บทที่ 5
อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

ในวิชาแคลคูลัสพื้นฐานได้กล่าวถึงนิยามและการหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบมาบ้างแล้ว จะเห็นว่าในการหาพื้นที่เซตที่เราพิจารณาถึงเป็นเซตที่มีขอบเขต ถ้าจะกล่าวถึงการหาพื้นที่ของเซตที่ไม่มีขอบเขต จะเป็นการศึกษาเรื่องอินทิกรัลไม่ตรงแบบ นอกจากนั้น ในการหาค่าอินทิกรัล เช่น $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ จะเห็นว่าช่วงของการอินทิเกรตมีขอบเขต แต่ตัวถูกอินทิเกรต คือ $\frac{1}{x}$ ไม่มีขอบเขต อินทิกรัลชนิดนี้ก็เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบอีกชนิดหนึ่ง

5.1 ความนำ

ถ้าพิจารณาหาพื้นที่ของรูปบนเซตที่ไม่มีขอบเขต เช่น

ให้ D เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตที่ต้องการจะหาพื้นที่

ถ้ามีลำดับของสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$ ซึ่งผลผนวก คือระนาบทั้งระนาบ เลือก R_n เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (n, n)

พิจารณา $D_n = R_n \cap D$

จะได้ว่า D_n เป็นเซตที่มีขอบเขต และ

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$$

จะได้ $\{A(D_n)\}$ เป็นลำดับของพื้นที่ซึ่งเป็นลำดับที่เพิ่มขึ้นอย่างเดียว หรือลดลงอย่างเดียว

ถ้า $\{A(D_n)\}$ มีขอบเขต จะลู่เข้า ดังนั้น

$$A(D) = \lim_{n \to \infty} A(D_n)$$

ถ้า $\{A(D_n)\}$ ไม่มีขอบเขต ลำดับจะลู่ออก และเขียนแทนด้วย

$$A(D) = \infty$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = f(x)$ เหนือแกน x

วิธีทำ จะเห็นว่าบริเวณที่ต้องการหาพื้นที่คือเซต D ซึ่งไม่มีขอบเขต

และ $D = \left\{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}\right\}$

ให้ R_n เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (n, n)

$D_n = R_n \cap D$ บริเวณ D_n ดังรูป 5.1

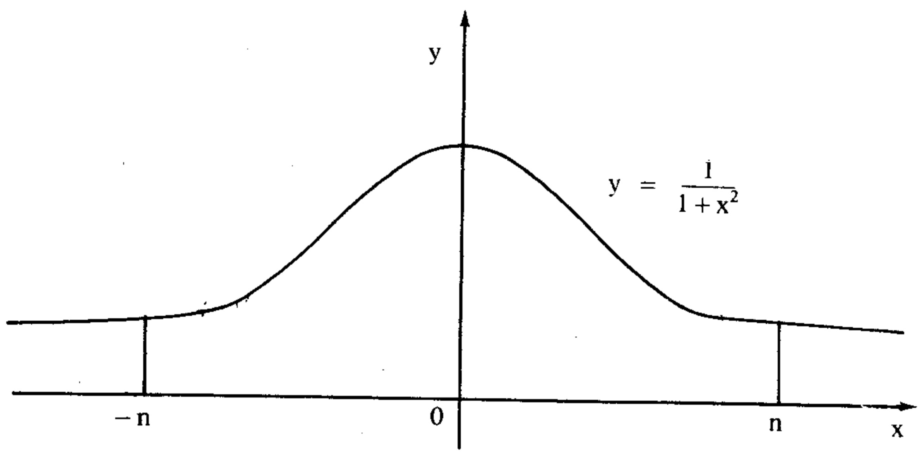
$$A(D_n) = \int_{-n}^{n} \left(\int_{0}^{1/1+x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 2 \arctan n$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} A(D_n) = \pi$$

ดังนั้น $A(D) = \pi$

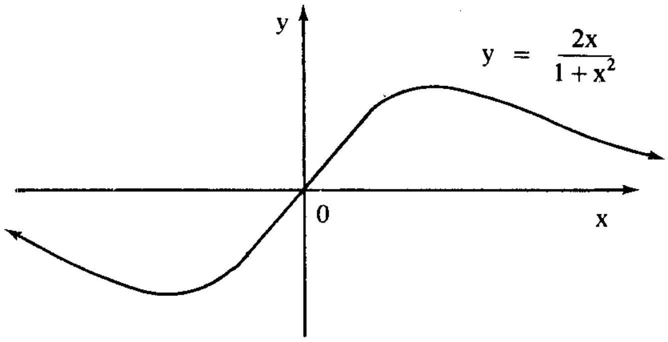


รูปที่ 5.1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = \frac{2x}{1+x^2}$

วิธีทำ บริเวณที่ต้องการหาพื้นที่ คือรูป 5.2

ให้ D เป็นเซตของจุด (x, y) ซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $y = \frac{2x}{1+x^2}$



รูปที่ 5.2

$$A(D_n) = 2\int_0^n \left(\int_0^{\frac{2x}{1+x^2}} dy\right)dx$$

$$= 2\int_0^n \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= 2\ \ln(1+n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} A(D_n) = 2\lim_{n\to\infty} \ln(1+n^2)$$

$$= \infty$$

จากตัวอย่างทั้งสองจะเห็นว่ามีแกน x เป็นเส้นกำกับทั้งคู่ ตัวอย่างแรก หาพื้นที่ได้เป็นค่าจำนวนจริง แต่ตัวอย่างที่ 2 หาค่าไม่ได้ เราอาจจะกล่าวได้ว่า กราฟ $y = \frac{1}{1+x^2}$ นั้นเข้าใกล้ 0 เร็วกว่ากราฟ $y = \frac{2x}{1+x^2}$ เมื่อ $x \to \infty$ หลังจากอินทิเกรตจาก 0 ถึง n ในตัวอย่างจะมีพื้นที่เหลือมากกว่า ดังนั้น เมื่อ $x \to \infty$ จึงหาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของอินทิกรัล $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

วิธีทำ $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx$$

$$= \left| \frac{x^{-1}}{1-} \right|_{-1}^{1}$$

$$= -\left| \frac{1}{x} \right|_{-1}^{1} = -2$$

จะเห็นว่าตัวถูกอินทิเกรตคือ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ มีค่าเป็นบวกเสมอในช่วง $[-1, 1]$ แต่ค่าของอินทิกรัล $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ มีค่าเป็นลบ ซึ่งขัดกับความหมายของอินทิกรัล ทั้งนี้ เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรตคือ $\frac{1}{x^2}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จะมีค่าเข้าใกล้ ∞ นั่นคือ $\frac{1}{x^2}$ ไม่มีขอบเขตในช่วง $[-1, 1]$

ดังนั้น การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงใด ๆ จะอาศัยนิยามของอินทิกรัลไม่ตรงแบบเช่นเดียวกัน แต่ในกรณีที่อินทิเกรตบนช่วงที่ไม่มีขอบเขตดังตัวอย่างที่ 1, 2 ฟังก์ชันหรือตัวถูกอินทิเกรตอาจจะมีขอบเขตหรือไม่มีก็ได้

นอกจากการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยการคำนวณแล้ว บางฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ยาก ก็อาจจะอาศัยทฤษฎีการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออก และในตอนท้ายของบทก็จะกล่าวถึงฟังก์ชันซึ่งนิยามจากอินทิกรัลรูปพิเศษคือ ฟังก์ชันแกมมาและเบตา

5.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

ถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต $c \leqslant x < \infty$ และถ้า f มีค่าเป็นบวก และ D เป็นบริเวณซึ่ง

$$D = \{(x, y) | c \leqslant x < \infty \wedge 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

จงเห็นว่าพื้นที่ของ D ในที่นี้คือ A(D) และ

$$A(D) = \lim_{n\to\infty} \int_c^n \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^n f(x)dx$$

ดังนั้น $\int_c^{\infty} f = A(D) = \lim_{n\to\infty} \int_c^n f(x)dx$ **ซึ่งเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบรูปหนึ่ง ดังนั้นจะได้นิยามดังนี้**

นิยาม 1 ถ้า f มีความต่อเนื่องบน $a \leqslant x < \infty$ แล้ว

$$\int_a^\infty f = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ถ้าค่า $\int_a^\infty f$ หาค่าได้ เรากล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบนี้ลู่เข้า ถ้าหาค่าไม่ได้ เรากล่าวว่าลู่ออก

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณา $\int_0^\infty e^{-ax}dx,\ a > 0$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ
$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-ax}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-ax}}{-a}\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{a} - \frac{e^{-at}}{a}\right] = \frac{1}{a}$$

ซึ่งมีค่าลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 2
$$\int_1^\infty x^p dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^t, \quad p \neq -1$$

ถ้า $p > -1$ จะได้
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}\right], \quad p \neq -1$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p dx = \infty$$

ดังนั้น อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่ออก

ถ้า $p < -1$ จะได้

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p dx = \frac{-1}{p+1}$$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้าสู่ $\frac{-1}{p+1}$

ถ้า $p = -1$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^p dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln t$$

$$= \infty \text{ ซึ่งมีค่าลู่ออก}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบรูป $\int_1^\infty x^p dx$ ลู่เข้าเมื่อ $p < -1$ และลู่ออก เมื่อ $p \geqslant -1$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\int_{-\infty}^b f$ ก็จะให้นิยามได้ดังนี้

นิยาม 2 ถ้า f มีความต่อเนื่องบน $-\infty < t \leqslant b$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{t\to\infty}\int_t^b f(x)dx$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้า $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ลู่เข้า และฟังก์ชัน f มีค่ามากกว่า หรือเท่ากับศูนย์ $\int_{\infty}^b f(x)dx$ ก็คือพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน x สำหรับทุก $x \leqslant b$

ตัวอย่าง จงพิจารณาการลู่เข้าของ $\int_{-\infty}^0 \sin x\, dx$

วิธีทำ

$$\int_{-\infty}^0 \sin x\, dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \sin x dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-\cos x)_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} [-1+\cos t]$$

ซึ่งหาค่าลิมิตไม่ได้ ดังนั้น $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$ ลู่ออก

5.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

พิจารณากรณีที่ช่วงของการอินทิเกรตมีขอบเขต แต่ตัวถูกอินทิเกรตไม่มีขอบเขต

เช่น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ถ้า $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$

บริเวณ D ไม่มีขอบเขต

ให้สี่เหลี่ยมผืนผ้า R_n มีจุดยอดเป็น $(\pm n, \pm n)$

$$
\begin{aligned}
D_n &= D \cap R_n \\
A(D) &= \lim_{n\to\infty} A(D_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\int_0^1 dxdy + \int_1^n\int_0^{y^{-2}} dxdy\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \int_1^n y^{-2}dy\right\} = 2
\end{aligned}
$$

นิยาม ถ้า $f(x)$ มีความต่อเนื่องสำหรับ $a < x \leqslant b$ แล้ว

$$\int_a^b f = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

และถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องสำหรับ $a \leqslant x < b$ แล้ว

$$\int_a^b f = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

2. $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$

วิธีทำ 1) จะเห็นว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ มีความไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln|x|\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln 1 - \ln|t|\right]$$

$$= \infty$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ลู่ออก

2) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ มีความไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{t\to 0^-} \int_0^t \frac{dx}{2-x}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left[-\ln(2-x)\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left[\ln 2 - \ln(2-t)\right] = 0 \text{ ซึ่งลู่เข้า}$$

5.4 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงหรือ $-\infty$ และ b เป็นจำนวนจริงหรือ $+\infty$, $a < c < b$ ถ้า $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งหรือสอง จะเรียกผลบวก

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$

จะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า ถ้าทั้งสองอินทิกรัล $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ ลู่เข้า และมี

ค่าเท่ากับผลบวก $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

และจะกล่าวว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่ออก ถ้า $\int_a^c f(x)dx$ หรือ $\int_c^b f(x)dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

วิธีทำ 1) จะเห็นว่า $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม

ดังนั้น $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

พิจารณา $$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-} \left| -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \left| -\frac{1}{t} - 1 \right| = \infty$$

ดังนั้น $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ ลู่ออก และจะได้ว่า $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ ลู่ออก

หมายเหตุ ถ้าพิจารณา $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ ก็จะได้เช่นเดียวกันว่า

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty$$ ซึ่งมีค่าลู่ออก

ดังนั้น $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ ลู่ออก

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to 0^-} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\arctan x)_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-\arctan t) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\arctan x)_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\arctan t)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{ลู่เข้า}$$

หมายเหตุ สำหรับ $\int_{-\infty}^{\infty} f$ อาจจะใช้นิยามได้ 2 แบบคือ

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f + \lim_{t\to\infty} \int_c^t f$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{\infty} f$$

หรือ 2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f$$

เพื่อจะให้เห็นความแตกต่างของอินทิกรัลทั้ง 2 รูป เราจะเรียกอินทิกรัลไม่ตรงในข้อ (1) ว่า **ค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ** (อย่างธรรมดา) และข้อ (2) เรียกว่า **ค่าหลักโคชี** (Cauchy principal value) ใช้ตัวย่อ PV. เมื่อทั้ง 2 รูปหาค่าได้ แต่บางครั้งค่าหลักโคชีอาจจะหาได้ แต่ค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบอาจจะหาไม่ได้ ทั้งนี้ก็เนื่องมาจากการคำนวณแล้วหาค่าลิมิตนั่นเอง จะเห็นว่าข้อ (1) นั้น คำนวณโดยแยกเป็นสองส่วน ซึ่งถ้าเทอมใดเทอมหนึ่งลู่ออก จะได้ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f$ ลู่ออก แต่ค่าหลักโคชีนั้นหาลิมิตครั้งเดียว ดังนั้น ถ้าเกิดการลู่ออกของเทอมหนึ่ง อาจจะลบกันหมดไป

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx$

วิธีทำ พิจารณา $\int_{-\infty}^{0} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[\int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{t}^{0} \frac{x}{1+x^2}dx\right]$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left|\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left|-\arctan(-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right|$$

$$= -\infty \text{ ซึ่งลู่ออก}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx$ ลู่ออกโดยใช้นิยามค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

แต่พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx$$

โดยนิยามที่ 2 จะพิจารณา

$$\int_{-t}^{t} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx = \int_{-t}^{0} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx + \int_{0}^{t} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$= \left|\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right|_{-t}^{0} + \left|\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right|_{0}^{t}$$

$$= -\arctan(-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

$$= 2\arctan t$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx = \pi$ ซึ่งลู่เข้าโดยนิยามค่าหลักโคชี

การหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยนิยามค่าหลักโคชี อาจจะเลือก t และ $-t$ ให้ต่างกัน เช่น

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{2t} \frac{(1+x)}{1+x^2}dx = \pi + \ln 2$$

ข้อสังเกต 1) ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้าจะได้ว่า ค่าหลักโคชี $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ จะเท่ากับ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ นั่นเอง (พิสูจน์แบบฝึกหัด)

2) ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก ค่าหลักโคชี $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ อาจจะหาได้หรือหาไม่ได้

ดังนั้น ถ้าค่าหลักโคชี $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ หาค่าได้ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ แต่ถ้าค่าหลักโคชี $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ หาค่าไม่ได้ จะสรุปได้ทันทีว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 2 ถ้า $f(x) = \sin x$ จงพิจารณา $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ โดยวิธีธรรมดาและค่าหลักโคชี

วิธีทำ 1) วิธีธรรมดา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \sin x dx + \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \sin x dx$$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \sin x dx = \lim_{t \to -\infty} \left[-\cos x\right]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[\cos t - 1\right] \quad \text{ลู่ออก}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ ลู่ออก

2) ค่าหลักโคชี

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} \sin x dx$$

$$\int_{-t}^{t} \sin x dx = \int_{-t}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{t} \sin x dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_{-t}^{0} + \left[-\cos x\right]_{0}^{t}$$

$$= \left[\cos t - 1\right] + \left[-\cos t + 1\right]$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0 \text{ ลู่เข้า}$$

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า บทกลับของข้อสังเกต 1) ไม่จริง

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $f(x) = \cos x$ จงพิจารณา $\int_{-\infty}^{\infty} f$

วิธีทำ วิธีธรรมดาจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \cos x dx + \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \cos x dx$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} \cos x dx = \lim_{t \to \infty} [\sin x]_0^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \sin t \text{ ลู่ออก}$$

และค่าหลักโคชี

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} \cos x dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\sin x]_{-t}^{t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} [2 \sin t] \text{ ลู่ออก}$$

สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)dx$ ซึ่ง $f(x)$ มีความไม่ต่อเนื่องที่ c เมื่อ $a < c < b$ ค่าหลักโคชีก็พิจารณาได้ในทำนองเดียวกันกับ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ สำหรับ $\delta > 0$ ซึ่ง $\delta < \min(c-a, b-c)$ ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a, c-\delta]$ และ $c+\delta, b]$ นิยามค่าหลักโคชี $\int_a^b f(x)dx$ โดย $(PV)\int_a^b f(x)dx$

$$(PV)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \right]$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณา $\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$ ลู่เข้าหรือไม่โดย

1. วิธีธรรมดา
2. ใช้ค่าหลักของโคชี

วิธีทำ

1) โดยนิยาม $\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$

พิจารณา $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{t \to 1^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left| \frac{1}{-2(x-1)^2} \right|_{-1}^{t}$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left| \frac{1}{8} - \frac{1}{2(t-1)^2} \right|$$

ดังนั้น $\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$ ลู่ออก

2) $\lim_{\delta \to 0^+} \left[\int_{-1}^{1-\delta} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\delta}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \right] = \lim_{\delta \to 0^+} \left| \frac{1}{8} - \frac{1}{2\delta^2} + \frac{1}{2\delta^2} - \frac{1}{32} \right|$

$$= \frac{3}{32}$$

ซึ่งโดยใช้ค่าหลักของโคชี อินทิกรัลจะหาค่าได้เท่ากับ $\frac{3}{32}$

แบบฝึกหัด 5.1

จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลต่อไปนี้ และหาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่ลู่เข้า

1. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x-3}$
2. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
3. $\int_{0}^{\pi} \sec x \tan x \, dx$
4. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

5. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$

7. $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

8. $\int_0^{1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$

9. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x\ln x$ และแกน x

10. จงแสดงว่า บริเวณที่ไม่มีขอบเขตใต้กราฟ

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \; , \quad 0 < x \leqslant 1$$

หาพื้นที่ได้ พื้นที่มีค่าเท่าใด

11. จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งและจตุภาคที่สามของกราฟ

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$ และเส้นกำกับ (asymptotes)

12. จงหาข้อผิดพลาดของข้อสรุปนี้

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x} + \lim_{t\to 0} \int_{t}^{1} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{t\to 0} \ln|t| + \lim_{t\to 0} (-\ln|t|) \\
&= \lim_{t\to 0} (\ln|t| - \ln|t|) = 0
\end{aligned}$$

13. จงหาค่าของ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ ดังนี้

13.1 จงแสดงว่า $\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \frac{x}{x+1} + c$

13.2 สรุปว่า $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 2$

14. จากโจทย์ข้อ 13 ถ้า

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

จงให้เหตุผลว่าทำไม

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} \neq \int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{dx}{x+1}$$

5.5 การตรวจสอบการลู่เข้าโดยทฤษฎีบท

จะเห็นว่าการพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ โดยการคำนวณหาค่าของอินทิกรัลโดยตรงนั้น บางฟังก์ชันไม่สามารถอินทิเกรตหาค่าได้อย่างง่าย เช่น $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx$, $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ เป็นต้น ดังนั้น การพิจารณาการลู่เข้าต้องอาศัยทฤษฎีบทต่าง ๆ

นิยาม อินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)dx$ เรียกว่า **ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่เข้า และเรียกว่า **ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข** (conditionally convergent) ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า และ $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

เพราะว่า $|x^3| = x^3$ เมื่อ $x \geqslant 1$

และ $\int_1^\infty \frac{dx}{|x^3|} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ ซึ่งลู่เข้า

2) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

(แสดงในตอนหลัง)

หมายเหตุ ถ้าพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 หรือชนิดที่ 2 ซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องหรือเป็น ∞ ที่ลิมิตล่างของอินทิกรัล เช่น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ในช่วงปิด $[c, b]$ และ a เป็นเลขจริงหรือ $a = -\infty$, $a < c < b$ เราสามารถเปลี่ยนอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)dx$ นี้ให้เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่มีลิมิตบนของอินทิกรัล ซึ่งทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องหรือเป็น ∞ โดย

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx \\ &= \lim_{t\to -a^-} \int_{-b}^{t} f(-u)du \\ &= \int_{-b}^{-a} f(-u)du\end{aligned}$$

ดังนั้น ทฤษฎีต่าง ๆ จะกล่าวถึงฟังก์ชันซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ลิมิตบนของอินทิกรัลเพียงอย่างเดียว ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะคล้ายกับทฤษฎีบทของอนุกรมอนันต์ซึ่งจะนำไปสู่การตรวจสอบการลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 5.1 กำหนดให้ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 หรือชนิดที่ 2 $f(x) \geqslant 0$ ทุกค่า $x \in [a, b)$ และ $\int_a^t f(x)dx$ หาค่าได้ทุกค่า $x \in [a, b)$

จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อมี $M < \infty$ ซึ่งทำให้ $\int_a^t f(x)dx \leqslant M$ ทุกค่า $x \in [a, b)$

พิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์จะแสดงเฉพาะกรณีที่ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 ส่วนชนิดที่ 1 เป็นแบบฝึกหัด

ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 2

ให้ $$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเดียวบน [a, b)

เพราะว่าถ้าให้ $t_1, t_2 \in [a, b)$ และ $t_1 < t_2$ จะได้

$$F(t_2)-F(t_1) = \int_a^{t_2} f(x)dx - \int_a^{t_1} f(x)dx$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

เนื่องจาก $f(x) \geq 0$ ดังนั้น $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$

ดังนั้น $F(t_1) \leq F(t_2)$

นั่นคือ F เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเดียวบน [a, b)

($\Rightarrow$) ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า ดังนั้น $\lim\limits_{t \to b^-} F(y)$ หาค่าได้

ให้ $\lim\limits_{t \to b^-} F(y) = L$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $a \leq b - 6$ และ $|F(t) - L| < 1$ เมื่อ $t \in (b - 6, b)$

$$-1 < F(t)-L < 1$$

$$-1+L < F(t) < 1+L \text{ ทุกค่า } t \in (b-6, b)$$

ให้ $M = 1+L$

ดังนั้น $F(t) < M$ ทุกค่า $t \in (b-6, b)$

พิจารณา $t \in [a, b-6)$

$$a < t < b-\delta < b-\frac{\delta}{3} < \delta$$

เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเดียว ดังนั้น $F(t) \leq F\left(b-\frac{\delta}{3}\right)$

$$\therefore F\left(b-\frac{\delta}{3}\right) < M$$

$$\therefore F(t) < M \text{ ทุกค่า } t \in [a, b-\delta)$$

นั่นคือ สามารถหา M ซึ่งทำให้ $\int_a^t f(x)dx \leq M$ ทุกค่า $x \in [a, b)$

($\Leftarrow$) กำหนดให้มี $M < \infty$ ซึ่ง $F(t) \leqslant M$ ทุกค่า $t \in [a, b)$

ให้ $D = \{F(t) | t \in [a, b)\}$

ดังนั้น M เป็นค่าขอบเขตบนของ D

ถ้า L เป็นค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของ D

ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $L - \varepsilon$ ไม่เป็นค่าขอบเขตบนของ D

ดังนั้นจะมี $t_0 \in [a, b)$ ซึ่ง $L - \varepsilon < F(\gamma_0)$

เลือก $\delta = b - t_0, \quad \therefore \quad \delta > 0$

สำหรับทุกค่า t ซึ่ง $0 < |t-b| < \delta$

จะได้ $\quad -\delta < t - b < \delta$

$$t_0 - b < t - b < b - \gamma_0$$

$$t_0 < t < 2b - t_0$$

ดังนั้น $\quad F(t_0) < F(t)$

$$\therefore \quad L - \varepsilon < F(t_0) < F(t) < L$$

$$0 < L - F(t) < \varepsilon$$

หรือ $\quad |F(t) - L| < \varepsilon$

ดังนั้น $\quad \lim_{t \to b^-} F(t) = L$

นั่นคือ $\quad \int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 5.2 การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b)$ และ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ทุกค่า $x \in [a, b)$

ถ้า $\int_a^b g(x)dx$ ลู่เข้าแล้วจะได้ $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้าด้วย

และ $$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

พิสูจน์ ให้ $$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

และ $G(t) = \int_a^t g(x)dx$

เนื่องจาก $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ทุกค่า $x \in [a, b)$

ดังนั้น $F(t) \leqslant G(t)$ ทุกค่า $t \in [a, b)$

เนื่องจาก $g(x) \geqslant 0$ และ $\int_a^b g(x)dx$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบทที่ **5.1** จะมี $M < \infty$ ซึ่ง $\int_a^t g(x)dx \leqslant M$ ทุก $t \in [a, b)$

เพราะฉะนั้น $F(t) = \int_a^t f(x)dx \leqslant \int_a^t g(x)dx = F(t)$ ทุก $t \in [a, b)$

ดังนั้น $\int_a^t f(x)dx \leqslant M$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.1 จะได้ $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

และ $\lim\limits_{t \to b^-} F(t) \leqslant \lim\limits_{t \to b^-} G(t)$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ เมื่อ $x \geqslant 1$

และ
$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x}dx$$
$$= \lim_{t \to \infty} -e^{-x}\Big|_1^t$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left(-e^{-t} + \frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{1}{e} \text{ ซึ่งลู่เข้า}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 5.2 จะได้ว่า

$\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ ลู่เข้า

ถ้าเปลี่ยนเงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 5.2 ใหม่ จะสรุปการลู่ออกได้โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.3 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b)$ และ $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ ถ้า $\int_a^b g(x)dx$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^b f(x)dx$ จะลู่ออกด้วย

พิสูจน์ ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 5.2 จะได้ว่า $\int_a^b g(x)dx$ ลู่เข้าด้วย ซึ่งเกิดความขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบทที่ 5.4 กำหนดให้ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1 หรือ 2

และ $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้าด้วย

และ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

พิสูจน์ 1) เพราะว่า $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$

ดังนั้น $0 < |f(x)| + f(x) \leqslant 2|f(x)|$

จาก $\int_a^b |f(x)|dx$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท จะได้

$\int_a^b [|f(x)| + f(x)]dx$ ลู่เข้า

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f(x) + |f(x)|]dx - \int_a^b |f(x)|dx$$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

2) ให้ $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ และ $G(\gamma) = \int_a^t |f(x)|dx$

เนื่องจาก $|F(t)| = \left|\int_a^t f(x)dx\right| \leqslant \int_a^t |f(x)dx = G(t)$ ทุก $t \in [a, b)$

ดังนั้น $\lim_{t \to b} |F(t)| \leqslant \lim_{t \to b} G(t)$

เนื่องจาก $\lim_{t \to b} F(t)$ หาค่าได้ ดังนั้น $\lim_{t \to b} |F(t)|$ หาค่าได้

และ $\lim_{t \to b} |F(t)| = \left|\lim_{t \to b} F(t)\right|$

เพราะฉะนั้น $\left|\lim_{t \to b} F(t)\right| \leqslant \lim_{t \to b} F(t)$

นั่นคือ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{dx} dx$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$

และ
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \left| 2\sqrt{x} \right|_t^1$$
$$= 2$$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ ลู่เข้า

2) เนื่องจาก $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} > \frac{1}{x}$ เมื่อ $0 < x \leqslant 1$

และ
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \ln x \Big|_t^1$$

$$= \infty \text{ ลู่ออก}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$ ลู่ออก

หมายเหตุ จากตัวอย่าง (1) การลู่เข้าเป็นการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ด้วย

สำหรับการทดสอบการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยการเปรียบเทียบ จะใช้ฟังก์ชัน $g(x)$ เป็นตัวเปรียบเทียบว่ามีค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้าหรือลู่ออก ดังนั้น ถ้าทราบอินทิกรัลต่าง ๆ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ก็จะช่วยให้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบทที่ 5.5

1) อินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ และ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, $a < b$ ลู่เข้าเมื่อ $p < 1$ และลู่ออกเมื่อ $p \geqslant 1$

2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ ลู่เข้าเมื่อ $p > 1$ และ $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ลู่เข้าเมื่อ $p < 1$

พิสูจน์ ใช้นิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยตรง (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง จงพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกของ

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}$

3) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$

4) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{3/2}}\, dx$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ เมื่อ $0 < x \leqslant 1$

และ $\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ เมื่อ $x \geqslant 1$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ และ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \text{ ลู่เข้า}$$

2) เนื่องจาก $\frac{1}{x^2+5x} \geqslant \frac{1}{6x}$ เมื่อ $0 < x \leqslant 1$

และ $\int_0^1 \frac{d}{dx}$ ลู่ออก

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}$ ลู่ออก

3) จาก

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}}$$

และ $x^2 \leqslant \sqrt{1+x+x^2}$ เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant 1$

ดังนั้น $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

และ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท ข้อ 1

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$ ลู่เข้า

4) เนื่องจาก $\left|\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}$ บนช่วง $[1, \infty)$

และ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx$ ลู่เข้า

จะเห็นว่า การใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบนี้ ความยุ่งยากอยู่ที่การหาฟังก์ชัน $g(x)$ **ที่จะนำมาเปรียบเทียบ ดังนั้น** ปัญหาบางอย่างอาจจะเลี่ยงมาใช้ **วิธีการเปรียบเทียบโดยลิมิต** (limit comparision test) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.6 ถ้า $f(x) \geqslant 0$ และ $g(x) \geqslant 0$ เมื่อ $a \leqslant x < b$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้เท่ากับ L เมื่อ $0 < L < \infty$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b g(x)dx$ ลู่เข้า

ถ้า $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ และ $\int_a^b g(x)dx$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่เข้า

ถ้า $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ และ $\int_a^b g(x)dx$ ลู่ออก จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx$ ลู่ออก

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ เมื่อ $L > 0$

ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{L}{2}$ $\left(\text{เลือก } \varepsilon = \frac{L}{2}\right)$

ทุกค่า x ซึ่ง $b-\delta < x < b$ เมื่อ $a \leqslant b-\delta$

เพราะฉะนั้น $\qquad \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$

ดังนั้น $\qquad f(x) < \frac{3L}{2}\, g(x)$

และ $\qquad g(x) < \frac{2}{L}\, f(x)$

โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบ จะได้

$$\int_a^b f(x)dx \text{ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ } \int_a^b g(x)dx \text{ ลู่เข้า}$$

ทฤษฎีบทนี้ใช้ได้สำหรับ $a \leqslant x < b$ เมื่อ $b = \infty$ ด้วย (พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{1+x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+x^2}$ และ $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

พิจารณา

$$\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\arctan t - \arctan 1]$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ ลู่เข้า}$$

และ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบโดยลิมิต จะได้ว่า $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{1+x^2}\,dx$ ลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

วิธีทำ

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}dx + \int_\pi^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

จะเห็นว่า $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ เป็นอินทิกรัลตรงแบบ

เนื่องจาก $\frac{1-\cos x}{x^2}$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ เมื่อ $x \to 0$

ดังนั้น ใช้ L' Hospital's rule จะได้

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ ลู่เข้า

ให้ $$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

ดังนั้น $\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ ลู่เข้า

และ $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\, \frac{(1-\cos x)}{x^2} = 0$$

ดังนั้น $\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ ลู่เข้าโดยทฤษฎีการเปรียบเทียบโดยลิมิต

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ ลู่เข้าเมื่อ $x > 0$

วิธีทำ อินทิกรัล $\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ คือ ฟังก์ชันแกมมานั่นเอง

$$\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du = \int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du + \int_1^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du$$

พิจารณา $\int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du$ จะเห็นว่า

เมื่อ $x \geqslant 1$ อินทิกรัล $\int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du$ เป็นอินทิกรัลธรรมดา

แต่ถ้า $x < 1$ อินทิกรัล $\int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du$ เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

เนื่องจาก $0 \leqslant u^{x-1}e^{-u} \leqslant u^{x-1}$ ทุกค่า $u \in (0, 1)$

และ $\int_0^{1} u^{x-1}du$ ลู่เข้าเมื่อ $0 < x < 1$ โดยทฤษฎีบทที่ 5.2

จะได้ $\int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du$ ลู่เข้าเมื่อ $0 < x < 1$

และเนื่องจาก $\int_0^{1} u^{x-1}e^{-u}du$ เป็นอินทิกรัลธรรมดาเมื่อ $x \geqslant 1$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du$ หาค่าได้เมื่อ $x > 0$

พิจารณา $\int_1^\infty u^{x-1}e^{-u}du$

ให้ $f(u) = u^{x-1}e^{-u} \geqslant 0$

$g(u) = u^{-2} > 0$ ทุกค่า $u > 1$

และ $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{f(u)}{g(u)} = \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{u^{x-1}e^{-u}}{u^{-2}} = 0$

เนื่องจาก $\int_1^\infty u^{-2}du$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\int_1^\infty u^{x-1}e^{-u}du$ ลู่เข้าโดยทฤษฎีการเปรียบเทียบโดยลิมิต

นั่นคือ $\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$ ลู่เข้าเมื่อ $x > 0$

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\int_0^3 \dfrac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ และ $g(x) = \dfrac{1}{3-x}$

เนื่องจาก $\int_0^3 \dfrac{dx}{3-x}$ ลู่ออก

และ $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 3^-} (3-x)\cdot \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบโดยลิมิตจะได้ว่า $\int_0^3 \dfrac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ ลู่ออก

จากนิยามการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ จะเห็นว่าตัวอย่างต่าง ๆ ที่มีคุณสมบัติลู่เข้า จะเป็นการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทั้งสิ้น

สำหรับตัวอย่างของการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขจะพิจารณาจาก $\int_1^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ หรืออย่างมีเงื่อนไข

วิธีทำ จะเห็นว่า $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \in [1, \infty)$

แต่ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ ลู่ออก ดังนั้น จึงไม่สามารถสรุปการลู่เข้าโดยทฤษฎีการเปรียบเทียบได้

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^t + \int_1^t \cos x\,d\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos t}{t} + \cos 1 - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t} + \cos 1 - \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx
\end{aligned}$$

แต่ $$\lim_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t} = 0$$

ดังนั้น $$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

และ $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เนื่องจาก $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ บน $[1, \infty)$

ดังนั้น $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้า

พิจารณา $$\int_1^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_1^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx + \sum_{n=1}^{m-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

บนช่วง $[n\pi, (n+1)\pi]$ ค่าต่ำสุดของ $\frac{1}{x}$ คือ $\frac{1}{(n+1)\pi}$

นั่นคือ $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n+2}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx$$

$$\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi} \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{x}$$

และ $$\sum_{n=1}^{n-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n+1}^{n+2}\frac{dx}{x}$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{2}^{m+1}\frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

ดังนั้น $$\int_{1}^{m}\frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \int_{1}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{m+1}{x}\right)$$

โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบ

$$\int_{1}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_{1}^{m}\frac{|\sin x|}{x}dx \text{ ลู่ออก}$$

ดังนั้น $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ อาจจะใช้ทฤษฎีต่อไปนี้ตรวจสอบได้สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป

ทฤษฎีบท 5.7 (Dirichlet Test)

ให้ f, g และ g′ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต $a \leqslant x < \infty$ ถ้า

1) $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

2) $\int_{a}^{\infty} g'(x)dx$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

3) $F(t) = \int_{a}^{t} f(\tau)d\tau$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

เมื่อ $a \leqslant t < \infty$

จะได้ว่า $\int_{a}^{\infty} f(x)\,g(x)dx$ จะลู่เข้า

พิสูจน์ จากสิ่งที่กำหนดให้ $|F(t)| \leqslant M$ สำหรับทุกค่า $t, t \geqslant a$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_{a}^{t} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{t} g(x)dF(x)$$

$$= F(x)g(x)\Big|_a^t - \int_a^t F(x)dg(x)$$

$$= F(t)\,g(t) - F(a)g(a) - \int_a^t F(x)g'(x)dx$$

เนื่องจาก $|F(t)\,g(t)| \leqslant M|g(t)|$ และ $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)\,g(t) = 0$

และ $|F(x)g'(x)| \leqslant M|g'(x)|$ สำหรับ $x \in [a, \infty)$

จากสิ่งที่กำหนดให้ $\int_a^\infty |g'(x)|dx$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีการเปรียบเทียบ $\int_a^\infty F(x)g'(x)dx$ ลู่เข้า

นั่นคือ $\int_a^\infty f(x)g(x) = \lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)g(x)dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 5.8 (Abel's Test)

ถ้า f, g และ g′ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต $a \leqslant x < \infty$ ถ้า $F(t) = \int_a^t f\,\tau\, d\tau$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเมื่อ $a \leqslant t < \infty$ และ g(x) เป็นฟังก์ชันลดลงอย่างเดียวเข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $x \to \infty$ นอกจากนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ จะได้ว่า $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ ลู่เข้า

พิสูจน์ เมื่อ g(x) เป็นฟังก์ชันลดลงอย่างเดียวเมื่อ $x \to \infty$ จะทำให้ g′(x) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าลบเสมอ

พิจารณา $\int_a^t |g'(x)|dx = -\int_a^t g'(x)dx$

$$= -g(x)\Big|_a^t$$

$$= g(a) - g(t)$$

และ $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t |g'(x)|dx = g(a)$ ซึ่งหาค่าได้

นั่นคือ $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ ลู่เข้า

บทแทรก ให้ g มีคุณสมบัติเหมือนทฤษฎีบทที่ 5.7 จะได้ว่า

1) $\int_a^{\infty} g(x)\sin xdx$ และ $\int_a^{\infty} g(x)\cos xdx$ ลู่เข้า

2) แต่ละ $\int_a^{\infty} g(x)\sin xdx$ หรือ $\int_a^{\infty} g(x)\cos xdx$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (อย่างมีเงื่อนไข)

ก็ต่อเมื่อ $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ลู่เข้า (ลู่ออก)

พิสูจน์ ข้อ 1) ได้ทันทีจากทฤษฎีบทที่ 5.8

เนื่องจาก $g(x) > 0$ ทุก $x \in [a, \infty)$ ดังนั้น จะแสดง 2) ก็คือ

จะแสดงว่า $\int_a^{\infty} |g(x)|dx = \int_a^{\infty} g(x)dx$ ลู่ออกก็ต่อเมื่อ $\int_a^{\infty} g(x)|\sin x|dx$ และ $\int_a^{\infty} g(x)\,|\cos x|dx$ ลู่ออก

ให้ m, n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$$n\pi > m\pi \geqslant a$$

$$\int_a^{n\pi} g(x)|\sin x|dx \geqslant \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} g(x)|\sin x|dx + \ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} g(x)|\sin x|dx$$

$$\geqslant g((m+1)\pi)\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} |\sin x|dx + \ldots + g(n\pi)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|dx$$

(เนื่องจาก g มีค่าลดลงบน $[a, \infty)$)

แต่ $g((m+1)\pi)\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} |\sin x|dx + \ldots + g(n\pi)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|dx$

$$= g((m+1)\pi)\left|\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \sin xdx\right| + \ldots + g(n\pi)\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin xdx\right|$$

$$= 2[g((m+1)\pi) + \ldots + g(n\pi)]$$