวแปรใด ๆ ไปจงอธิบายว่าเกิดอะไรขึ้นกับฟังก์ชันนั้น

1.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

(Differentiation of Composite Functions)

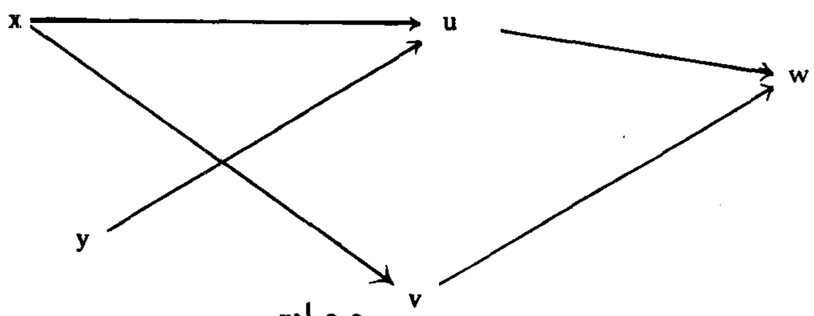
ฟังก์ชันซึ่งพบบ่อย ๆ ว่าสร้างขึ้นโดยฟังก์ชันจากค่าของฟังก์ชันอื่น ถ้า $f(x,y) = xy^2 + x^2$, $g(x,y) = y \sin x$ และ $h(x) = e^x$ แล้วฟังก์ชัน F อาจกำหนดขึ้นโดย

$$(1\text{–}15)\qquad F(x,y) = f\,(g(x,y),h(x)) = ye^{2x}\sin x + y^2\sin^2(x)$$

ความเข้าใจในการแปรสัญลักษณ์ช่วยให้เข้าใจฟังก์ชันดีขึ้นเช่นรายละเอียดของ (1–15) ซึ่งกำหนดว่า $w = F(x,y)$ และเขียนว่า

$$(1\text{–}16)\qquad \begin{cases} w = f(u,v) = uv^2 + u^2 \\ u = g(x,y) = y \sin x \\ v = h(x) = e^x \end{cases}$$

สมการเหล่านี้แสดง w ในพจน์ของ x และ y โดยตรงผ่านตัวแปรกลาง u และ v การเปลี่ยนแปรในตัวอย่างดังกล่าวอาจเขียนได้ด้วยแผนภาพดังรูป 3.6



รูป 3.6

สิ่งสำคัญในหัวข้อนี้คือ ทฤษฎีและการประยุกต์กฎเพื่อคำนวณอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ กระทำเช่นเดียวกับกฎลูกโซ่สำหรับการหาอนุพันธ์ จะพิสูจน์ในกรณีย์พิเศษด้วยการแสดงการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 11.4 *ให้* $F(t) = f(x,y)$ *เมื่อ* $x = g(t)$ *และ* $y = h(t)$ *ในที่นี้สมมติว่า* g *และ* h *อยู่ใน* C^1 *บนย่านของ* t_0 *และ* f *อยู่ใน* C^1 *บนย่านของ* $p_0 = (x_0,y_0)$ *เมื่อ* $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$ *แล้ว* F *อยู่ ใน* C^1 *บนย่านของ* t_0 *และ*

(1–17) $F'(t) = f_1(p)g'(t) + f_2(p)h'(t)$

เมื่อ $p = (g(t),h(t))$

พิสูจน์ สูตรการหาอนุพันธ์ (1–17) เปลี่ยนสัญลักษณ์เสียใหม่ (1–17) ก็คือ

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ในการพิสูจน์ต้องคำนวณ $F(t + \Delta t) - F(t)$

ให้ $Ax = g(t + \Delta t) - g(t)$, $Ay = h(t + \Delta t) - h(t)$ แล้ว

$$\begin{aligned} F(t + At) - F(t) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f(p + \Delta p) - f(p) \\ &= Df(p)\cdot\Delta p + R \\ &= f_1(p)\Delta x + f_2(p)\Delta y + R \end{aligned}$$

เมื่อ $\lim_{\Delta p \to 0} \frac{|R|}{|\Delta p|} = 0$

หารตลอดด้วย At จึงได้

h-18) $$\frac{F(t + At, - F(t)}{\Delta t} = f_1(p)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_2(p)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{R}{\Delta t}$$

เมื่อ $\Delta t \to 0$ แล้ว $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to g'(t)$ และ $\frac{\Delta y}{\Delta t} \to h'(t)$

เนื่องจาก $|\Delta p| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$ ดังนั้น $\frac{|\Delta p|}{|\Delta t|}$ มีขอบเขต

$$\left|\frac{R}{\Delta t}\right| = \frac{|R|}{|\Delta p|}\frac{|\Delta p|}{|\Delta t|} \to 0$$

นั่นคือเมื่อ $\Delta t \to 0$ สูตร 1–18 ก็กลายเป็น

$F'(t) = f_1(p)g'(t) + f_2(p)h'(t)$ □

โดยวิธีนี้สามารถใช้กฎลูกโซ่เพื่อคำนวณหาอนุพันธ์ย่อยสำหรับฟังก์ชันประกอบ เช่น ให้ $w = f(u, v)$ ด้วย $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ กำหนดฟังก์ชัน F โดย $w = F(x, y)$ ในการหาอนุพันธ์ $F_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$ และต้องการอนุพันธ์ตามทิศทางของ F ตามแกน X ในการนี้ก็

ให้ y คงที่แล้วหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ x ตัวเดียว โดยใช้กฎลูกโซ่ในทฤษฎีบท 1.14 จึงได้

$$F_1(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

ด้วยวิธีเดียวกัน

$$F_2(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

ซึ่งสามารถเขียนเสียใหม่เป็น

$$F_1 = f_1 g_1 + f_2 h_1$$

$$F_2 = f_1 g_2 + f_2 h_2$$

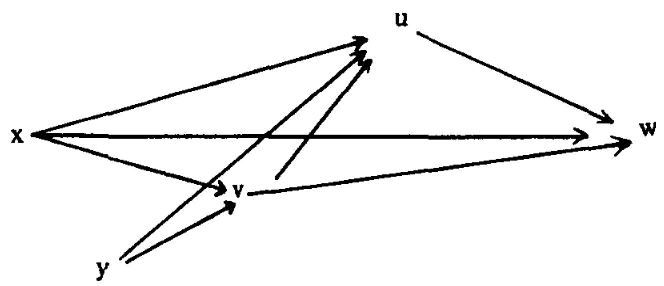
จากตัวอย่าง (1–16) จึงได้

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (v^2 + 2u)(y \cos x) + (2uv)(e^x)$$

และ $$\frac{\partial w}{\partial y} = (v^2 + 2u)(\sin x) + (2uv)(0)$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่ยุ่งยากซับซ้อนขึ้นซึ่งแสดงถึงการจัดเศษส่วนของอนุพันธ์ย่อยในรูปต่าง ๆ ให้ w สัมพันธ์กับ x และ y โดยสมการต่อไปนี้

(1–19) $w = f(x, u, v)$, $u = g(x, v, y)$, $v = h(x, y)$ อาจเขียนแผนภาพได้ดังรูป 1.7 ก็จะพบว่าค่าของ w ที่ขึ้นอยู่กับ x



รูปที่ 1.7

ความจริง w สัมพันธ์โดยตรงกับ x และสัมพันธ์โดยผ่าน u และ v แต่ละเส้นทาง จาก x ไปยัง w ก็จะมีพจน์ $\frac{\partial w}{\partial x}$ ดังนั้นจึงได้

(1–20) $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

เนื่องจาก y ผ่านโดย v และ u

(1–21) $$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

ในทั้งสองสูตรนี้ในรูปของอนุพันธ์ย่อยจะทำให้เข้าใจความเป็นไปของสมการ (1–19) ดังกล่าวแล้วให้ถูกต้อง ใน (1–20) $\frac{\partial w}{\partial x}$ ทางซ้ายมือหมายถึงอนุพันธ์ย่อยของ w ซึ่งเสมือนว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และ y เพียงสองตัวแปร (อาจเขียนว่า $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_y$ เพื่อแสดงว่ายึดให้ y เป็นตัวคงที่เพียงตัวเดียว) และ $\frac{\partial w}{\partial x}$ ทางขวาหมายถึงอนุพันธ์ย่อย w ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, u, v ถ้าจะใช้เขียนแทนด้วยดรรชนีล่างแทน (1–20) และ (1–21) ก็จะต้องเขียนว่า

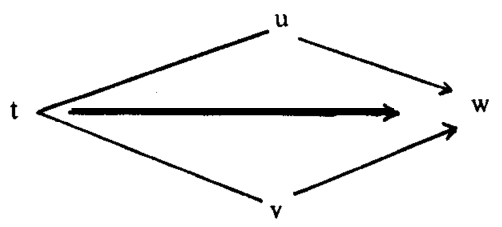
$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_1 + f_2g_1 + f_3h_1 + f_2g_2h_1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_2g_3 + f_3h_2 + f_2g_2h_2$$

ตัวอย่างที่น่าสนใจอีกตัวอย่างหนึ่ง โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์

$$w = F(x, y, t), \quad x = \phi(t), \quad y = \phi(t)$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจจะเขียน $w = f(t)$ ได้โดยการใช้แทนค่าและสามารถเขียนแผนภาพได้ดังรูป 1.8



รูปที่ 1.8

และ

$$(1-22)\qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

โดยขบวนการเช่นนี้อาจคำนวณอนุพันธ์ลำดับสูง ๆ ได้ด้วย ตัวอย่างเช่น ให้หา $\frac{d^2w}{dt^2}$ ก็เขียน (1 – 22) เสียใหม่เป็น

$$\frac{dw}{dt} = F_3(x,y,t) + F_1(x,y,t)\frac{dx}{dt} + F_2(x,y,t)\frac{dy}{dt}$$

แล้วจึงหาอนุพันธ์ครั้งที่ 2

$$\frac{d^2w}{dt^2} = F_{33} + F_{31}\frac{dx}{dt} + F_{32}\frac{dy}{dt} + F_{11}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + F_{12}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + F_{13}\frac{dx}{dt}$$
$$+ F_{22}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + F_{21}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + F_{23}\frac{dy}{dt} + F_1\frac{d^2x}{dt^2} + F_2\frac{d^2y}{dt^2}$$

สมมติว่า F อยู่ใน C^2 ก็อาจเขียนได้เป็น

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\frac{dy}{dt}\right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

ปัญหารูปอื่น ๆ ซึ่งจะใช้ประโยชน์จากกฎลูกโซ่เพื่อการพิสูจน์ เพื่อหาสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดยปริยาย (implicit) พิจารณาสมการคู่นี้

$$(1-23)\qquad \begin{cases} x^2 + ux + y^2 + v = 0 \\ x + yu + v^2 + x^2v = 0 \end{cases}$$

ถ้าให้ x และ y มีค่าเป็นจำนวนเลข ก็จะคำนวณได้ค่าหนึ่ง หรือหลายค่าของ u และ v ได้ สำหรับบางตัวเลือกสำหรับ x และ y ค่าของ u และ v นี้อาจเป็นจำนวนจริง ดังนั้นสมการ (1 – 23) อาจจะกำหนดหนึ่งหรือมากกว่าฟังก์ชัน f และ g ของ x และ y สำหรับ u และ v ได้

$$\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

เช่นถ้าให้ x = 1 และ y = 1 แล้ว (1 – 23) ก็คือ

$$u + v + 2 = 0$$

$$u + v^2 + v + 1 = 0$$

ก็จะได้ค่าของ $(u,v) = (-1,-1)$ และ $(u,v) = (-3,1)$ ในทางทฤษฎีทั่ว ๆ ไปแสดงว่ามีฟังก์ชัน f และ g ในย่าน N ของจุด $(1,1)$ ซึ่ง $f(1,1) = -3$, $g(1,1) = 1$ และ $(1-23)$ เป็นจริงทุก (x,y) ใน N ทราบว่าฟังก์ชัน f สามารถจะคำนวณ $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1$ และ $f_1(1,1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}$

โดยการใช้กฎลูกโซ่และเป็นไปได้อนุพันธ์ย่อยไม่ยากที่จะแก้โดยชัดเจน (explicit) สำหรับฟังก์ชัน f และ g เพื่อการคำนวณสิ่งนี้ได้สำเร็จสำหรับตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น การหาอนุพันธ์แต่ละฟังก์ชันใน $(1-23)$ เมื่อให้ x แปรค่าโดยยึดให้ y คงที่ก็จะได้

$$2x + u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 0 + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$1 + y\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2xv + x^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

แก้สมการข้างบนเพื่อ $\frac{\partial u}{\partial x}$ จึงได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - 2xv - 2uv - 2x^3 - ux^2}{2xv + x^3 - y}$$

ถ้าให้ $x = 1, y = 1, u = -3, v = 1$ ก็จะได้ค่าที่ต้องการ

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)} = f_1(1,1) = 3$$

เพื่อจะหาสูตรสำหรับหาค่าสำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไป สมมติว่ากำหนดสมการขึ้นมาสองสมการ

$$(1-24) \qquad \begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

โดยไม่ต้องแก้สมการเพื่อ u และ v ในพจน์ของ x และ y ต้องการหาค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial v}{\partial x}$ โดยให้ y คงที่ การหาอนุพันธ์ $(1-24)$ โดยมุ่งกระทำต่อตัวแปร x

$$F_1 + F_3\frac{\partial u}{\partial x} + F_4\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$G_1 + G_3\frac{\partial u}{\partial x} + G_4\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

โดยการแก้สมการข้างบน จึงได้สูตรที่ต้องการคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_4 \\ G_1 & G_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_4 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix}} = -\frac{F_1G_4 - F_4G_1}{F_3G_4 - F_4G_3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_3 & F_4 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix}} = -\frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_3G_4 - F_4G_3}$$

ตัวกำหนด (determinant) ของรูปเฉพาะนี้ซึ่งอาจทำให้เป็นรูปง่าย ๆ ที่เรียกกันว่า Jacobians ซึ่งมีสัญลักษณ์ว่า

$$(1-25) \qquad \frac{\partial(A,B)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial s} & \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial s} & \frac{\partial B}{\partial t} \end{vmatrix}$$

โดยการใช้สูตรนี้อาจเขียนสูตรในรูปที่ง่ายเป็น

$$(1-26) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \end{aligned}$$

โดยใช้สูตร (1-26) กับสมการคู่ (1–23) โดยให้

$$F(x, y, u, v) = x^2 + ux + y^2 + v$$

และ $\quad G(x, y, u, v) = x + yu + v^2 + x^2v$

แล้ว $\quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + u \; ; \; \frac{\partial F}{\partial u} = x \; ; \; \frac{\partial F}{\partial v} = 1 \; ;$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 + 2xv \; ; \; \frac{\partial G}{\partial u} = y \; ; \; \frac{\partial G}{\partial v} \; 2v + x^2$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\begin{vmatrix} 2x+u & 1 \\ 1+2xv & 2v+x^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2v+x^2 \end{vmatrix}$

$$= -\frac{2xv + 2uv + 2x^3 + ux^2 - 1}{2xv + x^3 - y}$$

และ $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\begin{vmatrix} x & 2x+u \\ y & 1+2xv \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2v+x^2 \end{vmatrix}$

$$= -\frac{x + 2x^2v - 2xy - uy}{2xv + x^3 - y}$$

สูตรต่อไปเป็นคุณสมบัติพื้นฐานซึ่งจะพบในแบบฝึกหัด ชี้ให้เห็นว่า Jacobian ที่ปรากฏเป็นส่วนของทั้ง 2 เศษส่วนใน (1–26) ต้องไม่ใช่ศูนย์ซึ่งเป็นการรับประกันว่าสมการ (1–24) ต้องมีค่าในรูป

$$u = f(x,y),\ v = g(x,y)$$

ปัญหาที่ยากขึ้นต่อไปนี้เป็นแบบซึ่งเกิดขึ้นในการประยุกต์กับฟิสิกซ์ กฎทางฟิสิกซ์หรือสมมติฐานได้สร้างขึ้นด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) พิจารณากรณีง่าย ๆ สมมติว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็น $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ และสมมติว่าต้องการแทนค่า

$$(1\text{–}27) \qquad \begin{cases} x = s + t \\ y = s - t \end{cases}$$

โดยการประมาณค่าโดยกฎลูกโซ่

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

โดยการแก้สมการ (1–27) จึงได้ $s = (x+y)/2$ และ $t = (x-y)/2$ ดังนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\right)(u)$$

และ $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}\right)(u)$$

หาอนุพันธ์ย่อยอีกครั้งโดยสมมติว่า $u = F(x, y)$ ซึ่ง F อยู่ใน ^{2} จึงได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

และ $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

เมื่อเอาสมการทั้งสองข้างบนลบกับจึงได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$$

ดังนั้นจึงได้ $$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0$$

ตัวอย่างที่ยุ่งยากขึ้นไปอีกในแบบเดียวกันนี้คงเป็นผลการแปลง (transform) สมการ Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ในพิกัดเชิงขั้วโดยใช้

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ครั้งแรกของสมการแรกมุ่งตรงต่อตัวแปร y และครั้งที่ 2 ของสมการที่ 2 มุ่งต่อตัวแปร x จึงได้

(1–28) $$\begin{cases} 0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} r\sin\theta \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} r\cos\theta \end{cases}$$

และเนื่องจาก $x^2 + y^2 = r^2$ ดังนั้น $2r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = 2x$ และ $2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y$ เพราะฉะนั้น

(I-29) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$ และ $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\sin\theta$

แทนค่า (1–29) ลงใน (1–28) จึงได้

(1–30) $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$ และ $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$

แล้ว $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{ae}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u$$

และ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$

$$= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u$$

หาอนุพันธ์พาเชียลอีกครั้งจึงได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos\theta\ \partial r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial\theta^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}$$

$$+ \frac{2\sin\theta\ \cos\theta}{r'}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$= \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{ae} + \frac{2\ \sin\theta\cos\theta\,\partial^2 u}{r\quad \partial r\,de}$$

$$- \frac{2\sin\theta}{r^2}\frac{\cos\theta}{de}\ \frac{c\partial u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}$$

เมื่อบวกทั้งสองสมการข้างบนจึงได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{de2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ จึงได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$$

ในพิกัดเชิงขั้ว

สุดท้ายพิจารณาแบบเฉพาะในปัญหาการเปลี่ยนตัวแปร สมมติว่า E, T, V และ p เป็นตัวแปรสี่ตัวแปรซึ่งเกี่ยวพันธ์กันโดยความสัมพันธ์สองความสัมพันธ์ในรูป

(1–31) $$\begin{cases} \phi(E, T, V, p) = 0 \\ \psi(E, T, V, P) = 0 \end{cases}$$

สมมติเช่นเดียวกันว่าสามารถแก้สมการข้างบนสำหรับตัวแปรคู่หนึ่งในพจน์ของตัวแปรอีกสองตัว แต่ละคู่ของตัวแปรอาจเลือกให้อิสระต่อกัน เมื่อ V และ T อิสระจากกัน ทฤษฎีทางพิสิกซ์ให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในเชิงอนุพันธ์

(1–32) $$\frac{\partial E}{\partial V} - \frac{\partial p}{\partial T} + p = 0$$

สมมติว่าสนใจโดยให้ p และ T เป็นตัวแปรอิสระความสัมพันธ์ทางพิสิกซ์ (1–32) จะเป็นอะไร เพื่อตอบปัญหานี้ด้วยวิธีการสองประการ

ประการแรก สมมติว่าสมการ (1–31) สามารถแก้เพื่อ E และ V ในพจน์ของตัวแปรอิสระใหม่ p และ T ในรูป

(1–33) $$\begin{cases} E = f(p,T) \\ V = g(p,T) \end{cases}$$

เนื่องจากสมการ (1–32) ในรูป $\frac{\partial E}{\partial V}$ และ $\frac{\partial p}{\partial T}$ คำนวณสำหรับตัวแปรอิสสระ V และ T จาก

(1–33) โดยหาอนุพันธ์สองสมการนี้มุ่งตรงต่อตัวแปร V และ T

$$\frac{\partial E}{\partial V} = f_1\frac{\partial p}{\partial V}, \quad \frac{\partial E}{\partial T} = f_1\frac{\partial p}{\partial T} + f_2,$$

$$1 = g_1\frac{\partial p}{\partial V} \text{ และ } 0 = g_1\frac{\partial p}{\partial T} + g_2$$

แก้สมการข้างบนสำหรับ $\frac{\partial E}{\partial V}$ และ $\frac{\partial p}{\partial T}$ เพื่อแทนค่าใน (1–32) จึงได้

$$\frac{\partial E}{\partial V} = \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T = \frac{f_1}{g_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V = -\frac{g_2}{g_1}$$

จึงได้ $$f_1 + Tg_2 + pg_1 = 0$$

และใช้ (1–33) เพื่อเปลี่ยนแปลงสูตรนี้จึงพบว่ารูปใหม่ของกฎทางฟิสิกซ์ใน (1–32) ก็คือ

(1-34) $$\frac{\partial E}{\partial p} + T\frac{\partial V}{\partial T} + p\frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

ประการที่ 2 เริ่มทำจากสมการ (1–32) โดยตรง E และ p อาจเขียนแทนได้ในพจน์ของ V และ T

(1–35) $$\begin{cases} E = F\,(V,T) \\ p = G\,(V,T) \end{cases}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏใน (1–32) ก็คือ $\frac{\partial E}{\partial V} = F_1$ และ $\frac{\partial p}{\partial T} = G_2$ สมการ (1–32) อาจเขียนได้เป็น $F_1 - TG_1 + p = 0$ ให้ p และ T เป็นตัวแปรอิสระ หาอนุพันธ์ย่อย (1–35) มุ่งตรงต่อตัวแปร p และ T จึงได้

$$\frac{\partial E}{\partial p} = F_1\frac{\partial V}{\partial p}, \quad \frac{\partial E}{\partial T} = F_1\frac{\partial V}{\partial T} + F_2$$

$$1 = G_1\frac{\partial v}{\partial p}, \quad o = G_1\frac{\partial V}{\partial T} + G_2$$

แก้สมการเหล่านี้เพื่อ F_1 และ G_2 แล้วแทนค่าในสมการ

$F_1 - TG,\ + p = 0$ จึงได้สมการ (1–34)

แบบฝึกหัด 1.3

1. สร้างแผนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรแล้วหาอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดให้หา

(a) $w = f\,(x, y, z), x = \phi(t)\,, y = \phi(t), z = \theta(t)$ จงหา $\frac{\partial w}{dt}$

(b) $w = F(x, u, t), u = f(x, t), x = \phi(t)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

(c) $w = F(x, u, v), u = f(x, y), v = g(x, z)$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ และ $\frac{\partial w}{\partial z}$

2. ถ้า $w = f(x, y)$ และ $y = F(x)$ จงหา $\frac{dw}{dx}$ และ $\frac{d^2w}{dx^2}$

3. เมื่อ x, y และ z สัมพันธ์กันด้วยสมการ $x^2 + yz^2 + y^2x + 1 = 0$ จงหา $\frac{\partial x}{\partial y}$ และ $\frac{\partial y}{\partial z}$ เมื่อ $x = -1$ และ $z = 1$

4. ให้ x, y, u, v สัมพันธ์กันด้วยสมการ $xy + x^2u = vy^2$ และ $3x - 4uy = x^2v$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ครั้งแรกโดยหาอนุพันธ์โดยตรงครั้งที่ 2 แก้สมการเพื่อ u และ v ในพจน์ของ x, y เสียก่อนจึงหาอนุพันธ์

5. ให้ $F(x, y, z) = 0$ สมมติว่าสมการนี้สามารถแก้เพื่อ z ในพจน์ของ x และ y ได้จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$

6. ภายใต้สมมติฐานเดียวกันกับข้อ 5 จงเขียน $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ในพจน์ของ F และอนุพันธ์ย่อยของ F

7. ให้ $F(x, y, z) = 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y = -1$$

8. ให้ $F(x, y, t) = 0$ และ $G(x, y, t) = 0$ อาจเขียนแทน x และ y ในพจน์ของ t ได้ จงเขียนสูตรทั่ว ๆ ไปสำหรับ $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$

9. ให้ $z = f(xy)$ จงแสดงว่าความสัมพันธ์นี้คล้องตาม

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

10. ให้ $w = F(xz, yz)$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$$

11. ฟังก์ชัน f กล่าวได้ว่าเอกพันธ์ (homogeneous) กำลัง k ในย่าน N ของจุดกำเนิด ถ้า $f(tx, ty) = t^k f(x,y)$ สำหรับทุกจุด $(x,y) \in N$ และทุก t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ สมมติว่า f

ต่อเนื่องจงพิสูจน์ว่า f คล้องตามสมการเชิงอนุพันธ์

$$xf_1(x,y) + yf_2(x,y) + kf(x,y)$$

12. ให้ $z = f(x,y)$ ในข้อ 11 จงแสดงว่า $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ เมื่อ f เป็นเอกพันธุ์กำลัง $k = 0$ จงแสดงในพิกัดเชิงขั้วสมการเชิงอนุพันธ์ กลายเป็นรูปง่าย ๆ $r\frac{\partial z}{\partial r} = 0$ และจากผลลัพธ์นี้ ฟังก์ชันเอกพันธ์กำลัง 0 ทั่ว ๆ ไป อยู่ในรูป $f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$

13. ถ้า $z = F(ax + by)$ แล้ว $b\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

14. ถ้า $u = F(x - ct) + G(x + ct)$ แล้ว

$$C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

15. ถ้า $z = \phi(x, y)$ เป็นค่าหนึ่งของ $F(x + y + z, Ax + By) = 0$ จงแสดงว่า

$$A\frac{\partial z}{\partial y} - B\frac{\partial z}{\partial x} \text{ คงที่}$$

16. จงแสดงว่า ถ้าให้ $x = e^s$, $y = e^t$ ทำให้สมการ

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

กลายเป็น $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

17. จงแสดงว่า ถ้าให้ $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ ทำให้สมการ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ กลายเป็น } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

18. จงแสดงว่า ถ้า p และ E ต่างเป็นตัวแปรอิสระจากกันสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\partial E}{\partial v} - T\frac{\partial p}{\partial T} + p = 0$$

จะอยู่ในรูป $\frac{\partial T}{\partial p} - T\frac{\partial v}{\partial E} + p\frac{\partial (v,T)}{\partial (E,p)} = 0$

19. ให้ f เป็นฟังก์ชันใน C^2 ในระนาบและให้ S เป็นเซตปิดและมีขอบเขต ซึ่ง $f_1(p) = 0$ และ $f_2(p) = 0$ สำหรับทุก $p \in S$ จงแสดงว่ามีค่าคงที่ M ซึ่ง $|f(p) - f(q)| \leq M|p-q|^2$ สำหรับทุก p และ q ใน S
20. จากข้อ 19 จงแสดงว่าถ้า S เป็นเซตของจุดบนส่วนโค้ง ซึ่งกำหนดขึ้นโดย $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, เมื่อ ϕ และ ψ อยู่ใน C^1 แล้วฟังก์ชัน f คงที่ใน S
21. ให้ f เป็นฟังก์ชันใน C^1 ซึ่ง $f(1,1) = 1$, $f_1(1,1) = a$ และ $f_2(1,1) = b$ ให้ $\phi(x) = f(x, f(x,x))$ จงหา $\phi(1)$ และ $\phi'(1)$

1.5 ทฤษฎีบทของเทเลอร์ (Taylor's Theorem)

ความสำคัญและผลลัพธ์ที่เป็นประโยชน์ก็คือการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยพหุนาม (polynomial) หรือเป็นการพัฒนาทฤษฎีบทค่าตัวกลาง

สมมติว่าฟังก์ชัน f ถูกกำหนดขึ้นและต้องการจะหาพหุนาม P ซึ่งประมาณค่า f ในกรณีเฉพาะ ตัวอย่างเช่นเสมอต้นเสมอปลายบน (uniform) บางช่วง I ขบวนการที่คุ้นเคยกันก็คือการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) หรือการเขียนเส้นที่เหมาะสม (curve fitting) เลือกจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ บนช่วง I และกำหนด P ว่า $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ถ้า P เป็นพหุนามกำลัง m ก็จะมีตัวสัมประสิทธิ์ของตัวแปรกำลังต่าง ๆ เป็น $m+1$ ตัวที่จะนำมาพิจารณา ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไปพหุนามกำลัง $n-1$ จะต้องใช้เพื่อประมาณค่า f ที่เหมาะสม n จุด แต่ P ที่คำนวณขึ้นมายังคงแยกกันศึกษาความเที่ยงตรงในการประมาณค่าที่ $x \in I$ มากกว่าที่ x_i อีกวิธีหนึ่งสำหรับเลือกพหุนาม P ที่เหมาะสมเป็นเลือกจุด x_0 ในช่วง เช่นเลือกจุดกึ่งกลาง) แล้วเลือก P ให้เหมาะสมกับ f ที่จุด x_0 จำเป็นจะต้องให้สัญลักษณ์ที่คุ้นเคยกันเพื่อการคำนวณต่อไป

ให้ $f \in C^n$ บนช่วง I รอบ ๆ จุด x_0 ในระหว่างพหุนามกำลัง n ย่อมมีพหุนามอันเดียวเท่านั้นที่เหมาะสมกับ f ที่ x_0 จนถึงอนุพันธ์ลำดับที่ n ดังนั้น

(1–36) $$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เรียกพหุนามนี้ว่าพหุนามเทเลอร์ (Taylor polynomial) กำลัง n สำหรับ f ที่ x_0 และเขียนแทนพหุนามนี้ด้วย P_{X_0} เมื่อ $n = 1$, P_{X_0} เป็นพหุนามกำลังหนึ่ง ซึ่งผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และมีความชันเท่ากับ f ที่ x_0 ซึ่งก็คือเป็นเส้นสัมผัส f ที่ x_0 นั่นเองและ

$$P_{X_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

เมื่อ $n = 2$, P เป็นพาราโบลา ซึ่งสัมผัส f ที่ $(x_0, f(x_0))$ และมีความโค้ง (curvature) เดียวกับ f และเขียนได้เป็น

$$P_{X_0}(x) = A + B\,(x - x_0) + C\,(x - x_0)^2$$

โดยใช้ (1–36) จึงได้ว่า $A = f(x_0)$, $B = f'(x_0)$ และ $C = f''\frac{(x_0)}{2!}$

ดังนั้น $P_{X_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + f''\frac{(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2$

โดยทั่ว ๆ ไป

$$P_{X_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + f''\frac{(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}\frac{(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n$$

ความเที่ยงตรงซึ่งพหุนามที่ประมาณ f ที่จุดในช่วง I ที่ห่างออกไปจาก x_0 ฉะนั้นจึงต้องศึกษาเศษ $R_n(x) = f(x) - P_{X_0}(x)$ ทฤษฎีบทของเทเลอร์แสดงค่าเศษในพจน์ของ f

ทฤษฎีบท 1.15 *(Taylor Remainder) ให้* $f \in C^{n+1}$ *บนช่วง* I *รอบรอบจุด* $x = c$ *และให้* $P_c(x)$ *เป็นพหุนามเทเลอร์กำลัง* n *ที่* c *แล้ว* $f(x) = P_c(x) + R_n(x)$ *สำหรับ* x *ใด ๆ ใน* I *เศษ* R_n *กำหนดได้โดย*

(1–37) $$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)\,(t - c)^n\,dt$$

พิสูจน์ เครื่องมือในการพิสูจน์ก็คือยึดให้ x คงที่ และให้ c เป็นเสมือนตัวแปร แล้วพิจารณาฟังก์ชัน

$$g(t) = P_t(x)$$

$$= f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

จึงพบว่า $g(x) = f(x)$ และ $g(c) = P_c(x)$ ดังนั้น

$$R_n(x) = f(x) - P_c(x)$$

$$= g(x) - g(c)$$

$$= \int_c^x g'(t)dt$$

เมื่อคำนวณค่า g' จึงได้

$$g'(t) = f'(t) + \left\{ f''(t)(x-t) - f'(t) \right\} +$$

$$\left\{ f^{(3)}(t)(x-t)^2/2! - 2f''(t)(x-t)/2! \right\} + \ldots +$$

$$\left\{ f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n! - f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}/n! \right\}$$

$$= f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!$$

เพราะฉะนั้น

$$R_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt \;\square$$

บทแทรก 1 *ถ้า* $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant M$ *สำหรับทุก* $x \in I$ *แล้วบน* I

(1–38) $$\left| R_n(x) \right| \leqslant M \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

พิสูจน์ $$\left| R_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{n!} \int_c^x M(t-c)^n dt$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{M(x-c)^{n+1}}{n+1}$$

$$= M \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \;\square$$

ยังมีรูปอื่น ๆ สำหรับเศษ $R_n(x)$ รูปหนึ่งของเศษเหล่านี้ขึ้นอยู่กับการประยุกต์การประมาณค่าต่าง ๆ ออกไปในรูปของอินทิกรัลดังสมการ (1 – 37) นำมาสู่ข้อความที่สัมพันธ์ระหว่าง $f(x)$ และพหุนามเทเลอร์ที่ $x = c$ ต่อไปนี้ซึ่งอาจดีกว่า (1 – 37)

บทแทรก 2 *ถ้า* $f \in c^{n+1}$ *ในย่าน* I *ของ* c *แล้วสำหรับ* x *ใด ๆ ใน* I,

(1–39) $$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} + R_n(x)$$

เมื่อ

(1–40) $$R_n(x) = f^{(n+1)}(\tau)\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

และ τ *เป็นจุดที่เลือกจากจุดระหว่าง* x *และ* c

หมายเหตุ ถ้า $n = 0$ (1 – 40) ก็คือทฤษฎีบทค่าตัวกลางซึ่งได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 1.2 ดังนั้นทฤษฎีบทของเทเลอร์ก็คือพัฒนาการของทฤษฎีบทค่าตัวกลางนั่นเอง ความเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันระหว่าง (1–37) และ (1–40) จะได้จากแบบฝึกหัดข้อ 5 ของหัวข้อ 2.2 และแบบฝึกหัดข้อ 8 ของหัวข้อนี้

สำหรับพหุนามเทเลอร์เป็นการประมาณค่าของ f ที่ดีเสมอต้นเสมอปลายในช่วง I ด้วย เศษ R_n ก็ต้องเสมอต้นเสมอปลายใน I ด้วย สิ่งสำคัญสำหรับทฤษฎีบทอยู่ที่ความจริงที่ว่าเมื่อสูตร R_n สามารถประมาณค่าได้หรือไม่ ตัวอย่างเช่นให้หาพหุนามเพื่อประมาณค่า e^x บนช่วง $[-1, 1]$ ให้ค่าถูกต้องภายใน .005 โดยใช้(1 – 36)เมื่อ $x_0 = 0$ จึงได้

$$P(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

ในกรณีนี้จึงได้

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

โดยการใช้สูตรในบทแทรก 1 จึงได้

$$\left|e^x - P(x)\right| = \left|R_n(x)\right| \leqslant M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

เมื่อ M เป็นค่าสูงสุดของ e^x บนช่วง $[-1,1]$ เนื่องจาก x อยู่ใน $[-1,1]$ จึงได้ $\left|R\right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$ เพื่อให้ค่าเที่ยงตรงอยู่ภายใน .005 ก็สามารถเลือก n = 5 ก็จะได้พหุนามดังกล่าวเป็น

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

ในกรณีนี้จะเห็นได้โดยชัดว่าการเพิ่มโดยเร็วของแฟกทอเรียล n! เมื่อเพิ่มกำลัง n ของพหุนามเทเลอร์ ย่อมเพิ่มความเที่ยงตรงให้ในช่วง $[-1,1]$ หรือในความจริงบนช่วงที่มีขอบเขต อันนี้เป็นคุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชันชี้กำลัง

นิยาม 1.5.1 *ฟังก์ชัน f กล่าวได้ว่าวิเคราะห์ได้ (analytic) ที่จุด x_0 ถ้ามีช่องเปิด I รอบๆ x_0 ซึ่ง f อยู่ในคลาสส์ C^∞ และ $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ สำหรับแต่ละ $x \in I$*

ฟังก์ชัน e^x, sin x และ cos x วิเคราะห์ได้ทุก x_0, $\sqrt{x}$ วิเคราะห์ได้ที่สำหรับแต่ละ $x_0 > 0$ และ $\frac{x}{x^2-1}$ วิเคราะห์ได้ที่แต่ละจุดของช่วง $x < -1$, $-1 < x < 1$ และ $1 < x$ เนื่องจาก

$$R_n(x) = f(x) - P_{x_0}(x)$$

คุณสมบัติที่เหมือนกันนี้อาจกล่าวได้ว่าลำดับ (sequence) ของพหุนามเทเลอร์กำลัง n เมื่อ n = 1, 2, 3, ... ลู่เข้าสู่ (convegre) f ในย่านของ x_0 ซึ่งจะพบในบทที่ 4 อาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันที่วิเคราะห์ได้ก็คือผลบวกในอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

อาจมีฟังก์ชันใน C^∞ ซึ่งวิเคราะห์ไม่ได้สำหรับพหุนามเทเลอร์ประมาณค่าได้ไม่ดี และโดยทั่วๆ ไปก็จะยกตัวอย่างเช่น $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ เมื่อ $x \neq 0$ ฟังก์ชัน f ดังกล่าวต่อเนื่อง

และหาอนุพันธ์ได้เรื่อย ๆ ไม่จำกัด ซึ่งความจริง $f'(x) = 2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ และสามารถแสดงได้ว่า $f^{(n)}(x) = x^{-3n}Q(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ เมื่อ Q เป็นพหุนามกำลัง $2(n-1)$ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ซึ่งอาจให้ $f(0) = 0$ ได้ (ไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้) จากสูตร $f^{(n)}$ แสดงว่าเป็นจริงที่ว่า $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เมื่อ $n = 1$, $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ โดยใช้กฎของ l'Hospital จึงได้ว่า $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(h)$ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ มีข้อเสนอแนะที่จะหาผลลัพธ์ให้ทั่ว ๆ ไป ฟังก์ชัน f สามารถแสดงว่าวิเคราะห์ได้สำหรับทุก $x \neq 0$ อย่างไรก็ดีก็ยังวิเคราะห์ไม่ได้ที่ $x = 0$ แม้ว่าจะหาอนุพันธ์ได้ไปเรื่อย ๆ (f อยู่ใน C^{∞} ที่ $x = 0$) พหุนามเทเลอร์กำลัง n ที่ $x_0 = 0$ คือ $0 + 0x + \frac{0x^2}{2} + \ldots + \frac{0x^n}{n!}$ ดังนั้น $R_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ซึ่งไม่ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ n เพิ่มในย่านใด ๆ ของศูนย์ สำหรับฟังก์ชันนี้ถ้าใช้พหุนามเทเลอร์ที่จุดกำเนิดไม่มุ่งเข้าสู่ฟังก์ชัน

ความจริงในตอนนี้ว่าในขณะที่พหุนามเทเลอร์ง่ายที่จะกำหนด แต่อาจเป็นพหุนามที่ดีที่สุดที่จะใช้ประมาณค่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ ตัวอย่างเช่นบน $[-1, 1]$ พหุนามเทเลอร์ $1 + x + \frac{x^2}{2}$ สำหรับ e^x ซึ่งประมาณค่าผิดไป .22 ในเมื่อพหุนาม $.99 + 1.175x + .543x^2$ ซึ่งประมาณค่า e^x บนช่วงนี้ด้วยค่าผิดพลาดอย่างมาก .04 ทฤษฎีบทการประมาณค่าเป็นสาขาที่น่าสนใจในการทำวิทยานิพนธ์สิ่งที่ช่วยได้มากเห็นจะเป็นคอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูง ๆ และวิธีการใหม่ ๆ เพื่อหาพหุนามที่ดี และส่วนของพหุนามเพื่อประมาณค่า ดังที่ได้ค้นพบแล้ว

แม้จะปรากฏแล้วว่าเป็นฟังก์ชันที่ดีน่าจะประมาณค่าได้ดีด้วยพหุนามเทเลอร์ แต่ไม่จริงเสมอไปว่าถ้าเพิ่มกำลังให้กับพหุนามเทเลอร์ อาจยิ่งออกห่างไปจากฟังก์ชันเช่นให้ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ และสร้างพหุนามเทเลอร์สำหรับ f ที่ $x_0 = 0$ จึงได้

$$P_0(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n}$$

โดยการคำนวณหาเศษ

$$R_{2n}(x) = \frac{1}{1+x^2} - P_0(x)$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{1+x^2}$$

จึงพบว่า $|R_{2n}(x)|$ มีค่าน้อยมากบนช่วงเปิด $-1 < x < 1$ ถ้า n มีค่ามาก ดังนั้นถ้าเพิ่มกำลังให้กับ P_0 ก็จะประมาณค่า f ได้ดีมากในช่วงนี้ อย่างไรก็ดี $P_0(x)$ ประมาณค่าได้ไม่ดีนอกช่วงนี้ไม่ว่าจะเลือก n ให้มากเท่าไรก็ตาม เช่นให้ $x = 2$ แล้วเพิ่ม n ขึ้นไป $P_0(x)$ ก็จะยิ่งประมาณค่า f ได้เลวลง การอธิบายความจริงนี้ขึ้นอยู่กับความเป็นไปของฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (complex number) x ซึ่งความจริงฟังก์ชันนี้กำหนดค่าไม่ได้เมื่อ $x = \sqrt{-1}$ สำหรับความจริงนี้กำลังของพหุนามในการประมาณค่าพหุนามเทเลอร์สามารถประมาณค่าได้เฉพาะจำนวนจริงหรืออย่างไรจะได้ศึกษาต่อไปในบทที่ 4

กลับมาพิจารณาฟังก์ชันหลายตัวแปร จุดมุ่งหมายแรกเพื่อพัฒนาทฤษฎีบทค่าตัวกลาง

ทฤษฎีบท 1.16 *ให้ $f \in C$ ในเขตเปิดนูน S (an open convex set S) สำหรับจุด P_1 และ P_2 ใน S มีจุด p^* อยู่บนส่วนของเส้นตรงต่อระหว่างจุดทั้งสองซึ่ง*

(1–41) $$f(p_2) - f(p_1) = Df(p^*) \cdot (p_2 - p_1)$$

พิสูจน์ การพิสูจน์จะพิสูจน์สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งเป็นพื้นฐานของฟังก์ชันหลายตัวแปรขึ้นไปได้

ให้ $p_1(x, y)$ และ $p_2 = (x + \triangle x, y + \triangle y)$ แล้วทฤษฎีบทนี้จะทราบได้ว่ามีจำนวน $\lambda, 0 < \lambda < 1$ ซึ่ง

$$f(p_2) - f(p_1) = f_1(p^*)\,\triangle x + f_2(p^*)\triangle y$$

เมื่อ $p^* = (x + \lambda\triangle x, y + \lambda\triangle y)$ ในการพิสูจน์สร้างฟังก์ชันพิเศษ F สำหรับตัวแปรตัวเดียว

$$F(t) = f(p_1 + t(p_2 - p_1))$$
$$= f(x + t\triangle x, y + t\triangle y)$$

ใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางสำหรับตัวแปรตัวเดียว

$$F(1) - F(0) = (1-0)\ F'(\lambda)$$
$$= F'(\lambda)$$

เมื่อ λ เป็นบางจุดระหว่าง 0 และ 1 โดยกฎลูกโซ่

$$F'(t) = f_1\triangle x + f_2\triangle y$$

ดังนั้น $F'(\lambda) = Df(p^*) \cdot (\triangle x, \triangle y)$ เมื่อ p^* เป็นจุด

$(x + \lambda\triangle x, y + \lambda\triangle y)$ ซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรงระหว่าง p_1 และ p_2

เนื่องจาก $F(1) - F(0) = f(p_2) - f(p_1) = F'(p)$

นั่นคือ $f(p_2) - f(p_1) = Df(p^*) \cdot (p_2 - p_1)$ □

หมายเหตุ ความนูนของเซต S จะใช้เมื่อแน่ใจว่าจุด p^* อยู่ในเซต S เป็นสิ่งสำคัญที่ต้องมีสำหรับสูตร (1–41) และส่วนของเส้นตรง p_1 p_2 อยู่ใน S ด้วย

ถ้าจะใช้ทฤษฎีบทของเทเลอร์ (Taylor s theorem) แทนที่จะใช้ทฤษฎีบทค่าตัวกลางก็จะได้ทฤษฎีบทของเทเลอร์สำหรับฟังก์ชันตัวแปรสองตัว

ทฤษฎีบท 1.17 *ให้* f *อยู่ ในคลาสส์* C” $^{+1}$ *ในย่านของจุด* $p_0 = (x_0, y_0)$ *แล้วที่*

$p = (x, y)$

$$f(p) = f(p_0) + \frac{x - x_0}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{p_0} + \frac{y - y_0}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{p_0}$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{p_0} + \frac{(x - x_0)}{1!}\frac{(y - y_0)}{1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{p_0}$$

$$+ \frac{(y - y_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{p_0} + \cdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{p_0} + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-y_0)}{1!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \Big|_{p_0}$$

$$+ \ldots + \frac{(y-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \Big|_{p_0} + R_n(x,y)$$

เมื่อ

$$R_n(x,y) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} \Big|_{p^*} + \ldots$$

$$+ \frac{(y-y_0)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}} \Big|_{p^*}$$

และ p^* *เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรงที่ต่อระหว่าง* p_0 *และ* p

โดยการให้สัญลักษณ์พิเศษซึ่งจะได้สัญลักษณ์ในรูปง่าย ๆ โดยให้ $\triangle x = x - x_0$ และ $\triangle y = y - y_0$ ดังนั้น

$$\triangle p = (\triangle x, \triangle y) = p - p_0$$

กำหนดตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) U โดย

$$U = \triangle x \frac{\partial}{\partial x} + \triangle y \frac{\partial}{\partial y}$$

ดังนั้น $Uf = \triangle x f_1 + \triangle y f_2$ การกระจายสูตรของเทเลอร์ก็จะเขียนได้เป็น

$$(1-42) \qquad f(p_0 + \triangle p) = f(p_0) + \frac{1}{1!} Uf(p_0) + \frac{1}{2!} U^2 f(p_0) + \ldots + \frac{1}{n!} U^n f(p_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} U^{n+1} f(p^*)$$

ตัวอย่างเช่น

$$U^2 f(p_0) = \left[(\triangle x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(\triangle x)(\triangle y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\triangle y)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] (f)(p_0)$$

$$= (\triangle x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{p_0} + 2(\triangle x)(\triangle y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{p_0} + (\triangle y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{p_0}$$

เครื่องมืออันนี้เป็นไปได้ที่จะสร้างพหุนามสำหรับฟังก์ชันของตัวแปร n ตัวแปรในรูปของทฤษฎีบทของเทเลอร์โดยใช้ดรรชนีล่างกับตัวแปรโดยให้ $\triangle p = (\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3,$

$\ldots, \triangle x_n)$ และใช้ตัวดำเนินการ u โดย

(1-43) $$u = \triangle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \triangle x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \triangle x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + \triangle x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

ดังนั้น $Uf(q) = \triangle p \cdot Df(q)$

ข้อความในทฤษฎีบทของเทเลอร์ปรากฏเช่นเดียวกันในตัวแปร n ตัวแปรไม่ใช่เพียงสองตัวแปรเช่น (1–43) เนื่องจากกำลังของ U ซึ่งจะยุ่งยากในการแปลออกมาเป็นสูตรกำลังสูง ๆ ของอนุพันธ์ย่อยของ f ดูจากแบบฝึกหัดข้อ 17

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงแสดงว่า sin x สามารถประมาณค่าได้โดย $x - \frac{x^3}{6}$ มีค่าผิดพลาดไม่เกิน .01 ในช่วง $[-1, 1]$
2. จงคำนวณความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า cos x ด้วย $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ บนช่วง $[-1, 1]$
3. จงคำนวณความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า log (1 + x) ด้วย $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ ในช่วง $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
4. จงคำนวณความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า $\sqrt{x}$ ด้วย $1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$ ในช่วง $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
5. จะต้องใช้พหุนามเทเลอร์กี่เทอมเพื่อประมาณค่า sin x เพื่อให้ผิดพลาดไม่เกิน .01 บนช่วง $[0,\pi]$ และบนช่วง $[0,2\pi]$
6. สมมติว่า $f(0) = f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ และ $f'(0) = 1$ และสมมุติว่า f อยู่ใน C^3 จงแสดงว่ามีจุด c ใน $[-1,1]$ เมื่อ $f'''(c) \geq 3$
7. สมมติว่า $f \in C''$ ซึ่ง $|f''(x)| \leq M$ และ $f(x) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty^-$ จงพิสูจน์ว่า $f'(x) \to 0$ เมื่อ $x \to \infty^-$

8. ให้ $p(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \frac{f''(c)(x-c)^3}{3!}$ เป็นพหุนามเทเลอร์ที่ c กำลัง 3 ให้ $g(x) = f(x) - p(x) - \frac{A(x-c)^4}{4!}$ สมมติว่า A ถูกเลือกขึ้นดังนั้น $g(\bar{x}) = 0$ จงพิสูจน์ว่า τ ระหว่าง c และ $\bar{x}$ ซึ่ง $A = f^{(4)}(\tau)$ (คำแนะนำใช้แบบฝึกหัดข้อ 2 ในหัวข้อ 3.2)

9. จงแสดงว่าทุก $x \geqslant 1$, $\log x \leqslant \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

10. จงแสดงว่าสำหรับ $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant \frac{3}{2}x^2$ สามารถแทน $\frac{3}{2}$ ด้วยเลขมากกว่าหรือไม่ ?

11. ให้ f มีเงื่อนไข $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant B^{(n)}$ สำหรับทุก x ในช่วงเปิด I และทุก n จงแสดงว่า f วิเคราะห์ได้บน I

12. ให้ f เป็นคลาสส์ C^2 บนช่วง $[0,1]$ ซึ่ง $f(0) = f(1) = 0$ และสมมติว่า $|f''(x)| \leqslant A$ สำหรับทุก x, $0 < x < 1$ จงแสดงว่า $\left|f'(\frac{1}{2})\right| \leqslant \frac{A}{4}$ และ $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ สำหรับ $0 < x \leqslant 1$

13. ถ้า $f(0) = 0$ และ $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ สำหรับ $0 \leqslant x \leqslant L$ จงแสดงว่าบนช่วงนั้น $f(x) \equiv 0$

14. กล่าวว่า f เป็นพหุนามเป็นท่อน ๆ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ ถ้ากำหนด x_0 มีย่าน N_{x_0} และพหุนาม $p_{(x)}$ และบน N_{x_0}, $f(x) = P(x)$ จงแสดงว่า f เป็นพหุนาม

15. จงเขียนกราฟของ $y = \frac{1}{1+x^2}$ แล้วเปรียบเทียบกับกราฟของพหุนาม

$$P_2(x) = 1 - x^2 \text{ และ } P_4(x) = 1 - x^2 + x^4$$

16. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ และกราฟของพหุนามเทเลอร์

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{ และ } P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

จงพิจารณาความเป็นไปและผลลัพธ์กระทำในข้อต่อไป

17. ใช้สูตร (1–43) หาพิกัดของทฤษฎีบทของเทเลอร์ในสามตัวแปร ซึ่งโดยให้เศษเป็นกำลังสาม

18. ให้ $f \in C'$ ในเซตนูนเปิด S ใน R^n จงแสดงว่า f คล้องตามเงื่อนไข Lipschitz บน compact subset $E \subseteq S$