บทที่ 4
อนุกรมของฟังก์ชัน

ในวิชาแคลคูลัสชั้นสูง 1 ได้ศึกษาถึงลำดับและอนุกรมของเลขจำนวนจริงมาแล้ว ในบทนี้จะศึกษาถึงลำดับและอนุกรมของฟังก์ชัน ซึ่งจะมีลักษณะการลู่เข้าที่ต่างกัน สำหรับลำดับของฟังก์ชันจะมีการลู่เข้า 2 ชนิด คือ การลู่เข้าแบบจุด (pointwise convergence) และการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (uniform convergence) ปัญหาที่น่าสนใจคือ ถ้าแต่ละฟังก์ชัน $f_n(x)$ ของลำดับของฟังก์ชันมีคุณสมบัติบางอย่าง เช่น มีความต่อเนื่อง หาอนุพันธ์ได้ หรืออินทิเกรตได้ แล้วลิมิตของฟังก์ชัน $f_n(x)$ คือ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ จะมีคุณสมบัติเหล่านี้ได้หรือไม่ ซึ่งจะเห็นว่า โดยทั่วไปแล้วจะไม่เกิดขึ้น ดังนั้น การลู่เข้าแบบจุดจึงไม่ดีพอที่จะศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เราจึงศึกษาวิธีการที่ดีกว่าของการลู่เข้าเพื่อให้ได้คุณสมบัติเหล่านี้ ซึ่งก็คือการศึกษาถึงการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายนั่นเอง นอกจากนั้น ยังศึกษาถึงอนุกรมของฟังก์ชันและการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายเช่นเดียวกัน อนุกรมของฟังก์ชันรูปหนึ่งที่ใช้มากคืออนุกรมกำลัง ซึ่งจะได้อนุกรมที่มีประโยชน์ซึ่งใช้ในทางประยุกต์มาก คืออนุกรมเทเลอร์และอนุกรมแมคลอริน

4.1 ลำดับของฟังก์ชัน (Sequence of functions)

ดังได้ทราบแล้วว่าลำดับอนันต์ (infinite sequence) ของเลขจำนวนจริง เขียนแทนด้วย $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ หรือ $\{a_n\}$ และกล่าวว่า ลำดับอนันต์ $\{a_n\}$ ลู่เข้า (convergent) ถ้ามี a ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; a \quad \text{หรือ} \quad a_n \to a$$

ซึ่งหมายถึงกำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ จะสามารถหาจำนวนจริง N (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่งทำให้ $|a_n - a| < \varepsilon$ ทุกค่า $n > N$

สำหรับลำดับของฟังก์ชัน จะพิจารณา f_n เป็นฟังก์ชันนิยามบนเซต A

นิยาม สำหรับแต่ละ x ในเซต A ให้ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ เป็น**ลำดับของฟังก์ชัน** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{f_n(x)\}$ หรือ $\{f_n\}$

จะเห็นว่า ถ้า $A \subseteq R$ แต่ละ $x \in A$ ทำให้ $\{f_n(x)\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริง ซึ่งอาจจะมีลิมิตหรือไม่มีก็ได้ ถ้า $\{f_n(x)\}$ มีลิมิตสำหรับบางค่าของ x และมีค่าเท่ากับ f(x) จะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ฟังก์ชัน f นี้ เรียกว่า **ฟังก์ชันลิมิต** ของลำดับ $\{f_n(x)\}$ และกล่าวว่า $\{f_n(x)\}$ **ลู่เข้าแบบจุด** (pointwise convergence) สู่ f(x) บน A ซึ่งหมายถึง สำหรับแต่ละ x ใน A และทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี N (ขึ้นอยู่กับ x, ε) ซึ่งทำให้

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{ทุกค่า } n > N$$

หรือใช้สัญลักษณ์ $f_n(x) \to f(x)$ บน A

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $f_n(x) = \frac{x}{n}$ และ $A = (-\infty, \infty)$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in A$

พิสูจน์ ให้ $x \in A$ และ $\varepsilon > 0$

ให้ $N = N(x, \varepsilon) = \frac{|x|}{\varepsilon}$

สำหรับทุกค่า N ซึ่ง $n > N$

พิจารณา
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| < \frac{|x|}{\frac{|x|}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

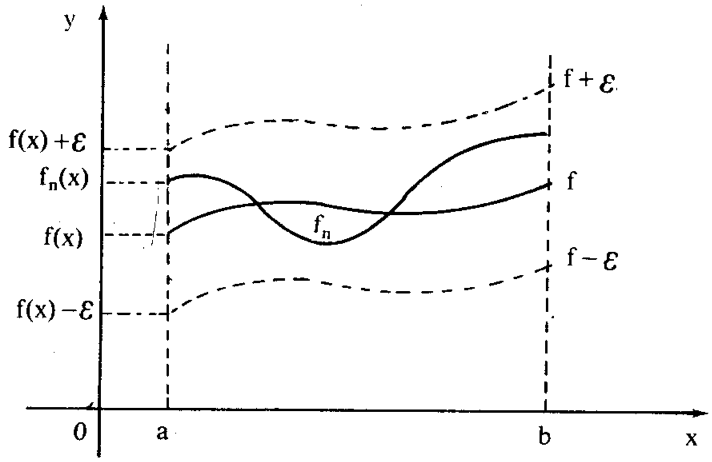
จากตัวอย่างจะเห็นว่าในการเลือก N ขึ้นอยู่กับค่า x และ ε เพราะว่าในการพิจารณา $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n}$ นั้น ถ้าถามว่า n มีค่ามากแค่ไหน จึงจะทำให้ $\frac{|x|}{n} < 0.0001 = \varepsilon$ ผู้ตอบก็จะต้องพิจารณาว่า x จะมีค่าเป็นเท่าใด ถ้า $x = 0.0001$ เราก็จะได้ $n > 1$ ถ้า $x = 100$ เราก็จะต้องเลือก $n > 1{,}000{,}000$ ถ้าสามารถหา N ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ x แต่ขึ้นอยู่กับ ε อย่างเดียว

ก็จะทำให้หา N ได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะเป็นการลู่เข้าแบบพิเศษ เรียกว่า การลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม ลำดับของฟังก์ชัน $\{f_n(x)\}$ ซึ่งนิยามได้บนเซต A กล่าวว่า **ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย** สู่ $f(x)$ บนเซต A ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ หมายถึง สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $N = N(\varepsilon)$ (ขึ้นอยู่กับ ε อย่างเดียวไม่ขึ้นอยู่กับ x) ซึ่งทำให้ ถ้า $n > N$ แล้วจะได้ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ x ใน A

นั่นคือ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ หมายถึง $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

การลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย แสดงโดยกราฟจะได้ดังรูป 4.1 กราฟของ $f_n(x)$ ทุกค่าของ n ซึ่ง $n > N$ จะอยู่ใต้กราฟของ $f(x) + \varepsilon$ และอยู่เหนือกราฟ $f(x) - \varepsilon$ ตลอดทุกค่าของ $x \in A$



รูปที่ 4.1

ถ้าจะเปรียบเทียบการลู่เข้าทั้ง 2 แบบ จะเห็นว่าข้อแตกต่างกันของการลู่เข้าแบบจุดและการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มองเห็นชัดที่สุด ก็คือการลู่เข้าแบบจุดนั้นนิยามที่จุด ในขณะที่การลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายนิยามบนเซต นอกจากนั้นก็เป็นเรื่องการเรียงลำดับก่อนหลังไม่เหมือนกัน

การลู่เข้าแบบจุด	**การลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย**
1) กำหนดจุด x	1) กำหนด $\varepsilon > 0$
2) ให้ $\varepsilon > 0$	2) หา N (ขึ้นอยู่กับ ε)
3) หา N (ขึ้นอยู่กับ x, ε)	3) กำหนดจุด x

พิจารณา $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n} > \frac{n}{n} = 1 = \varepsilon$

ดังนั้น $f_n(x)$ ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บน $(-\infty, \infty)$

จากนิยามของการลู่เข้าทั้ง 2 แบบ จะสรุปได้ทันทีว่า ถ้า $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ f(x) บน A แล้ว $\{f_n(x)\}$ จะลู่เข้าแบบจุดสู่ f(x) บน A ด้วย แต่บทกลับไม่จริง

ตัวอย่าง กำหนด $f_n(x) = x^n + 1, \quad A = [0, 1]$

จะเห็นว่า $f_n(x) \to f(x)$ แบบจุด เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \neq 1 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$$

แต่ $\{f_n(x)\}$ ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ f(x) ใน A

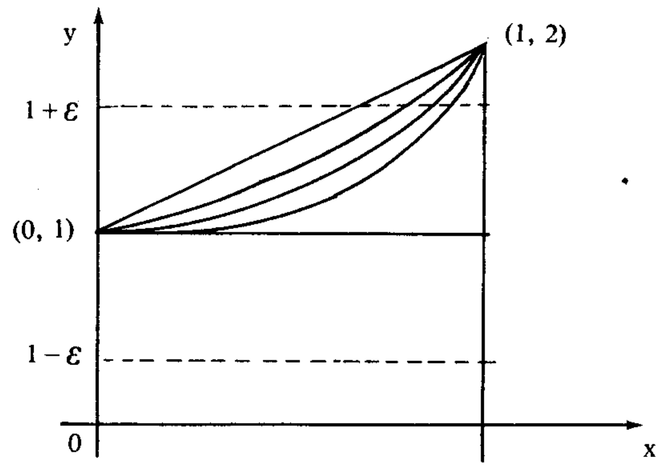
เนื่องจาก เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$

ให้ N เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เลือก n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $n > N$

เลือก $x = 1$

พิจารณา $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 2| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$



รูปที่ 4.2

เนื่องจากค่าสูงสุดของ $f_n(x)$ คือ $f_n(1) = 2$ ทุกค่า n ดังนั้น ถ้า $0 < \varepsilon < 2$ เราไม่สามารถหา N ซึ่งกราฟของ f_n อยู่ระหว่าง $y = \varepsilon$ และ $y = -\varepsilon$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f_n(x) = \frac{x}{n}$ และ $A = (-1000, 1000)$

จงแสดงว่า $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บนเซต A

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $N(\varepsilon) = \frac{1000}{\varepsilon}$

สำหรับ n ซึ่ง $n > N$ และ $x \in A$

นั่นคือ $|x| \leqslant 1000$

พิจารณา $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} < \frac{1000}{\frac{1000}{\varepsilon}} = \varepsilon$

ดังนั้น $\frac{x}{n} \rightrightarrows 0$ บน A

จากตัวอย่าง 2 จะเห็นว่า การเลือก N ไม่ได้ขึ้นอยู่กับ x เลย ถ้าพิจารณาตัวอย่าง จะแน่ใจได้อย่างไรว่า ตัวอย่าง 1 ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย การที่จะพิสูจน์ว่าลำดับของฟังก์ชันใดไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย จะอาศัยนิเสธของการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ดังนี้

ลำดับของฟังก์ชัน $\{f_n(x)\}$ นิยามบนเซต A กล่าวว่า **ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่** $f(x)$ **บน** A ก็ต่อเมื่อสามารถหา $\varepsilon > 0$ ได้ ซึ่งมีคุณสมบัติสำหรับทุก ๆ N จะมีเลขจำนวนเต็มบวก $n > N$ และมีค่า $x \in A$ ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$

หรือ $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n(n > N \wedge \exists x \in A \ni |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon)$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บน $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ เลือก $\varepsilon = 1 > 0$

ให้ N เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ

เลือก n เลขจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n > N$

เลือก $x > n$

พิจารณา $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n} > \frac{n}{n} = 1 = \varepsilon$

ดังนั้น $f_n(x)$ ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บน $(-\infty, \infty)$

จากนิยามของการลู่เข้าทั้ง 2 แบบ จะได้ข้อสังเกตดังนี้

ข้อสังเกต ถ้า $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f(x)$ บน A แล้ว $\{f_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ $f(x)$ บน A ด้วย

ทฤษฎีบทที่ 4.1 (Cauchy property)

ถ้า $\{f_n(x)\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งนิยามได้บนเซต A แล้วจะมีฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่ง $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี N ซึ่งถ้า $m > N$ และ $n > N$ แล้วจะได้ $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า x ใน A

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ กำหนดให้ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A

ให้ ε เป็นจำนวนซึ่งมากกว่า 0

ดังนั้น $\exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \forall x \in A\left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

ถ้า $m > N \rightarrow \forall x \in A\left(|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

พิจารณา $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\therefore \forall m, n(m, n > N \rightarrow \forall x \in A\ (|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon))$

$(\Leftarrow)$ กำหนดให้ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall m, n(m, n > N \rightarrow \forall x \in A(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon))$

$\therefore \{f_n(x)\}$ เป็นลำดับโคชี

ดังนั้น $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้า

ให้ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A$

จะแสดงว่า $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A

ดังนั้น ให้ $\varepsilon > 0$

$$\exists N \ni \forall n, n > N \rightarrow \forall x \in A\ \forall k = 1, 2, \ldots \left(|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\therefore n > N \rightarrow \forall x \in A\ (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$$\therefore f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ บน A}$$

จะเห็นว่า จากนิยามของการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ไม่สามารถตรวจสอบได้ว่าลำดับของฟังก์ชันใดจะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายหรือไม่ ดังนั้น จึงต้องอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้ในการตรวจสอบ

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน E ค่าประจำ (norm) ของ f บน E แทนด้วยสัญลักษณ์ $\|f\|_E$ หมายถึง

$$\|f\|_E \quad = \quad \sup\{|f(x)| x \in E\} \; = \; \sup_{x\in E} |f(x)|$$

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้า f_n, f เป็นฟังก์ชันบน E และ $f_n - f$ มีขอบเขตบน E แล้ว $\{f_n\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ f บน E ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ f

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยนิยามของ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน E จะได้

$\exists N \ni \forall n$ ถ้า $n > N$ จะได้ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุก ๆ $x \in E$

$$\therefore \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

หรือ $$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ดังนั้น $$\big|\|f_n(x) - f(x)\| - 0\big| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยนิยาม $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$

$\exists N \ni \forall n$ ถ้า $n > N$ จะได้

$$\big|\|f_n(x) - f(x)\| - 0\big| < \varepsilon$$

นั่นคือ $$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

แต่ $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n(x) - f(x)\|$ ทุก ๆ ค่า $x \in E$

นั่นคือ $\forall x \in E \; (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ บน } E$$ #

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f_n(x) = \frac{n+x}{n}$, $x \in [0, 1]$

จงแสดงว่า $f_n(x) \to 1$ สำหรับแต่ละค่าของ $x \in [0, 1]$ แล้วตรวจสอบว่ามีการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f_n(0) = 1$ ทุกค่า n

และ $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{x}{n}}{1}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad f_n(x) \to 1 \quad \text{ทุกค่า } x \in [0, 1]$$

พิจารณา $$\|f_n(x) - f(x)\|_{x\in[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 1|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{n+x}{n} - 1 \right|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x}{n} \right|$$

$$= \frac{1}{n}$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.2 จะได้ว่า $f_n(x) \rightrightarrows 1$ บน $[0, 1]$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

จงแสดงว่า $f_n(x) \to 0$ ทุกค่า $x \in [0, 1]$ และตรวจสอบการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีทำ $$f_n(0) = 0 \quad \text{ทุกค่า } n$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$$

$$\therefore \quad f_n(x) \to 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \in [0, 1]$$

พิจารณา $$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} \right|$$

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

ดังนั้น $f_n(x)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = x_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(x_n) = \frac{2n(1/n)}{1+n^2/n^2} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)-f(x)\| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.2 $f_n(x)$ ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0

ตัวอย่างที่ 3 $f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$

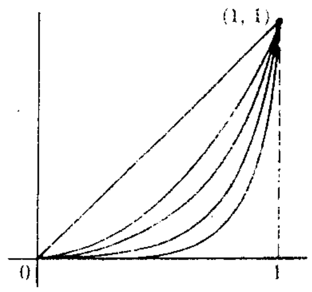
จะเห็นว่า $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ในที่นี้ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ แต่ $f(x)$ มีความไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

เนื่องจาก $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

แต่ $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้



รูปที่ 4.3

พิจารณาการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

$$\|f_n(x)-f(x)\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)|$$

$$= \sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 1 \neq 0$$

$$\therefore f_n(x) \not\rightrightarrows f(x) \text{ บน } [0, 1]$$

จากตัวอย่างแสดงว่า $f_n(x)$ มีความต่อเนื่อง แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(x)$ ไม่จำเป็นต้องมีความต่อเนื่องด้วย แต่ถ้า $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ แล้ว จึงจะสรุปได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ถ้า $f_n(x)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบนเซต A, $n = 1, 2, \ldots$ และถ้า $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A จะได้ว่า $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน A ด้วย

พิสูจน์ ให้ a เป็นจุดใด ๆ ใน A ถ้า a เป็นจุดเอกเทศ (isolated point) ของ A แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ a ทันที ดังนั้น สมมติ a เป็นจุดเกาะกลุ่มของ A

โดยนิยามของ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A สำหรับทุกค่า $\varepsilon > 0$

$$\exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \forall x \in A\left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

เนื่องจาก $f_N(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ดังนั้น

$$\exists \delta > 0 \ni \forall x \left(x \in B(a, \delta) \cap A \rightarrow |f_N(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

ให้ $x \in B(a, \delta) \cap A$

จาก
$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

โดยนิยามของความต่อเนื่อง จะได้ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน A

ดังนั้น
$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

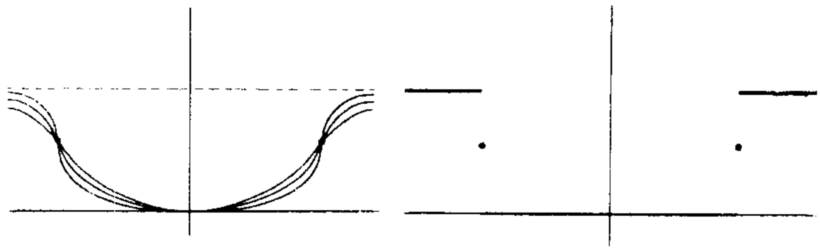
บทกลับของทฤษฎีนี้ไม่จริงดังตัวอย่างที่ 3 ในการนำทฤษฎีนี้ไปใช้ ถ้าแสดงว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องบน A ลำดับ $\{f_m(x)\}$ ก็จะไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ ถ้า $x \in R$, $n = 1, 2, \ldots$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ หาค่าได้ และเท่ากับ $f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{เมื่อ } |x| = 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } |x| > 1 \end{cases}$$

รูปกราฟดังรูปที่ 4.4



$f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\qquad$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

รูปที่ 4.4

แต่ละ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่องทุกค่า x ใน R

แต่ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ บน R

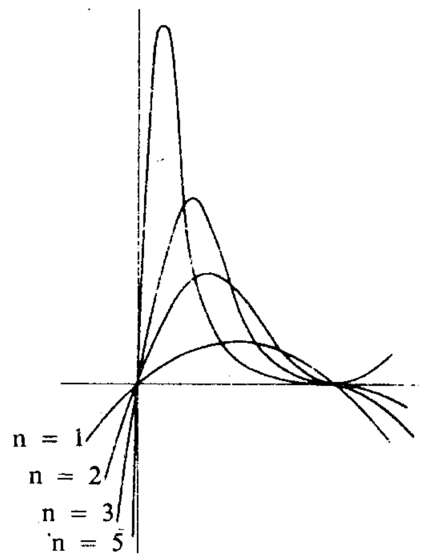
ตัวอย่าง กำหนดให้ $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $x \in R$, $n = 1, 2, \ldots$

ถ้า $0 \leqslant x \leqslant 1$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2x(1-x)^n$$

$$= 0 = f(x)$$

จะเห็นกราฟดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5

พิจารณา $\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0|$

$$= \sup_{x \in [0,1]} |n^2 x(1-x)^n|$$

และ $f_n'(x) = n^2(1-x)^n - n^3 x(1-x)^{n-1}$

ดังนั้น $f_n(x)$ มีค่ามากที่สุด เมื่อ $x = \dfrac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{n\to\infty} \left| f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \infty$$

ดังนั้น การลู่เข้าไม่เป็นอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

แต่จาก $f(x) = 0$ และ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

พิจารณา $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx$

เปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $t = 1-x,\ dt = -dx$ แทนค่าจะได้

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt$$

$$= n^2 \int_0^1 t^n dt - n^2 \int_0^1 t^{n+1} dt$$

$$= n^2\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1\right) - n^2\left(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Bigg|_0^1\right)$$

$$= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $$0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1$$

นั่นคือลิมิตของอินทิกรัลของฟังก์ชัน ไม่เท่ากับอินทิกรัลของลิมิตของฟังก์ชัน ดังนั้น การสลับลิมิตและอินทิกรัลไม่สามารถทำได้ทุกครั้ง แต่ถ้า $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน $[a, b]$ จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า การสลับลิมิตและอินทิกรัลนั้นสามารถหาค่าได้ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.4 การลำดับของฟังก์ชัน $\{f_n(x)\}$ เมื่อ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่อง ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f(x)$ บน $[a, b]$ ถ้าให้

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t)dx \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

แล้ว $\{g_n(x)\}$ จะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ ทุกค่า $x \in [a, b]$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 4.3 จะได้ว่า $f(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

ดังนั้น นิยาม $g(x)$ ได้

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ โดยการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

$$\exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \forall t \in [a, b] \left(|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g(x)| &= \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \\
&\leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,|dt| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^x |dt| = \frac{\varepsilon}{b-a}|x-a| \\
&\leqslant \left[\frac{\varepsilon}{b-a}\right](b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$g_n(x) \rightrightarrows g(x) \text{ บน } [a, b]$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีนี้ทำให้สรุปได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in [a, b]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

หรือ $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

การนำทฤษฎีบทนี้ไปช่วยในการตรวจสอบการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายนั้น ใช้ได้ในกรณีที่ $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a, b]$ และ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่อง

ดังนั้นจะได้ $$\int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)dx$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $g_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$

วิธีทำ $$g_n'(x) = \frac{1}{1+nx} = f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

พิจารณาการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของ $f_n(x)$ บน $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+nx} - 0\right|$$

$f_n(x)$ มีค่ามากที่สุดที่ $x_n = -\frac{1}{n}$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

แสดงว่า $f_n(x) \rightrightarrows 0$ บน $[0, 1]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทจะได้ว่า

$$\int_0^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_0^x f(t)dt$$

นั่นคือ $g_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$

ตัวอย่าง ให้ $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

1. จงพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$ หรือไม่

2. จงอธิบายผลจากข้อ 1

วิธีทำ 1)

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-nx^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-n})$$

ดังนั้น
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = 0$$

ดังนั้น
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

2) ถึงแม้ว่า $f_n(x) \to 0$ แต่เนื่องจากข้อ 1)

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 4.4 สรุปได้ว่า

$$f_n(x) \not\rightrightarrows 0$$

ต่อไปจะพิจารณาการหาอนุพันธ์และการหาลิมิตของลำดับของฟังก์ชัน ดังได้ทราบจากทฤษฎีบทที่ 4.3 และทฤษฎีบทที่แล้ว ทำให้เราเกิดความคิดว่า สำหรับเรื่องการหาอนุพันธ์ก็ควรจะให้ผลคล้ายกัน คือ ถ้า $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน $[a, b]$ และถ้า $f_n'(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก n แล้ว $f'(x)$ จะหาค่าได้ และ $f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ บน $[a, b]$ แต่จะเห็นว่าข้อความดังกล่าวไม่จริง ดังจะพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

ค่าสูงสุดของ $f_n(x)$ คือ

ที่ $$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+1} \right| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

ดังนั้น $$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ บน } [-1, 1]$$

$$f_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)$$

$$= \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x \neq 0 \end{cases}$$

แต่ $$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d(0)}{dx} = 0$$

ดังนั้น $$0 = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f(0)\right) \neq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n(0)\right) = 1$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่าลำดับของฟังก์ชันคือ $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอ ควรจะมีคุณสมบัติอย่างอื่นด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.5 กำหนดให้

1) $f_n(x)$ หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$ $n = 1, 2, \ldots$ และ $f_n'(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$
2) $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าแบบจุดสู่ $f(x)$ บน $[a, b]$
3) $\{f_n'(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f'(x)$ บน $[a, b]$

จะได้ว่า อนุพันธ์ของ f หาค่าได้บน (a, b) และ

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{ทุกค่า } x \in (a, b)$$

นั่นคือ $$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

พิสูจน์ **ให้** $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ ทุกค่า $x \in [a, b]$

ดังนั้น $$f_n'(x) \rightrightarrows g \text{ บน } [a, x]$$

และ $f_n'(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, x]$ เมื่อ $x \in (a, b)$ โดยทฤษฎีบทที่ 4.4

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt$$

เนื่องจาก $f_n'(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $f_n'(x) \rightrightarrows g$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 จะได้ $g(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

พิจารณา
$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n'(t)\right)dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x f_n'(t)\right)dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)]$$
$$= f(x) - f(a)$$

ดังนั้น $$f(x) = \int_a^x g(t)dt + f(a)$$

เนื่องจาก $g(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ และมีค่าคือ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x g(t)dt + f(a)\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt$$
$$= g(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{ทุกค่า } x \in [a, b]$$

แบบฝึกหัด 4.1

ในข้อ 1 - 4 จงแสดงว่า $f_n(x)$ ลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับแต่ละ x บนช่วง I และพิจารณาการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายด้วย

1. $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $f(x) = 1$, $I = [0, 1]$

2. $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^3x^2)}{n^2}$, $f(x) = 0$, $I = [0, 1]$

3. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $f(x) = 1$, $I = [0, 1]$

4. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$, $I = [0, 1]$

5. 5.1 ให้ $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ ถ้า $0 < x < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าเป็นจุด ๆ แต่ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $(0, 1)$

   5.2 ให้ $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ ถ้า $0 < x < 1$, $x = 1, 2, \ldots$ จงแสดงว่า $g_n \rightrightarrows 0$ บน $(0, 1)$

6. กำหนดให้ $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ ถ้า $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ จงพิสูจน์ว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบจุด แต่ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ การอินทิเกรตทีละเทอมทำได้หรือไม่

7. กำหนดให้ $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$, $I = [0, 1]$ จงตรวจสอบว่า $f_n'(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายหรือไม่ และลำดับของ $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายหรือไม่

4.2 อนุกรมของฟังก์ชัน (Series of functions)

สำหรับนิยามของอนุกรมของฟังก์ชันนั้นคล้ายกับอนุกรมของเลขจำนวนจริง คือ เป็นผลรวมซึ่งมีแต่ละเทอมเป็นฟังก์ชันนั่นเอง

นิยาม ถ้า $\{f_n(x)\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งนิยามบน A

ให้ $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ เป็น**อนุกรมของฟังก์ชัน** และเขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ หรือ $\Sigma f_n(x)$

ถ้าผลบวก n เทอมคือ

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = S_n(x)$$

ซึ่งจะมีลำดับของฟังก์ชันใหม่คือ $\{S_n(x)\}$ เรียกว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** (sequence of partial sum)

นิยาม ถ้า $\Sigma f_n(x)$ เป็นอนุกรมของฟังก์ชันบนเซต A และ $\{S_n(x)\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อย อนุกรม $\Sigma f_n(x)$ **จะลู่เข้าที่** $x_0 \in A$ ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n(x)\}$ ลู่เข้าที่ $x_0 \in A$ เท่านั้น

ถ้า $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าที่จุด $x_0 \in A$ ผลบวกของอนุกรมนี้ที่ x_0 จะมีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$ เมื่อ $S(x_0)$ คือผลบวกของอนุกรม

ถ้า $\Sigma f_n(x)$ ไม่ลู่เข้าที่ $x_0 \in A$ เรากล่าวว่า **อนุกรมลู่ออก** (diverge) ที่ x_0

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f_n(x) = x^{n-1}(1-x),\ x \in (-1, 1),\ n = 1, 2, \ldots$

พิจารณา

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^{n-1}(1-x) \\ &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^{n-1} - x^n \\ &= 1 - x^n \end{aligned}$$

ถ้า $x \in (-1, 1)$ จะได้

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} (1 - x^n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ $\{S_n(x)\}$ ลู่เข้าสู่ 1 สำหรับ $x \in (-1, 1)$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ ลู่เข้าสำหรับแต่ละ $x \in (-1, 1)$

นิยาม ถ้า $\Sigma f_n(x)$ เป็นอนุกรมของฟังก์ชันบนเซต A อนุกรม $\Sigma f_n(x)$ จะลู่เข้า**อย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต** A ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A

ข้อสังเกต ถ้า $f_n(x) = a_n$, a_n เป็นจำนวนจริง $n = 1, 2, \ldots$ และอนุกรม $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้า จะได้ว่า อนุกรม $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A

จากทฤษฎีของอนุกรมของเลขจำนวนจริง เราทราบว่า ถ้า Σa_n ลู่เข้าจะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ สำหรับการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ก็จะได้คุณสมบัติที่สอดคล้องกัน คือ

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ถ้าอนุกรม $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A แล้วเทอมทั่วไปที่ n, $f_n(x)$ จะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บนเซต A

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ โจทย์กำหนดให้อนุกรม $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A นั่นคือ $\{S_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A

พิจารณา $$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

และ $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

จะพิจารณา
$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \\ &= |[S_n(x) - S(x)] + [S(x) - S_{n-1}(x)]| \end{aligned}$$

ดังนั้น ให้ $\varepsilon > 0$ จาก $\{S_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A เลือก N ซึ่งถ้า $n > N-1$ จะได้

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้น ทุก ๆ $x \in A$ ถ้า $n > N$ จะได้

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |[S_n(x) - S(x)] + [S(x) - S_{n-1}(x)]| \\ &\leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{f_n(x)\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ 0 บน A

ตัวอย่าง จงแสดงว่า อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series) สำหรับ e^x ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตมีขอบเขต (bounded)

วิธีทำ ถ้า A เป็นเซตมีขอบเขต $\therefore A \subseteq [-\alpha, \alpha]$

จากสูตรของเทเลอร์สำหรับ e^x เมื่อ $x = a = 0$ สำหรับ x ใด ๆ

$$|f_n(x) - f(x)| = |R_n(x)| = \frac{e^{\xi n}}{n!}|x|^n \leqslant \frac{e^{\alpha}}{n!}\alpha^n$$

แต่ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{e^{\alpha}}{n!}\alpha^n = 0$ และ $\frac{e^{\alpha}}{n!}\alpha^n$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x

ดังนั้น $\{e^x\}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

ทฤษฎีบทที่ 4.7 (Cauchy condition for uniform convergence of series)

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี N ซึ่งสำหรับ n ใด ๆ ถ้า $n > N$ จะได้

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x)\right| < \varepsilon \text{ สำหรับทุกค่า } p = 1, 2, \ldots \text{ และทุกค่า } x \in A$$

พิสูจน์ ถ้า $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ เป็นผลบวกย่อยของอนุกรม

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)$$

$\{S_n(x)\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อย ซึ่งลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต A จากทฤษฎีบทที่ 4.1 จะได้

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall m, n\ (m, n > N \rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon \quad \forall x \in A)$

ถ้า $m = n+p,\ p = 1, 2, \ldots$

$\therefore\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall m, n(m, n > N \rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon\ )$

นั่นคือ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon\ )$

การทดสอบว่าอนุกรมของฟังก์ชันลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

ทฤษฎีบทที่ 4.8 การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass M-test)

กำหนดให้ $\{M_n\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวนบวก ซึ่ง $0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant M_n$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots$ และสำหรับทุกค่า $x \in A$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ลู่เข้าแล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A

พิสูจน์

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)|$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k, \quad \text{ทุกค่า } x \in A$$

แต่ $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k$ ลู่เข้า

นั่นคือ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon),\ p = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \ni \forall n(n > N \rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon)$

จากทฤษฎีบทที่ 4.7 จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

วิธีทำ สำหรับทุกค่า $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$|x| \leqslant \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $$|x^n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ลู่เข้าบน $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

โดยทฤษฎีการทดสอบ เอ็มของไวแยร์สตราสส์ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายทุกค่าของ x

วิธีทำ $\because \left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$ ทุกค่า x และทุกค่า $n = 1, 2, \ldots$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีการทดสอบ เอ็มของไวแยร์สตราสส์ได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายทุกค่า x #

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่าอนุกรม $1 + e^{-x}\cos x + e^{-2x}\cos 2x + \ldots$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซตซึ่งมีขอบเขตล่างเป็นค่าคงตัว

วิธีทำ ถ้า $\alpha > 0$ เป็นค่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต A

สำหรับทุกค่า $x \in A$

$$|e^{-nx}\cos nx| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-n\alpha}$$

และ $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีที่ 4.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \cos nx \text{ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนเซต } A$$

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

วิธีทำ พิจารณา $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$ ทุกค่า x

แต่อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.8 สรุปการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายไม่ได้ ต้องอาศัยทฤษฎีอื่น

ทฤษฎีบทที่ 4.9 (Dirichlet's test)

พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ ถ้า

1) $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเป็นบวกทุกค่า n และเป็นลำดับลด (decreasing sequence) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) มีค่าคงตัว M ซึ่งสำหรับทุกค่า x ในช่วงปิด I

$$|S_n(x)| = |f_1(x) + \ldots + f_n(x)| < M \quad \text{เมื่อ } n > N$$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน I

พิสูจน์ ให้ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$

แต่ $f_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x)$ และ $f_1(x) = S_1(x)$ ทุกค่า $k = 1, 2, \ldots$

$$\therefore \quad s_n(x) = a_1 S_1(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k [S_k(x) - S_{k-1}(x)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) + a_{n+1} S_n(x)$$

เมื่อ $n > m$

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k(x) + a_{n+1}S_n(x) - a_{m+1}S_m(x)$$

เมื่อ $n > m > N$ จะได้

$|S_k(x)| < M$ ทุก $k > N$ และทุกค่า $x \in I$

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_m(x)| &\leqslant M \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) + Ma_{n+1} + Ma_{m+1} \\ &\leqslant M(a_{m+1} - a_{n+1}) + Ma_{n+1} + Ma_{m+1} \\ &\leqslant 2Ma_{m+1} \end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{n\to\infty} an = 0$ นั่นคือ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N$ ซึ่ง $a_m < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ เมื่อ $m > N$

$\therefore\ |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ เมื่อ $n > m > N$

$\therefore\ \{s_n(x)\}$ เป็นลำดับโคชี

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน I

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายในช่วง $[\delta, \pi]$

วิธีทำ ในที่นี้ให้ $a_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้ $a_n > a_{n+1}$ ทุกค่า $n = 1, 2, \ldots$

และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

$$= \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

สำหรับแต่ละ $x \in [\delta, \pi]$

$$\sin kx = \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x}$$

ดังนั้น

$$S_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\therefore \quad |S_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

แต่ $\sin\frac{x}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$ สำหรับ $x \in [\delta, \pi]$

$$\therefore \quad |S_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad \text{ทุกค่า } x \in [\delta, \pi]$$

โดย Dirichlet's test จะได้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[\delta, \pi]$

ทฤษฎีต่าง ๆ ต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ถ้าอนุกรม $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f(x)$ บนเซต A และถ้าแต่ละ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ในเซต A แล้ว $f(x)$ จะมีความต่อเนื่องที่ x_0

พิสูจน์ จาก $\Sigma f_n(x) = f(x)$

จะพิสูจน์ว่า f มีความต่อเนื่องที่ x_0 นั่นคือ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0}(f_1(x)+\ldots+f_n(x))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(f_1(x_0)+f_2(x_0)+\ldots+f_n(x_0)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$ #

อนุกรมของฟังก์ชันซึ่งลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย อาจจะอินทิเกรตทีละเทอมได้ดังทฤษฎี

ทฤษฎีบทที่ 4.11 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f(x)$ บนเซต A และ $f_n(x)$ มีความต่อเนื่องบน A นิยาม $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$ และ $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $F(x)$ บน A

ดังนั้น $$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt$$

ตัวอย่าง ให้ $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$

เนื่องจาก $\left|\frac{x}{n(x+n)}\right| \leqslant \left|\frac{x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ สำหรับ $x \in [0, 1]$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$

ดังนั้น สามารถอินทิเกรตทีละเทอมได้บน $[0, 1]$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{xdx}{n(x+n)}$ จะลู่เข้าด้วย

ให้ γ เป็นผลบวกของอนุกรมนี้

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{xdx}{n(x+n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right]dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\frac{(n+1)}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n} - \ln(N+1)\right]
\end{aligned}$$

เพราะว่า $\lim_{N\to\infty} (\ln(N+1) - \ln N) = 0$

แสดงว่า มีเลขจำนวนบวก γ ซึ่ง

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \sigma_N$$

เมื่อ $\lim_{N \to \infty} \sigma_N = 0$

เรียก γ ว่า ค่าคงตัวของออยเลอร์ (Euler's constant) มีค่าโดยประมาณ 0.57721...

ทฤษฎีบท 4.12 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าสู่ f(x) บนช่วง [a, b] และ $f_n'(x)$ หาค่าได้ และมีความต่อเนื่องสำหรับ x ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b$ ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน [a, b] แล้วจะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ f บน [a, b] และ

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

นั่นคือ อนุกรมที่ลู่เข้าและอนุกรมของอนุพันธ์ที่ลู่เข้าอย่างเสมอต้เสมอปลาย สามารถจะหาอนุพันธ์ของอนุกรมทีละเทอมได้ภายในช่วง [a, b]

ตัวอย่าง พิจารณา $F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$

ในที่นี้ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$ ลู่เข้าเมื่อ $x > 0$ เราจะแสดงว่า F มีความต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ต่อเนื่องทุกอันดับทุกค่า $x > 0$

อนุพันธ์ของ F(x) ทีละเทอมได้ $= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2x}$

ถ้า $\delta > 0$ และ $x \geqslant \delta$

$$|n^2 e^{-n^2x}| \leqslant n^2 e^{-n^2\delta}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2\delta}$ ลู่เข้า

ดังนั้น $(-1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2x}$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายทุก x เมื่อ $\delta \leqslant x \leqslant \infty$

ดังนั้น F(x) มีอนุพันธ์ $= F'(x) = (-1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2x}$ ทุก $x > 0$

เมื่อหาอนุพันธ์ F(x) k ครั้ง จะได้

$$F^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} e^{-n^2x}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ซึ่งอนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $\delta \leqslant x < \infty$ สำหรับ $\delta > 0$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าอนุกรม $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ นิยามได้บน $(-1, 1)$ และหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบน $(-1, 1)$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิธีทำ ให้ $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ และ $f_n'(x) = x^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

สำหรับ $a > 0$ $|f_n'(x)| \leqslant a^{n-1}$ ทุกค่า $x \in [-a, a]$

เนื่องจาก Σa^{n-1} ลู่เข้า เมื่อ $0 < a < 1$

ดังนั้น $\Sigma f_n'(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[-a, a]$ เมื่อ $a < 1$

โดยทฤษฎีบท จะได้ $\Sigma f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[-a, a]$ เมื่อ a เป็นจำนวนบวก และ $(\Sigma f_n)' = \Sigma f_n'$

เพราะฉะนั้น $\left(\Sigma \frac{x^n}{n}\right)' = \Sigma x^{n-1}$ จริง เมื่อ $x \in [-a, a]$ และ $0 < a < 1$

ให้ $x_0 \in (-1, 1)$ ดังนั้น $|x_0| < 1$

เพราะฉะนั้น จะมี $a_0 > 0$ ซึ่ง $|x_0| < a_0 < 1$

นั่นคือ $0 < a_0 < 1$ และ $x_0 \in [-a_0, a_0]$

ดังนั้น $\left(\Sigma \frac{x_0^n}{n}\right)' = \Sigma x_0^{n-1}$ สำหรับ $x_0 \in (-1, 1)$

เพราะฉะนั้น $\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

แบบฝึกหัด 4.2

ในข้อ 1 - 4 จงใช้ทฤษฎีบทการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ เพื่อแสดงว่าอนุกรมต่าง ๆ เหล่านี้ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนช่วงที่กำหนดให้

1. $\Sigma n^2 x^n$; $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $\Sigma \frac{\cos nx}{n^2+1}$; $(-\infty, +\infty)$

3. $\Sigma \frac{1}{n^2+x^2}$; $(-\infty, +\infty)$

4. $\Sigma(x \ell nx)^n$; $[0, 1]$

5. กำหนดให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

จงแสดงว่า $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

6. จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x/n)^n} = 1-e^{-1}$

7. จงหาช่วงของ x ซึ่งทำให้อนุกรมลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

7.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{2^{n-1}}$

7.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$, $x \geqslant 0$

7.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)}$, $|x| \leqslant h$

8. จงแสดงว่า $\Sigma x^n(1-x)$ ลู่เข้าในช่วง $[0, 1]$ แต่ไม่ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$ แต่อนุกรม $\Sigma(-1)^n x^n(1-x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[0, 1]$

9. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน R

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า

10. กำหนดให้ $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ สำหรับทุกค่า x ใน I และแต่ละ n = 1, 2, ... ถ้า f_n ลู่เข้าสู่ 0 อย่างเสมอต้นเสมอปลายบน I แล้วจงพิสูจน์ว่า อนุกรม $\Sigma(-1)^{n+1} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน I ด้วย

11. ถ้า $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ จงพิสูจน์ว่า

11.1 F(x) มีความต่อเนื่องทุกค่า x

11.2 $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$

11.3 $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ มีความต่อเนื่องทุกจุด

12. จงพิจารณาการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}$$

13. จงแสดงว่า $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3}$

14. จงแสดงว่า $\frac{d}{dx}\left[\Sigma \frac{x^n}{n(n+1)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ เมื่อ $|x| < 1$

4.3 อนุกรมกำลัง (Power series)

อนุกรมซึ่งอยู่ในรูป

$$\Sigma a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ (4.3.1)$$

เรียกว่า **อนุกรมกำลังใน** x

อนุกรมซึ่งอยู่ในรูป

$$\Sigma a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots (4.3.2)$$

เรียกว่า **อนุกรมกำลังใน** $(x-c)$

โดยทั่วไปอนุกรมซึ่งมีรูปเป็น

$$\Sigma a_n [f(x)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [f(x)]^n = a_0 + a_1 f(x) + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots (4.3.3)$$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เรียกว่า **อนุกรมกำลังใน** $f(x)$

ในที่นี้จะพิจารณาอนุกรมกำลังในรูป (4.3.1) และ (4.3.2) จะเห็นว่าอนุกรมกำลังนั้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของอนุกรมของฟังก์ชัน สำหรับคุณสมบัติของอนุกรมกำลังเกี่ยวกับการลู่เข้าคงได้ทราบมาบ้างแล้วจากแคลคูลัสชั้นสูง 1 ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

ทฤษฎีบทที่ 4.13 อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า (radius of convergence) สู่ R ซึ่งทำให้อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (converges absolutely) เมื่อ $|x-c| < R$ และลู่ออกเมื่อ $|x-c| > R$

ค่า R อาจจะเป็น 0, จำนวนบวก หรือ ∞

ถ้า $R \neq 0$, $R_1 \neq 0$ ซึ่ง $0 < R_1 < R$ แล้วอนุกรมจะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายเมื่อ $|x-c| \leqslant R_1$

และ R จะหาได้จาก

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้}$$

หรือ $$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}, \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้}$$

พิสูจน์ พิจารณากรณีที่ $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ หาค่าได้

โดยการทดสอบอัตราส่วน (ratio test)

พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x-c|$$

$$= \frac{|x-c|}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

$$= \frac{|x-c|}{R}$$

อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $\frac{|x-c|}{R} < 1$

นั่นคือ $|x-c| < R$

และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $\frac{|x-c|}{R} > 1$ นั่นคือ $|x-c| > R$

ถ้า $R = 0$ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะหา $N \in Z^+$ ได้ ซึ่งสำหรับทุกค่า n, $n \geqslant N \to \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < \varepsilon$

$$\therefore \quad |a_{n+1}| \quad > \quad \frac{|a_n|}{\varepsilon}$$

ดังนั้น $\quad |a_{N+1}| \; > \; \dfrac{|a_N|}{\varepsilon_{N+p}}$ และ $|a_{N+p}| \; > \; \dfrac{|a_N|}{\varepsilon^p}$ สำหรับทุกค่า $p \in Z^+$

สำหรับ x ใด ๆ จะได้ $|a_{N+p}(x-c)^{N+p}| \; > \; \dfrac{|a_N|\,|x-c|^{N+p}}{\varepsilon^p}$

สำหรับ $x \neq C$ จะเลือก ε ซึ่ง $|x-c|^{N+p} \geqslant \varepsilon^p$ ทุกค่า $p \in Z^+$

ดังนั้น $|a_{N+p}(x-c)^{N+p}| \; < \; |a_N|$ ถ้า $n > N$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่ออกเมื่อ $x \neq c$

กรณีที่ $R = \infty$ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ในกรณีที่ $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ พิจารณาในทำนองเดียวกันโดยใช้การทดสอบราก (root test)

การพิสูจน์ในช่วงสุดท้ายจะใช้ทฤษฎีบทที่ 4.8

ถ้า $0 < R_1 < R$

สำหรับ $|x-c| \leqslant R_1$

พิจารณา $|a_n|\,|x-c|^n \leqslant |a_n|R_1^n = M_n$

$$\therefore \quad \frac{M_{n+1}}{M_n} \quad = \quad \frac{|a_{n+1}|R_1^{n+1}}{|a_n|R_1^n}$$

$$= \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| R_1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| R_1$$

$$= \quad \frac{R_1}{R}$$

ในที่นี้ $R_1 < R$ ดังนั้น $\dfrac{R_1}{R} < 1$

$\therefore \; \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $R_1 < R$

โดยการทดสอบ เอ็มของไวแยร์สตราสส์

อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ จงหาช่วงของ x ซึ่งทำให้อนุกรมลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีทำ ในที่นี้

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

หรือ

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{2/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{(2/n)\ln n} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)\ln n} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $-1 < x < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|x| > 1$

เมื่อ $x = \pm 1$

$$\left| \frac{(\pm 1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

$\therefore$ อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $|x| \leqslant 1$ หรือ $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\because \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} = M_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายเมื่อ $-1 \leqslant x \leqslant 1$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ จงหาช่วง I ของ x เมื่อ $|x| \leqslant h$ ซึ่งทำให้อนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีทำ ถ้า $|x| \leqslant h$ ดังนั้น $|(n+1)x^n| \leqslant (n+1)h^n = M_n$

$$\begin{aligned} \frac{M_{n+1}}{M_n} &= \frac{(n+2)h^{n+1}}{(n+1)h^n} \\ &= \frac{(n+2)h}{(n+1)} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)} h$$

$$= h$$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ ลู่เข้าเมื่อ $h < 1$ ลู่ออกเมื่อ $h \geqslant 1$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย เมื่อ $|x| \leqslant h$ และ $h < 1$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$ จงหารัศมีของการลู่เข้า

วิธีทำ ในที่นี้

$$a_n = \frac{1}{3^n\sqrt{2n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}\sqrt{2(n+1)+1}}{3^n\sqrt{2n+1}} \right|$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} \right|$$

$$= 3$$

อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|x+2| < 3$ และลู่ออกเมื่อ $|x+2| > 3$

นั่นคือ อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-5 < x < 1$ พิจารณาที่จุดปลาย $x = -5, x = 1$

เมื่อ $x = 1$ จะได้อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ซึ่งลู่ออก

เมื่อ $x = -5$ จะได้อนุกรม

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} + \ldots$$

เป็นอนุกรมสลับซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น รัศมีของการลู่เข้า R คือ $-5 \leqslant x < 1$

ตัวอย่างที่ 4 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

วิธีทำ ในที่นี้

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1$$

ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $|x| < 1$ และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|x| > 1$

เมื่อ $x = 1$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

เมื่อ $x = -1$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมสลับซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น รัศมีของการลู่เข้าคือ $-1 \leqslant x < 1$

คุณสมบัติการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมกำลังเป็นเรื่องที่น่าสนใจเพื่อนำไปหาค่าลิมิต อินทิกรัล และอนุพันธ์ได้โดยง่าย

ทฤษฎีบทที่ 4.14 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าสู่ $R > 0$ และ $[x_1, x_2] \subseteq (c-R, c+R)$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[x_1, x_2]$

พิสูจน์ เนื่องจาก $[x_1, x_2] \subseteq (c-R, c+R)$

เพราะฉะนั้น $x_1 \in (c-R, c+R)$ และ $x_2 \in (c-R, c+R)$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1-c)^n|$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_2-c)^n|$ ลู่เข้า

ให้ $h = \max\{|x_1-c|, |x_2-c|\}$

$\therefore$ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|h^n$ ลู่เข้าด้วย

ให้ $x \in [x_1, x_2]$

ถ้า $x \geqslant c$ จะได้ $|x-c| = x-c \leqslant x_2-c \leqslant h$

ถ้า $x < c$ จะได้ $|x-c| = c-x \leqslant c-x_1 \leqslant h$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} |a_n(x-c)^n| &= |a_n|\,|x-c|^n \\ &\leqslant |a_n|h^n \end{aligned}$$

แต่ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|h^n$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ จะได้

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $[x_1, x_2]$

อนุกรมกำลังสามารถอินทิเกรตทีละเทอมได้ภายในช่วงของการลู่เข้า และสามารถหาอนุพันธ์ทีละเทอมได้ภายในช่วงของการลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 4.15 ถ้า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,\ c-R < x < c+R$ แล้ว

สำหรับ $x-R < x_1 < x_2 < c+R$

$$\int_{x_1}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} (x-c)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x_2-c)^{n+1}-(x_1-c)^{n+1}}{n+1}$$

ในรูปของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k, \quad c-R < x < c+R$$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 4.14 อนุกรมจะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $c-R < x < c+R$

ดังนั้น จะลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนแต่ละช่วง $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

ซึ่งสามารถอินทเกรตทีละเทอมได้

ถ้า $x_1 = c$

จะได้ $$\int_{c}^{x_2} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x_2-c)^{n+1}}{n+1}$$

ให้ $$F(x_2) = \int_{c}^{x_2} f(x)dx$$

และ $$\frac{dF(x_2)}{dx_2} = f(x_2)$$

โดยทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัสจะได้

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$$

หรือ $$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$$

ทฤษฎีบทที่ 4.16 ถ้า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \quad c-R < x < c+R$ แล้วจะได้

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}, \quad c-R_1 < x < c+R_1$$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ข้อสังเกต จะเห็นว่า อนุกรมกำลังอาจจะลู่เข้าที่จุดปลายช่วงหรือไม่ก็ได้ เช่น

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$ อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x เมื่อ $-1 \leqslant x \leqslant 1$

พิจารณาอนุพันธ์ของ f(x)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$ ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-1 \leqslant x < 1$

ถ้าหาอนุพันธ์อีกครั้งจะได้

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$ ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 1$

แบบฝึกหัด 4.3

จงหารัศมีของการลู่เข้าของข้อ 1 - 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(3^n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{n(n!)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n}$

6. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งแทนฟังก์ชันต่อไปนี้ ซึ่งลู่เข้าในบางช่วงที่มีจุดที่กำหนดให้อยู่

6.1 $1/x$ ใกล้จุด $x = 1$

6.2 $\log(1+x^2)$ ใกล้จุด $x = 0$

7. จงหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันต่อไปนี้รอบจุดที่กำหนดให้

7.1 $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ ใกล้จุด $x = 0$

7.2 $f(x) = xe^{-x}$ ใกล้จุด $x = 0$

8. กำหนดให้ฟังก์ชันซายน์ (sine function) นิยามโดย

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

และฟังก์ชันโคซายน์ (cosine function) นิยามโดย $C(x) = S'(x)$

จงแสดงโดยตรงว่า $S(2x) = 2S(x)\,C(x)$

9. จงหาฟังก์ชันซึ่งแทนได้ด้วยอนุกรมกำลังเหล่านี้ (โดยการอินทิเกรต หาอนุพันธ์ หรือวิธีอื่น)

9.1 $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^m}{(2n)!}$

9.2 $\sum_{0}^{\infty} n^2x^n$

9.3 $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

10. จงแสดงว่า $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

และ $\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

4.4 อนุกรมเทเลอร์และอนุกรมแมคลอริน (Taylor and Maclaurin series)

นิยาม ถ้า $R > 0$ และ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $|x-c| < R$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมเทเลอร์ของ** $f(x)$ **ที่** $x = c$ ถ้าสัมประสิทธิ์ a_n หาได้จาก

$$a_0 = f(c),\ a_1 = \frac{f'(c)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(c)}{2!} \ldots\ldots a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \ldots\ldots$$

ดังนั้น $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots$ .... (4.4.1)

ทฤษฎีบทที่ 4.17 ถ้า $R > 0$ และ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $|x-c| < R$ อนุกรมนี้ คืออนุกรมเทเลอร์ ซึ่งมี $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

พิสูจน์ $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots,$

โดยการหาอนุพันธ์ทีละเทอม

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + n \cdot a_n(x-c)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-c) + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2} + \ldots$$

....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n \ldots + (n+1)n(n-1)\ldots.2 \cdot a_{n+1}(x-c) + \ldots,$$

เมื่อ $x = c$ จะได้

$$f(c) = a_0,\ f'(c) = a_1,\ f''(c) = 2a_2,\ \ldots,\ f^{(n)}(c) = n!a_n,\ \ldots$$

ดังนั้น $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ #

นิยาม เมื่อ $c = 0$ สมการ (4.4.1) สำหรับอนุกรมเทเลอร์ของ $f(x)$ คือ

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

ซึ่งเรียกว่า **อนุกรมแมคลอรินของ** $f(x)$

ทฤษฎีบทที่ 4.18 อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ สำหรับทุก x ในย่านของ c แล้ว $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

พิสูจน์ ถ้ารัศมีของการลู่เข้าของทั้งสองอนุกรมคือ R และ R_1 ตามลำดับ

เมื่อ $0 < R \leq R_1$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n = f(x)$, $|x-c| < R$

โดยทฤษฎีบท จะได้ $a_0 = b_0 = f(c)$

และ $a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น $a_n = b_n$ ทุกค่า n

บทแทรก ถ้าอนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้าไม่เป็นศูนย์ และมีผลบวกเป็นศูนย์ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของอนุกรมจะมีค่าเป็นศูนย์ทุกค่า

ตัวอย่าง จงหาการกระจายแบบแมคลอรินของ $\tan^{-1}(x)$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต (geometric series)

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 1$

ถ้าแทนที่ x ด้วย $-x^2$ จะได้

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8\ldots$$

ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 1$

โดยการอินทิเกรตทีละเทอมจาก 0 ถึง x จะได้

$$\tan^{-1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| < 1$$

และอนุกรมลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน $-1 \leqslant x \leqslant 1$

ตัวอย่าง จงกระจาย $\ln(1+x)$ ในรูปอนุกรมกำลัง

จาก $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$

อินทิเกรตทีละเทอม

$$-\ln(1-x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $-1 \leqslant x < 1$

และลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายเมื่อ $-1 \leqslant x \leqslant h,\ h < 1$

แทนค่า x ด้วย $-x$ จะได้

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^x}{4}+\ldots$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า เราสามารถกระจายฟังก์ชันต่าง ๆ ให้อยู่ในแบบของอนุกรมกำลังซึ่งทราบรัศมีการลู่เข้าได้ อนุกรมกำลังนี้ เป็นเรื่องสำคัญที่ใช้ในการศึกษาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง พิจารณาฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) E ซึ่งนิยามในรูปของอนุกรมกำลัง

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

ซึ่งลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบนช่วงที่มีขอบเขต

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = E(x)$$

แสดงว่า E เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = y$

ถ้าให้ e^x แทนสัญลักษณ์ E(x) ดังนั้น เราอาจจะพิจารณา e^{-x^2} ได้ โดยแทนค่า x ด้วย $-x^2$ จะได้

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \quad |x| < R, \quad R < \infty$$

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{42} + \ldots, \quad |x| < R, \quad R < \infty$$

อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถหาค่า $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ จากอนุกรมนี้ได้ เพียงแต่หาค่า $\int_0^t e^{-x^2} dx$ ได้ละเอียดขึ้น ในบทต่อไปจะได้ทราบว่าค่าของ $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงกระจาย $\frac{1}{x}$ เป็นอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $x = 1$

2. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3x+5}$ ให้เป็นอนุกรม

   2.1 อนุกรมแมคลอริน

   2.2 อนุกรมเทเลอร์รอบจุด $x = 1$

3. จงหาค่าของ $\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$

4. จงใช้อนุกรมแมคลอรินสำหรับ e^x และ e^{-x} และสมการ

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

แสดงว่า $$\cosh x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ ทุกค่า } x$$

5. จงแสดงว่า $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ ทุกค่า x

โดยการอินทิเกรตอนุกรมแคลอรินสำหรับ $\sin t$ จาก 0 ถึง x

6. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีอนุกรมเทเลอร์รอบจุด $x = 0$

6.1 $|x|$ 6.2 $\sqrt{x}$

บทสรุป

ลำดับของฟังก์ชัน

การลู่เข้าของ $\{f_n(x)\}$ มี 2 แบบ คือ

1. ลู่เข้าแบบจุด ใช้สัญลักษณ์ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ บน A
2. ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้สัญลักษณ์ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน A

การตรวจสอบว่าลำดับของฟังก์ชันลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย นอกจากจะใช้นิยามโดยตรง จะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ คือ

ทฤษฎีบท ถ้า $f_n - f$ มีขอบเขตบน E

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน E ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$

จากคุณสมบัติของการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ทำให้สรุปทฤษฎีการสลับลิมิตและอินทิกรัลดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $f_n(x)$ มีความต่อเนื่อง และ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ บน $[a, b]$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

อีกทฤษฎีหนึ่งซึ่งสามารถสลับลิมิตและอนุพันธ์ได้คือ

ทฤษฎีบท กำหนดให้

1) $f_n(x)$ หาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$, $f_n'(x)$ มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

2) $f_n(x) \to f(x)$ บน $[a, b]$

3) $f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ บน $[a, b]$

จะได้ $\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)$ ทุก x บน (a, b)

อนุกรมของฟังก์ชัน

สำหรับอนุกรมของฟังก์ชันก็มีคุณสมบัติการลู่เข้าในทำนองเดียวกับลำดับของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทที่สำคัญที่ใช้ทดสอบการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายของอนุกรมคือ ทฤษฎีการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์

ทฤษฎีบท $\{M_n\}$ เป็นลำดับของเลขจำนวนบวก $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$ ทุกค่า $x \in A$ จะได้ว่า

ΣM_n ลู่เข้า $\to$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายบน A

ถ้าอนุกรมลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย อาจจะอินทิเกรตทีละเทอม ได้ดังทฤษฎีบทที่ 4.11 และอาจจะหาอนุพันธ์ทีละเทอมได้ ดังทฤษฎีบทที่ 4.12

สำหรับอนุกรมกำลังจะได้ทฤษฎีเกี่ยวกับการหารัศมีการลู่เข้า และพิจารณาถึงการลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย สุดท้ายคืออนุกรมเทเลอร์และแมคลอริน ก็นิยามจากอนุกรมกำลังนั่นเอง

แบบฝึกหัดระคนบทที่ 4

1. สำหรับแต่ละ $n \in Z^+$ กำหนดให้

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

จงแสดงว่า

1.1 $f_n \to f$ (แบบจุด) เมื่อ $f(x) = 0$ บน $[-1, 1]$

1.2 $f_n'(0), f'(0)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0)$

2. ถ้า $f_n \rightrightarrows f$ บน A และ $g_n \rightrightarrows g$ บน A

   2.1 จงแสดงว่า $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ บน A

   2.2 ให้ $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$ และ $h(x) = f(x)g(x)$

   ถ้า $x \in A$ จงยกตัวอย่างแสดงว่า $h_n \not\rightrightarrows h$ บน A แต่ถ้า f_n และ g_n มีขอบเขตบน A $h_n \rightrightarrows h$ บน A

3. ถ้า $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ เมื่อ $n \in Z^+$ และ $x \in [-1, 1]$

   จงแสดงว่า ถ้า $f(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in [-1, 1]$ แล้ว $f_n(x)$ ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลายสู่ $f(x)$ เชื่อ $x \in [-1, 1]$

4. จงใช้ M-test แสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

   4.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ บน $[0, 1]$

   4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos nx$ บน $[0, \pi]$

5. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นอนุกรมเทเลอร์หรือแมคลอรินรอบจุดที่กำหนดให้

   5.1 $f(x) = e^{x^2}$ รอบ $a = 0$

   5.2 $f(x) = \sin x$ รอบ $a = \frac{\pi}{4}$