บทที่ 3
อินทิกรัลของฟังก์ชันหลายตัวแปร

3.1 ความนำ

ในการกล่าวถึงอินทิกรัลของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร จะนิยามได้บนช่วงปิด เช่น $a \leqslant x \leqslant b$ จะเห็นว่าอินทิกรัลจำกัดเขตของ f(x) บน [a, b] คือ การหาพื้นที่ใต้กราฟ y = f(x) นั่นเอง และจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_i x$$

เมื่อ $\Delta x = \ell \cdot u \cdot b\{\Delta_i x | i = 1, 2, \ldots, n\}$

และ $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรนั้น จะเริ่มนิยามอินทิกรัลบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ซึ่ง f(x, y) นิยามได้บน R และ $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ และจะนิยามอินทิกรัลสองชั้น (double integrals) ในเทอมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ หรือตาราง (nets) ซึ่งก็เป็นนิยามง่าย ๆ ของพื้นที่ของเซต และในเทอมของพื้นที่ เราสามารถหาอินทิกรัลสองชั้นในรูปทั่ว ๆไปกว่าการแบ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า นอกจากนั้น ยังกล่าวถึงการหาค่าอินทิกรัลโดยการเปลี่ยนตัวแปร

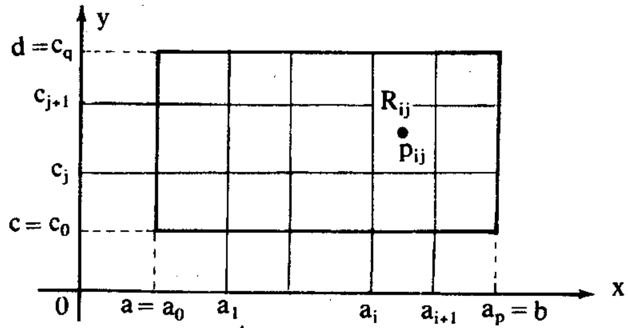
ฟังก์ชันที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัวขึ้นไป ก็ใช้วิธีการในทำนองเดียวกัน ซึ่งก็ได้พิจารณาถึงอินทิกรัลสามชั้น และการหาค่าของอินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันสามตัวแปร

3.2 อินทิกรัลสองชั้น (Double integrals)

เราจะเริ่มศึกษานิยามอินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชัน f(x, y) บนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$

นิยาม **ตาราง** (grid หรือ net) N บน R เป็นเซตจำกัดของเส้นตรงที่ขนานกับแกนพิกัด ซึ่งตามแกน x จะประกอบด้วย $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_p = b$ และตามแกน y จะ

มี $c = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_q = d$ ดังรูป



รูป 3.1

ดังนั้น สี่เหลี่ยมผืนผ้า R จะถูกแบ่งโดยตารางเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R_{ij} ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $A(R_{ij})$, $n = pq$

นิยาม ค่าประจำ $\|N\|$ ของตาราง N เป็นความยาวที่ยาวที่สุดของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{mn}$

นิยาม ให้ $f(p_{ij})$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามได้บนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R_{ij} ถ้า $p_{ij} \in R_{ij}$ จะกล่าวว่า f **อินทิเกรตได้** (integrable) และมีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\|N\| \to 0} \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij}) \quad \text{หาค่าได้}$$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|\Sigma f(p_{ij})A(R_{ij}) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่า p_{ij} และ N เมื่อ $\|N\| < \delta$

และจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iint\limits_R f(x, y)dA$

ดังนั้น
$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \lim_{\|N\| \to 0} \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij})$$

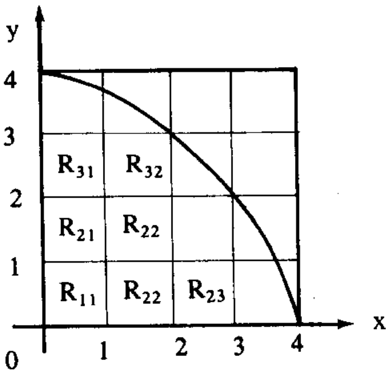
นิยาม เรียก $\Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij})$ ว่า**ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x, y) = 4x + 2y + 1$

และ $R = \left\{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \frac{(16 - x^2)}{4}\right\}$

ถ้า R ถูกแบ่งเป็น R_{ij} มี 7 รูป ดังรูปที่ 3.2 จงหาผลบวกรีมันน์

วิธีทำ ให้ p_{ij} เป็นจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ใน R_{11}, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ใน R_{12}, $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ใน R_{13}, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ใน R_{21}, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ใน R_{22}, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ใน R_{31} และ $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ใน R_{32}



รูปที่ 3.2

เนื่องจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R_{ij} \;=\; A(R_{ij}) \;=\; 1$

ดังนั้น ผลบวกรีมันน์ $= \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij})$

$$= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot 1$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\cdot 1$$

$$+ f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\cdot 1$$

$$= 4+8+12+6+10+8+12 \;=\; 60$$

ข้อสังเกต 1) ค่าของ $\iint\limits_R f$ ก็คือ ผลบวกทางพีชคณิตของผลคูณระหว่างพื้นที่ของส่วนโดเมนกับค่าของฟังก์ชัน $f(x, y)$ นั่นเอง

2) ถ้า $f(x, y) \geqslant 0$ ทุกค่า $(x, y) \in R$ $\iint\limits_R f$ ก็คือปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บนโดเมน R นั่นเอง

3) ถ้า $f(x, y) = 1$ ทุกค่า (x, y) ใน R

$$\iint\limits_R f\,dA \;=\; \iint\limits_R 1\,dA \;=\; \iint\limits_R dA$$

ซึ่งคือ พื้นที่ของ R นั่นเอง

นิยาม ถ้า D เป็นเซตซึ่งมีขอบเขตซึ่งบรรจุอยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R $f(p)$ นิยามได้บน D ให้

$$F(p) \;=\; \begin{cases} f(p) & \text{เมื่อ} \quad p \in D \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad p \notin D \end{cases}$$

แล้วจะได้ f อินทิเกรตได้บน D ก็ต่อเมื่อ F อินทิเกรตได้บน R และ **อินทิกรัลสองชั้นของ f บน D** นิยามโดย

$$\iint_D f = \iint_R F$$

จะเห็นว่า อินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชันบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดนั้น นิยามโดยการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดรูปเล็ก ๆ ซึ่งแต่ละรูปมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน สำหรับการขยายวิธีนี้เป็นแบบทั่ว ๆ ไป ทำได้ดังนี้

ให้ D เป็นเซตที่มีขอบเขตซึ่งบรรจุอยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R ซึ่งมีด้านขนานกับแกนพิกัด ให้ N เป็นตารางบน R ดังนั้น จะแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก ๆ R_{ij} ขนาดของ R_{ij} อาจจะไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับ $\|N\|$ ถ้า $\|N\|\to 0$ จำนวน R_{ij} ก็มีมาก และแต่ละรูปมีขนาดเล็กและพื้นที่ของแต่ละรูปคือ $A(R_{ij})$

พิจารณาผลบวกรีมันน์ $\Sigma f(p_{ij})\ A(R_{ij})$ .... (3.2.1)

พิจารณา (3.2.1) จะเห็นว่าเกิดได้ 3 กรณี ถ้า $f(p_{ij}) = 1$ ใน D

1) สี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ประกอบด้วยจุดข้างใน D ทั้งหมด ดังนั้น สำหรับทุกค่า p_{ij} จะได้ $f(p_{ij})\ A(R_{ij}) = A(R_{ij})$

2) สี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ซึ่งประกอบด้วยจุดของ D' บางส่วน และของ D' บางส่วน ดังนั้น $f(p_{ij})\ A(R_{ij}) = A(p_{ij})$ หรือ 0

3) สี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ซึ่งมีเฉพาะจุดข้างนอก D (exterior) ดังนั้น $f(p_{ij})\ A(R_{ij}) = 0$

ถ้าให้ $a(N)$ = พื้นที่รวมของทุก $R_{ij} \subset D$

$A(N)$ = พื้นที่รวมของทุก R_{ij} ซึ่ง $R_{ij} \cap D \neq \phi$

ดังนั้น $a(N) \leqslant \Sigma f(p_{ij})\ A(R_{ij}) \leqslant A(N)$

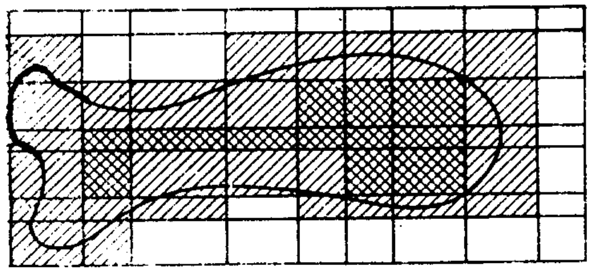
นิยาม ถ้า D เป็นเซตที่มีขอบเขต N เป็นตารางบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมี D บรรจุอยู่

ให้ $\underline{A}(D) = \sup_N a(N)$

และ $\bar{A}(D) = \inf_N A(N)$

เรียก $\underline{A}(D)$ ว่าพื้นที่ภายใน (inner area) และ $\bar{A}(D)$ ว่าพื้นที่ภายนอก (outer area)

ถ้า $A(D) = \underline{A}(D) = \bar{A}(D)$ จะกล่าวว่า $A(D)$ เป็นพื้นที่ของ D



รูปที่ 3.3

ตัวอย่าง $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$, x และ y เป็นจำนวนตรรกยะ$\}$
จงหาพื้นที่ของ D

วิธีทำ จะเห็นว่า D เป็นเซตที่ไม่มีจุดข้างใน หรือ $\mathrm{Int}(D) = \phi$

ดังนั้น $\underline{A}(D) = 0$

แต่ทุกจุดของสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย เป็นจุดขอบของ D

ดังนั้น $\bar{A}(D) = 1$

เพราะฉะนั้น $\underline{A}(D) \neq \bar{A}(D)$

ดังนั้น D ไม่มีพื้นที่

ข้อสังเกต การกล่าวว่า D ไม่มีพื้นที่นั้น ต่างจากการกล่าวว่า D มีพื้นที่เป็นศูนย์ เพราะว่า ถ้า D มีพื้นที่เป็นศูนย์ หมายถึง $\underline{A}(D) = \bar{A}(D) = 0$

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามได้บนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R_{ij} สำหรับแต่ละค่า i, j

ให้ $M_{ij} = \sup\{f(p) | p \in R_{ij}\}$ หรือ $\sup\limits_{p \in R_{ij}} f(p)$

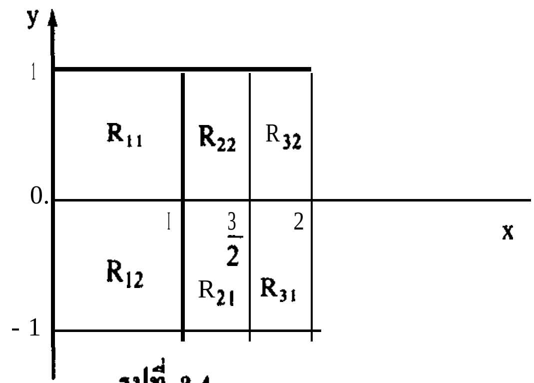
$m_{ij} = \inf\{f(p) | p \in R_{ij}\}$ หรือ $\inf\limits_{p \in R_{ij}} f(p)$

จะเรียก $\bar{S}(N) = \Sigma M_{ij} A(R_{ij})$ ว่า **ผลบวกรีมันน์บน** (upper Riemann sum)

และ $\underline{S}(N) = \Sigma m_{ij} A(R_{ij})$ ว่า **ผลบวกรีมันน์ล่าง** (lower Riemann sum)

ตัวอย่าง ให้ f นิยามโดย $f(p) = f(x, y) = x + 2y - 3$

ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= [(x, y) | x \in [0, 2], y \in [(-1, 1]\}$ ตาราง N บน R แบ่ง $[0, 2]$ ออกเป็น $\{0, 1, \frac{3}{2}, 2)$ และบน $[-1, 1]$ เป็น $\{-1, 0, 1\}$ ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4

จะได้ว่า $A(R_{11}) = A(R_{12}) = 1$

$$A(R_{21}) = A(R_{22}) = A(R_{31}) = A(R_{32}) = \frac{1}{2}$$

และ $m_{11} = -5,\quad m_{12} = -3$

$$m_{21} = -4,\quad m_{22} = -2$$

$$m_{31} = -\frac{7}{2},\quad m_{32} = -\frac{3}{2}$$

$$M_{11} = -2,\quad M_{12} = 0$$

$$M_{21} = \frac{3}{2},\quad M_{22} = \frac{1}{2}$$

$$M_{31} = -1,\quad M_{32} = 1$$

ดังนั้น $\bar{S}(N) = \Sigma M_{ij}\ A(R_{ij})$

$$= M_{11}A(R_{11}) + M_{12}A(R_{12}) + M_{21}A(R_{21}) + M_{22}(R_{22}) + M_{31}A(R_{31}) + M_{32}A(R_{32})$$

$$= (-2)(1) + 0(1) + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$\underline{S}(N) = \Sigma m_{ij}\ A(R_{ij})$$

$$= m_{11}A(R_{11}) + m_{12}A(R_{12}) + m_{21}A(R_{21}) + m_{22}A(R_{22}) + m_{31}A(R_{31}) + m_{32}A(R_{32})$$

$$= (-5)(1) + (-3)(1) + (-4)\left(\frac{1}{2}\right) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ \left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

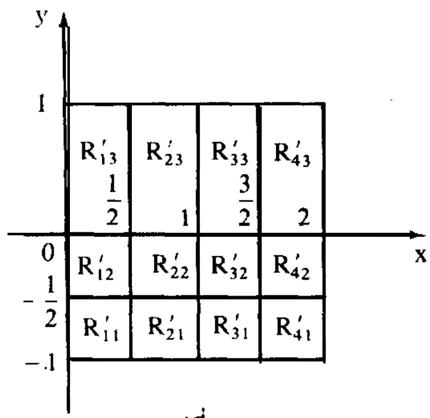
$$= -\frac{27}{2}$$

นิยาม ถ้า N และ N′ เป็นตารางบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R จะกล่าวว่าตารางที่ N′ **ละเอียดกว่า** (refinement) ตาราง N ถ้า N′ ได้จากการเพิ่มเส้นเข้าไปใน N

จะเห็นว่าทุกตาราง N ใด ๆ จะละเอียดกว่าตารางเปล่า (empty grid) ซึ่ง R ไม่ได้ถูกแบ่งเลย

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้ว ถ้า $f(x, y) = x + 2y - 3$ และ $R = \{(x, y) | x \in [0, 2], y \in [-1, 1]\}$

ให้ N′ เป็นตารางซึ่งแบ่ง R ออกเป็น R'_{ij} โดยแบ่ง $[0, 2]$ เป็น $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ และแบ่ง $[-1, 1]$ ออกเป็น $\left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5

จะได้ $A(R'_{11}) = A(R'_{12}) = A(R'_{22}) = A(R'_{31}) = A(R'_{32}) = A(R'_{41})$

$$= A(R'_{42}) = \frac{1}{2}$$

และ $A(R'_{13}) = A(R'_{23}) = A(R'_{33}) = A(R'_{43}) = \frac{1}{2}$

และ $m'_{11} = -5$, $m'_{12} = m'_{31} = -4$, $m'_{13} = m'_{32} = -3$

$m'_{21} = -\frac{[illegible]}{2}$, $m'_{22} = m'_{41} = -\frac{7}{2}$, m[illegible] $= m'_{42} = -\frac{5}{2}$

$$m'_{33} = -2, \quad m'_{43} = -\frac{3}{2}$$

และ $M'_{11} = -\frac{7}{2} \quad M'_{12} = M'_{31} = -\frac{5}{2}, \quad M'_{13} = -\frac{1}{2}, \quad M'_{21} = -3,$

$$M'_{22} = M'_{41} = -2, \quad M'_{23} = 0, \quad M'_{32} = -\frac{3}{2},$$

$$M'_{33} = \frac{1}{2}, \quad M'_{42} = -1, \quad M'_{43} = 1$$

ดังนั้น $\bar{S}(N') = -4, \quad \underline{S}(N') = -12$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า

$$\underline{S}(N) \leqslant \underline{S}(N')$$

และ $\bar{S}(N') \leqslant \bar{S}(N)$

ทฤษฎีบทที่ 3.1 กำหนดให้ N เป็นตาราง ซึ่งแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij} ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขตใน R จะได้

1) $\underline{S}(N) \leqslant \bar{S}(N)$ สำหรับทุกค่า N

2) ถ้า N′ เป็นตารางที่ละเอียดกว่า N แล้วจะได้

$$\underline{S}(N) \leqslant \underline{S}(N') \leqslant \bar{S}(N') \leqslant \bar{S}(N)$$

3) ถ้า s เป็นขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound) ของ f และ S เป็นขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของ f จะได้ $S - s \leqslant \bar{S}(N) - \underline{S}(N)$ และ $s \leqslant S$ เสมอ

พิสูจน์ 1) ได้โดยตรงจากนิยาม

2) $\bar{S}(N) = \Sigma M_{ij} A(R_{ij})$

เนื่องจาก N′ เป็นตารางที่ละเอียดกว่า N ดังนั้น R_{ij} จะถูกแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R'_{ij}

$$\bar{S}(N') = \Sigma M'_{ij} A(R'_{ij})$$

เมื่อ $M'_{ij} = \sup_{p \in R'_{ij}} f(P)$

เพราะว่าแต่ละ $R'_{ij} \in R_{ij}$ ดังนั้น $M'_{ij} \leqslant M_{ij}$

$$\Sigma M'_{ij} A(R'_{ij}) \leqslant M_{ij} \ \Sigma A(R'_{ij}) = M_{ij} \ A(R_{ij})$$

ดังนั้น $\bar{S}(N') \leqslant \bar{S}(N)$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\underline{S}(N) \leqslant \underline{S}(N')$$

3) เนื่องจาก $\underline{S}(N) \leqslant s$ และ $S \leqslant \bar{S}(N)$

ดังนั้น $S - s \leqslant \bar{S}(N) - \underline{S}(N)$

ให้ N_1 และ N_2 เป็นตารางใด ๆ

ให้ $N = N_1 \cup N_2$

ดังนั้น N ละเอียดกว่า N_1 และ N ละเอียดกว่า N_2

โดยข้อ 2) จะได้

$$\underline{S}(N_1) \leqslant \underline{S}(N) \leqslant \bar{S}(N) \leqslant \bar{S}(N_1)$$

และ $$\underline{S}(N_2) \leqslant \underline{S}(N) \leqslant \bar{S}(N) \leqslant \bar{S}(N_2)$$

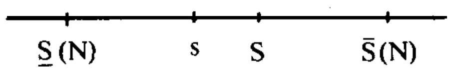
นั่นคือ $$\underline{S}(N_1) \leqslant \bar{S}(N_2)$$

แสดงว่า ทุก ๆ ผลบวกรีมันน์ล่างของตารางใด ๆ จะน้อยกว่าผลบวกรีมันน์บนเสมอ

แต่เนื่องจาก $s \leqslant \bar{S}(N_2)$ สำหรับทุกตาราง N_2

ดังนั้น $s \leqslant S$

ถ้าเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ของ $\underline{S}(N)$, s, S และ $\bar{S}(N)$ จะได้ดังนี้



ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้า f มีความต่อเนื่องบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R แล้ว $\iint\limits_R f$ หาค่าได้

พิสูจน์ เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน R และ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด และมีขอบเขต ดังนั้น f มีความต่อเนื่องอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (uniform continuous) บน R

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ (δ ขึ้นอยู่กับ ε อย่างเดียว)ซึ่งเมื่อ $x, y \in R$ แล้วถ้า $|x-y| < \delta$ จะได้ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

ให้ N เป็นตารางซึ่งแบ่ง R และ $\|N\| < \delta$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน R ดังนั้น f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน R

นั่นคือ สำหรับ $x, y \in R$ จะได้

$$M_{ij} = f(x) \quad \text{และ} \quad m_{ij} = f(y)$$

และ $\|N\| < \delta$ ดังนั้น $M_{ij} - m_{ij} < \dfrac{\varepsilon}{A(R)}$

พิจารณา
$$0 \leqslant \bar{S}(N) - \underline{S}(N) = \Sigma(M_{ij} - m_{ij})\, A(R_{ij})$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{A(R)} \Sigma A(R_{ij}) = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{\|N\|\to 0} |\bar{S}(N) - \underline{S}(N)| = 0$

จากทฤษฎีบทที่ 3.1 ข้อ 3 $S - s \leqslant \bar{S}(N) - \underline{S}(N)$

$$\lim_{\|N\|\to 0} |S - s| \leqslant \lim_{\|N\|\to 0} |\bar{S}(N) - \underline{S}(N)| = 0$$

ดังนั้น $S = s$

ให้ $L = S = s$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $\|N\| < \delta$ จะได้

$$|\underline{S}(N) - \bar{S}(N)| < \varepsilon$$

เนื่องจาก $\underline{S}(N) \leqslant L \leqslant \bar{S}(N)$

และ $\underline{S}(N) \leqslant \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij}) \leqslant \bar{S}(N)$

พิจารณา $|\Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij}) - L| \leqslant |\bar{S}(N) - L|$

$\leqslant |\bar{S}(N) - \underline{S}(N)| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{\|N\|\to 0} \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij}) = L$

ดังนั้น $\iint_R f$ หาค่าได้

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องเป็นบางจุดก็จะพิจารณาโดยทฤษฎีต่อไปนี้

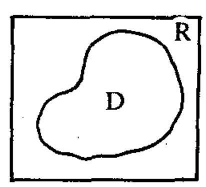
ทฤษฎีบทที่ 3.3 ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด f มีขอบเขตใน R และมีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน R ยกเว้นในเซต E ซึ่งมีพื้นที่เป็นศูนย์ จะได้ว่า $\iint_R f$ หาค่าได้

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ถ้า D เป็นเซตที่มีขอบเขตและหาพื้นที่ได้ f มีขอบเขตบน D และมีความต่อเนื่องทุกจุดซึ่งเป็นจุดภายใน D แล้ว $\iint_D f$ หาค่าได้ และมีค่าไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ซึ่ง $D \subseteq R$

พิสูจน์ ให้ D เป็นเซตที่มีขอบเขต และไม่ใช่สี่เหลี่ยมผืนผ้า

เลือก R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด ซึ่ง $D \in R$

นิยามฟังก์ชัน F บน R โดย



รูปที่ 3.6

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \in D \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin D \end{cases}$$

ดังนั้น $$\iint_D f = \iint_R F$$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน F มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน R ซึ่งอยู่นอก D และจุดภายใน D ส่วนจุดบนขอบ D นั้น F ไม่ต่อเนื่อง

ดังนั้น D มีพื้นที่และบนขอบ D นั้น D เป็นเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.3 $\iint_R F$ หาค่าได้

ถ้า R' เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด ซึ่ง $D \subseteq R'$ และ F' เป็นฟังก์ชัน

ให้ $R'' = R \cap R'$ ซึ่งจะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด ซึ่ง $D \subseteq R''$

$$\begin{aligned} \iint_R F &= \iint_{R''} F \\ &= \iint_{R'} F \\ &= \iint_{R'} F' \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\iint_D F = \iint_R F = \iint_{R'} F'$$

คุณสมบัติของอินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชันบน D จะได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ f และ g มีความต่อเนื่องและมีขอบเขตบน D แล้วจะได้

1) $\iint_D (f+g)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\iint_D f + \iint_D g$

2) $\iint_D kf = k\iint_D f$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

3) ถ้า $f(x) \geqslant 0$ ทุกค่า $x \in D$ แล้ว $\iint_D f \geqslant 0$

4) $\iint_D |f|$ หาค่าได้ และ $\left|\iint_D f\right| \leqslant \iint_D |f|$

5) ถ้า $D = D_1 \cup D_2$ D_1 และ D_2 ตัดกันในเซตที่มีพื้นที่ศูนย์แล้ว

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

พิสูจน์ ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดซึ่ง $D \subseteq R$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดซึ่งไม่อยู่ใน D

1) พิจารณา $\Sigma[f(x_{ij}) + g(x_{ij})]A(R_{ij}) = \Sigma f(x_{ij})\, A(R_{ij}) + \Sigma g(x_{ij})\, A(R_{ij})$

ดังนั้น $$\iint_D (f+g) = \iint_D f + \iint_D g$$

2) เนื่องจาก $\Sigma k f(x_{ij})\, A(R_{ij}) = k \Sigma f(x_{ij})\, A(R_{ij})$

ดังนั้น $$\iint_D kf = k\iint_D f$$

3) ถ้า $f(x) \geqslant 0$ ทุก $x \in D$ ดังนั้น $\Sigma f(x_{ij})A(R_{ij} \geqslant 0$ ด้วย

นั่นคือ $$\int_D f \geqslant 0$$

4) เนื่องจาก $|f| + f \geqslant 0$ และ $|f| - f \geqslant 0$ และมีความต่อเนื่อง

ดังนั้นจาก 3) $$\iint_D |f| + \iint_D f \geqslant 0$$

และ $$\iint_D |f| - \iint_D f \geqslant 0$$

$$\therefore \int_D f \leqslant \iint_D |f| \leqslant \iint_D |f|$$

นั่นคือ $$\left|\iint_D f\right| \leqslant \iint_D |f|$$

5) ให้ F นิยามโดย

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } x \in D_1 \\ 0 & \text{ถ้า } x \notin D_1 \end{cases}$$

พิจารณา $$\iint_D f = \iint_D F + \iint_D (f - F)$$

$$= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} (f-F)$$

$$= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

3.3 อินทิกรัลซ้อน (Iterated Integrals)

ในศตวรรษที่ 19 นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียนชื่อ Fubini เป็นผู้คิดเงื่อนไขซึ่งหาอินทิกรัลหลายชั้นของฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยหาจากอินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันเดียวกัน ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันหลายตัวแปรวิธีหนึ่ง คืออินทิกรัลซ้อน

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บนเซต D เมื่อ

$D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [g_1(x), g_2(x)]\}$ เมื่อ g_1, g_2 มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

นิยาม สำหรับแต่ละ $x \in [a, b]$ ให้

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy$$

ถ้า F อินทิเกรตได้บน $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b F(x) = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

เรียกว่า ค่าของ**อินทิกรัลซ้อนของ** f **บน** D และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$

เรียก D ว่า **โดเมนของการอินทิเกรต** หรือ **บริเวณของการอินทิเกรต**

ในการหาค่าของอินทิกรัลซ้อนนี้ จะอินทิเกรตเทียบกับ y ก่อนแล้วจึงอินทิเกรตเทียบกับ x

ตัวอย่าง กำหนดให้ $D = \{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{1-x^2}]\}$

และ $f : D \to R$ เมื่อ $f(x, y) = x^2 + y^2$

จงหาอินทิกรัลซ้อนของ f บน D

วิธีทำ

อินทิกรัลของ f บน D $= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)dydx$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2dy + y^2dy)dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0 x^2\sqrt{1-x^2}dx + \frac{1}{3}\int_0 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

ให้ $x = \sin\theta$

อินทิกรัลซ้อนบน $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{3}\cos^4\theta)d\theta$

$$= \frac{\pi}{8}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f : D \rightarrow R,\ D \subseteq R^2$ เมื่อ

$D = \{(x, y)|y \in [c, d], x \in [h_1(y), h_2(y)]\}$ เมื่อ h_1, h_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c, d]$

ถ้า $G(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx$ หาค่าได้

$$\int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx\right]dy$$

$$= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$$

เป็นอินทิกรัลซ้อนของ f บน D

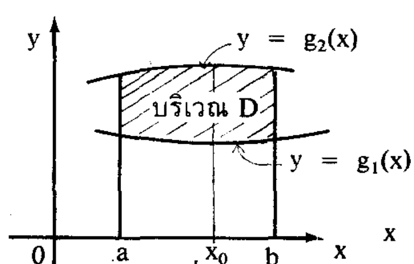
จะเห็นว่า ถ้า $f(x, y) \geqslant 0$ ทุกค่า $(x, y) \in D$ เมื่อ

$D = \{(x, y)|a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$

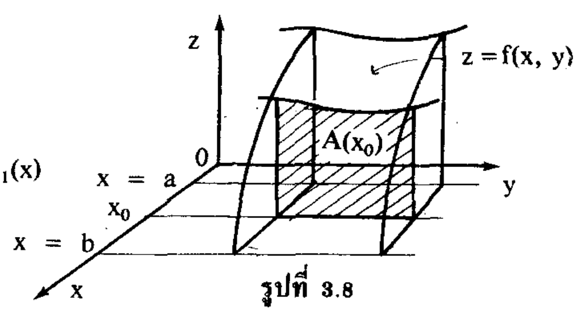
สำหรับแต่ละ x_0 ใน $[a, b]$

$A(x_0)$ คือ พื้นที่ใต้โค้งซึ่งเป็นส่วนตัดของผิวโค้ง $z = f(x, y)$ กับระนาบ $x = x_0$

ดังรูป



รูปที่ 3.7



รูปที่ 3.8

ดังนั้น $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx = \int_a^b A(x)dx$

ซึ่งเป็นปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งอยู่ใต้กราฟ $z = f(x, y)$ เหนือ D

ถ้า f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันมีโดเมน D ร่วมกัน และ $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ ทุกค่า (x, y) ใน D

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ระหว่างกราฟ f_1 และ f_2 มีค่าเท่ากับ

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} [f_2(x, y) - f_1(x, y)]dydx$$

ถ้าอินทิกรัลหาค่าได้

สำหรับบริเวณ $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ ก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน

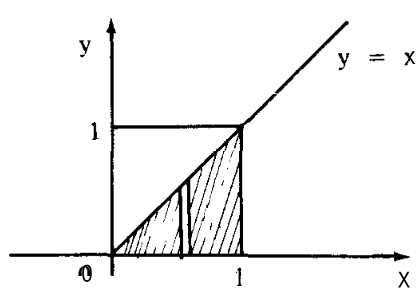
การเปลี่ยนอินทิกรัลซ้อน ซึ่งอยู่ในรูปที่ต้องอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรที่ 1 ก่อนแล้วจึงอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรที่ 2 ไปเป็นอินทิกรัลซ้อน ซึ่งต้องอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรที่ 2 ก่อนแล้วจึงอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรที่ 1 เรียกว่า **การเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต** การหาค่าอินทิกรัลซ้อนในบางครั้งจำเป็นต้องเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต เช่น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dxdy$

วิธีทำ จะเห็นว่า ถ้าอินทิเกรตเทียบกับ y ก่อน จะง่ายกว่า ดังนั้น จึงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต

บริเวณของการอินทิเกรตคือ $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 1; y \leq x \leq 1\}$

ซึ่งเขียนแทนด้วยรูป คือ



รูปที่ 3.9

ดังนั้น เปลี่ยนลำดับได้ดังนี้

$$\int_0^1\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dydx = \int_0^1 \left| xe^{\frac{y}{x}} \right|_{y=0}^{y=x} dx$$

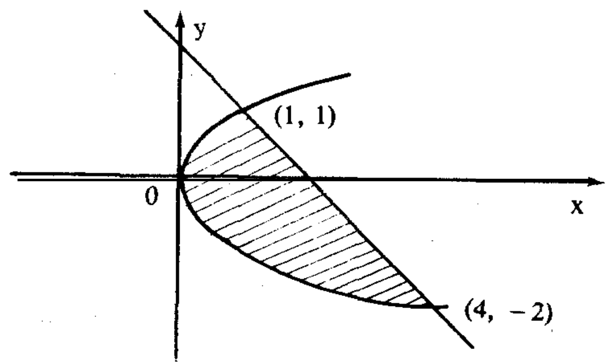
$$= \int_0^1 (xe-x)dx$$

$$= \left| \frac{x^2e}{2} - \frac{x^2}{2} \right|_0^1$$

$$= \frac{e-1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\iint_D x^2ydA$ ทั้ง 2 วิธี เมื่อ D ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $x = y^2$ และเส้นตรง $x+y = 2$

วิธีทำ บริเวณ D เขียนแทนได้ด้วยรูป



รูปที่ 3.10

วิธีที่ 1 วิธีที่ง่ายที่สุดคือ อินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน

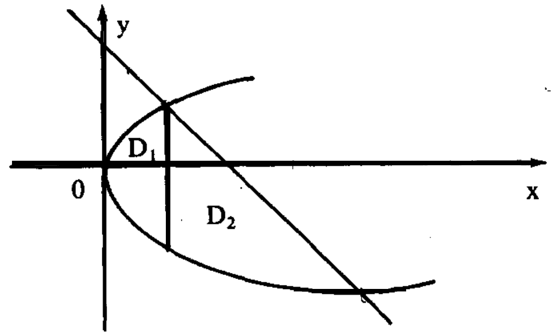
$$\iint_D x^2ydA = \int_{-2}^1\int_{y_2}^{2-y} x^2ydxdy$$

$$= \int_{-2}^1 \frac{x^3y}{3}\Big|_{y^2}^{2-y} dy$$

$$= \int_{-2}^1 \left| \frac{(2-y)^3y}{3} - \frac{y^7}{3} \right| dy$$

$$= -15\frac{3}{40}$$

วิธีที่ 2



รูปที่ 3.11

จากรูป จะเห็นว่าเราจะแบ่งบริเวณการอินทิเกรตเป็นสองส่วน คือ D_1 และ D_2

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | 1 \leqslant x \leqslant 4, -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2-x\}$$

ดังนั้น
$$\iint_D x^2y\,dA = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy\,dx + \int_1^4\int_{-\sqrt{x}}^{2-x} x^2y\,dy\,dx$$

$$= -15\frac{3}{40}$$

แบบฝึกหัด 3.1

จงหาค่าของอินทิกรัลซ้อนในข้อ 1 - 5

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{x^2} x^2y\,dy\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1\int_1^{e^x} \frac{dy\,dx}{y}$

3. $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} x\;dy\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{y} \cos(x+y)\,dx\,dy$

5. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\frac{1}{x}} xe^{xy}\,dy\,dx$

จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตแล้วหาค่าของ ข้อ 6 - 9

6. $\int_0^2\int_0^{x^2} x\,dy\,dx$

7. $\int_0^1\int_{-x}^{x} e^{x+y}\,dy\,dx$

8. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx\,dy$

9. จงหาค่าของ $\int_0^1\int_x^1 \cos y^2\,dy\,dx$

10. จงหาค่าของ $\int_0^2\int_{y/2}^{1} e^{-x^2}\,dx\,dy$

11. จงแสดงว่า $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx \neq \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$

12. จงหาค่าของ $\int_0^1\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

13. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย

    13.1 เส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $y = x-1$

    13.2 เส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 2y-y^2$

14. จงหาปริมาตรของบริเวณซึ่งอยู่ใต้ทรงกระบอก $z = 1-x^2$ ระหว่างระนาบ xz และระนาบ $x+y = 1$ เหนือระนาบ xy

3.4 การหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น

ในการหาค่า $\iint_D f$ ถ้าทราบว่าหาค่าได้ โดยการแบ่งเป็นตาราง N ซึ่งแบ่ง R เมื่อ $D \subseteq R$ ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ R_{ij} แล้วจะได้ $\iint_R f = \lim_{n\to\infty} \bar{S}(N)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int\int_R f$ เมื่อ $f(x, y) = x+2y$ และ

$R = \{(x, y) | x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$

วิธีทำ ให้ N เป็นตาราางซึ่งแบ่ง (partition) R ออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ $2n^2$ รูป แต่ละด้านยาวเท่ากับ $\frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ p_{ij} เป็นจุดใน R_{ij}

$$\begin{aligned}
\bar{S}(N) &= \Sigma f(p_{ij})\, A(R_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{n} + \frac{2j}{n}\right)\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{i}{n} + \frac{2j}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[2(1+2+\ldots+n) + (2+4+\ldots+4n)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 2\left(\frac{2n(n+1)}{2}\right)\right] \\
&= 5 + \frac{5}{n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{\|N\| \to 0} \bar{S}(N) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(5 + \frac{5}{n}\right) = 5$

จะเห็นว่า มีค่าเท่ากับการหาค่าอินทิกรัลซ้อน นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^1 [(x+2y)]\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left. \frac{x^2}{2} + 2xy \right|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + 2y\right) dy = 5
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า การคำนวณหาค่า $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{S}(N)$ นั้น ไม่ง่ายเสมอไป แต่ถ้าอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับอินทิกรัลซ้อน จะช่วยให้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบทที่ 3.6 (Fubini's theorem for rectangles) ถ้า R เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ และ f มีความต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_R f = \int_a^b\int_c^d f(x, y)dydx$$

พิสูจน์ เมื่อ x คงที่ f(x, y) จะมีความต่อเนื่องใน y

ให้ $$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\int_a^b F$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\iint_R f$

ให้ N เป็นตาข่ายซึ่งแบ่ง [a, b] ออกเป็น

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

เลือก $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$

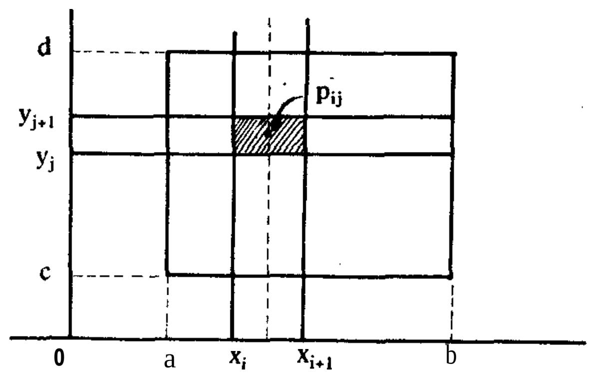
$$\text{ผลบวกรีมันน์} = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_i)\Delta x_i$$

ให้ $\|N\| = \delta$

เลือกจุดแบ่ง [c, d] โดยให้

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ ซึ่ง

$\Delta y_j = y_{j-1} - y_j \leqslant \delta$ สำหรับแต่ละ j ดังรูป



รูปที่ 3.12

สำหรับ x ใด ๆ

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy = \int_{y_0}^{y_m} f(x, y)dy$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)dy + \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy + \dots + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(x, y)dy$$

โดยทฤษฎีบทค่าตัวกลาง จะมี $\bar{y}_j$ ซึ่ง $\bar{y}_j \in [y_j, y_{j+1}]$ และ

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)dy = f(x, \bar{y}_j)[y_{j+1} - y_j]$$

$$= f(x, \bar{y}_j)\Delta y_j$$

$\bar{y}_j$ ขึ้นอยู่กับ X ดังนั้น ให้ $\bar{y}_j = Yj(X)$

$$F(x) = f(x, Y_0(x))\Delta y_0 + \ldots + f(x, Y_{m-1}(x))\Delta y_{m-1}$$

เมื่อ x ถูกเลือกมา ซึ่ง $(x, Y_j(x))$ คือจุด $(x_i, Y_j(x_i))$ ใน R

และ $$F(x_i) = \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{ij})\Delta y_j$$

ผลบวกรีมันน์สำหรับ F ใน 1 มิติ คือ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{ij})\Delta y_j \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

โดยเส้นแนวดิ่ง คือ $x = x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$

เส้นแนวระดับ คือ $y = y_j,\ j = 0, 1, \ldots, m$

ให้ N^* เป็นเซตเส้นแบ่งกั้นซึ่งแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า R_{ij}

ให้ $p_{ij} \in R_{ij}$ และ $A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$

เนื่องจาก $\Delta x_i \leqslant \delta$ และ $\Delta y_j \leqslant \delta$

และ $\|N^*\| < \Delta x_i + \Delta y_j < 2\delta = 2\|N\|$

ดังนั้น สำหรับตาราง N ใด ๆ ซึ่งแบ่ง [a, b] สามารถหาตาราง N^* ซึ่งแบ่ง R และทำให้ผลบวกรีมันน์เท่ากัน

เนื่องจาก $\int\int_R f$ หาค่าได้ ดังนั้น ผลบวกรีมันน์ในสองมิติลู่เข้า

และ $\int_a^b F$ หาค่าได้ และเท่ากับ $\int\int_R f$

หมายเหตุ ในการพิสูจน์ว่า $\int_a^b F$ หาค่าได้นั้น ไม่ได้พิจารณาว่า F มีความต่อเนื่องหรือไม่ ถ้าพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งไม่มีความต่อเนื่องแล้ว F ก็อาจจะไม่มีความต่อเนื่อง จะเห็นว่าถ้า f มีขอบเขตและมีความต่อเนื่องบน R ยกเว้นจุดบนเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์แล้ว $\int_c^d f(x, y)dy$ จะหาค่าไม่ได้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขเข้าไปในทฤษฎีบท จะได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R และมีความต่อเนื่อง ยกเว้นบนเซตที่มีพื้นที่เป็นศูนย์ ถ้ามี k ซึ่งไม่มีเส้นดิ่ง พบ E มากกว่า k จุดแล้ว

$$\iint_R f = \int_a^b\int_c^d f(x, y)dydx$$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ให้ D เป็นเซตซึ่งบรรจุอยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R ถ้า

1) f มีขอบเขตใน D
2) f มีความต่อเนื่องบนเซตของจุดข้างในของ D
3) $D = \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$ เมื่อ g_1 และ g_2 มีความต่อเนื่องบน $[a, b]\}$
4) $\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$ หาค่าได้

จะได้ว่า $\iint_D f$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$

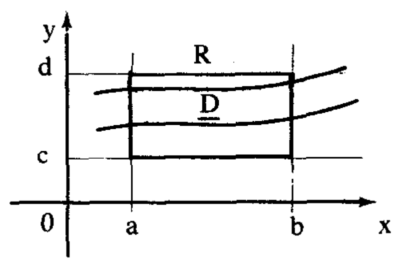
พิสูจน์ ให้ $F : R \to R$ โดย

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ถ้า } (x, y) \in D \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) \in R - D \end{cases}$$

ดังนั้น F มีความต่อเนื่องบนเซตของจุดภายใน D

F ไม่ต่อเนื่องบนกราฟ g_1 และ g_2 ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 3.7 $k = 2$

$\therefore \iint_R F$ หาค่าได้



รูปที่ 3.13

$\therefore \iint_D F$ หาค่าได้ และ $\iint_R F = \iint_D F$

$$\int\int_R F = \int_a^b\int_c^d F(x, y)dydx$$

สำหรับแต่ละ x ใน [a, b]

$$\int_c^d F(x, y)dy = \int_c^{g_1(x)} F(x, y)dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)dy + \int_{g_2(x)}^{d} F(x, y)dy$$

$$= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy \text{ หาค่าได้}$$

$$\therefore \int_a^b\int_c^d F(x, y)dydx = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx \text{ หาค่าได้}$$

$$\int\int_R F = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx \qquad \#$$

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า $D = \{(x, y)|c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$ เมื่อ h_1, h_2 มีความต่อเนื่องบน [c, d]

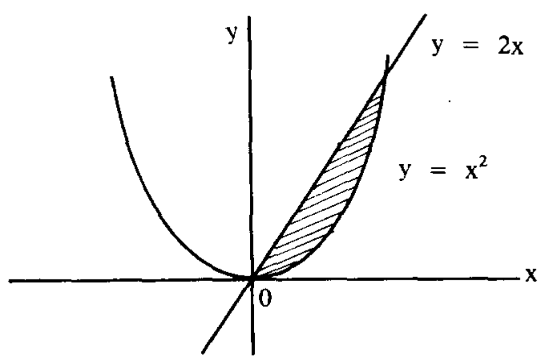
และ $\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$ หาค่าได้

จะได้ $\int\int_D f$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$

ดังนั้น จะเห็นว่าการเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต ไม่ทำให้ค่าอินทิกรัลซ้อนเปลี่ยน

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int\int_D (x^3 + 4y)dA$ เมื่อ D เป็นบริเวณในระนาบ xy ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = x^2$ และ $y = 2x$

วิธีทำ บริเวณ D เขียนแทนด้วยรูป



รูปที่ 3.14

$$\iint_D (x^3 + 4y)\,dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^3 + 4y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^3y + 2y^2\right)_{x^2}^{2x} dx$$

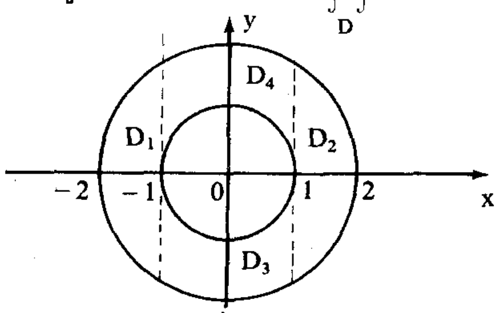
$$= \int_0^2 (-x^5 + 8x^2)\,dx$$

$$= \left| -\frac{x^6}{6} + \frac{8x^3}{3} \right|_0^2$$

$$= \frac{32}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า $\iint_D f$ เมื่อ D ถูกล้อมด้วยกราฟ $x^2+y^2 = 1$ และ $x^2+y^2 = 4$

วิธีทำ รูปกราฟบริเวณ D คือรูป 3.15 ในการหาค่า $\iint_D f$ อาจจะแบ่งบริเวณ D เป็นสี่ส่วน คือ D_1, D_2, D_3 และ D_4



รูปที่ 3.15

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f + \iint_{D_4} f$$

เมื่อ

$$\iint_{D_1} f = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$\iint_{D_2} f = \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

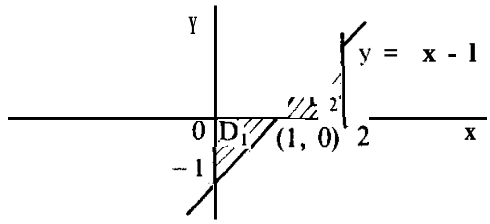
$$\iint_{D_3} f = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$\iint_{D_4} f = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$$

ถึงแม้ว่าอินทิกรัลสองชั้นจะคำนวณได้จากอินทิกรัลซ้อน แต่ก็มีข้อแตกต่างกัน จะเห็นว่าการหาค่าอินทิกรัลซ้อนนั้นเป็นอิสระ คือไม่เปลี่ยนโดยตรงสู่อินทิกรัลสองชั้น

ตัวอย่าง $\int_0^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx$

จะเห็นว่าอินทิกรัลนี้เป็นรูปอินทิกรัลซ้อน พิจารณาอินทิกรัลสองชั้นของ f บน D เมื่อ D ล้อมรอบด้วย $y = 0, y = x-1, x = 0, x = 2$ ดังรูป



รูปที่ 3.16

จุด (1, 0) แบ่งบริเวณ D เป็น D_1 และ D_2 อินทิกรัลอาจจะเขียนได้เป็น

$$\int_0^1\int_{x-1}^0 f(x, y)dydx + \int_1^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx$$

ซึ่งจะต่างจากอินทิกรัลซ้อน $\int_0^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx$

ถ้าให้ F เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \in D_2 \\ -f(x) & \text{เมื่อ } x \in D_1 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \iint_D F &= \iint_{D_1} F + \iint_{D_2} F \\ &= -\iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f \\ &= -\int_0^1\int_{x-1}^0 f(x, y)dydx + \int_1^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx \\ &= \int_0^1\int_0^{x-1} f(x, y)dydx + \int_1^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx \\ &= \int_0^2\int_0^{x-1} f(x, y)dydx \end{aligned}$$

ดังนั้น อินทิกรัลซ้อนใด ๆ ซึ่งอยู่ในรูป $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$

อาจจะแทนได้ด้วยอินทิกรัลสองชั้นของบางฟังก์ชัน F บนบริเวณ D ซึ่งล้อมรอบด้วย $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, $x = a$, $x = b$

เมื่ออินทิกรัลซ้อนเปลี่ยนเป็นอินทิกรัลสองชั้น อาจจะเขียนได้ในรูปผลบวกของอินทิกรัลซ้อน ซึ่งเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตไปอยู่ในรูปของ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} g(x, y)dxdy$

ดังตัวอย่างจะเห็นว่า $\int_0^2 \int_0^{x-1} f(x, y)dydx = -\iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$

จะได้ว่า ถ้าเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต

$$\iint_{D_1} f = \int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x, y)dxdy$$

และ

$$\iint_{D_2} f = \int_0^1 \int_{y+1}^2 f(x, y)dxdy$$

ดังนั้น $\int_0^2 \int_0^{x-1} f(x, y)dydx = \int_0^1 \int_{y+1}^2 f(x, y)dxdy - \int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x, y)dxdy$

ทฤษฎีบทที่ 3.9 ให้ f มีความต่อเนื่องอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสอง หาค่าได้และมีความต่อเนื่องบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ซึ่งมีจุดยอดเป็น $P_1(a_1, b_1)$, $Q_1(a_2, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$ และ $Q_2(a_1, b_2)$ เมื่อ $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned} \iint_R f_{12} &= \iint_R \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dxdy \\ &= f(P_1) - f(Q_1) + f(P_2) - f(Q_2) \end{aligned}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \iint_R f_{12} &= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dydx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y=b_1}^{y=b_2} dx \\ &= \int_{a_1}^{a_2} f_1(x, b_2)dx - \int_{a_1}^{a_2} f_1(x, b_1)dx \\ &= \left[f(x, b_2)\right]_{x=a_1}^{x=a_2} - \left[f(x, b_1)\right]_{x=a_1}^{x=a_2} \end{aligned}$$

$$= f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - [f(a_2, b_1) - f(a_1, b_1)]$$
$$= f(P_1) \quad f(Q_1) + f(P_2) - f(Q_2)$$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\iint_D x^2ydxdy$ เมื่อ D เป็นบริเวณล้อมรอบด้วย
   1.1 เส้นตรง $y = x$ และพาราโบลา $y = x^2$
   1.2 เส้นตรง $y = x-2$ และพาราโบลา $x = 4-y^2$

2. จงเขียนบริเวณของการอินทิเกรตและหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น

$$\iint_D e^{(x+y)}dxdy \text{ เมื่อ } D = ((x, \ y)| \ |x| + |y| \leqslant 1\}$$

3. จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

   3.1 $\iint_R |x| + 3ydA$ เมื่อ $R = \{(x, y)| -2 \leqslant x \leqslant 2, - 1 4 \ y \leqslant 1\}$

   3.2 $\iint_R \sin(x-2y)dA$ เมื่อ $R = \{(x, \ y)|x \in [0, \ \pi], \ y \in |0, \ \frac{\pi}{2}|\}$

4. กำหนดให้ $f(x, y)$ มีค่าและมีความต่อเนื่องเมื่อ $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ ให้

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

จงพิสูจน์ว่า F มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

5. โดยทฤษฎีบทที่ 3.7 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น

$$\int_2^5 \int_{-1}^3 (x^2y + 5xy)dydx$$

3.5 การเปลี่ยนตัวแปร

ในการหาค่าอินทิกรัล บางครั้งเรามีความจำเป็นต้องเปลี่ยนตัวแปร เพื่อสะดวกในการหาค่า พิจารณาฟังก์ชันค่าจริงของ 1 ตัวแปรเพื่อเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบทที่ 3.10 ถ้า $\phi(x)$ หาค่าได้ และมีความต่อเนื่องบน $[c, d]$ เมื่อ $\phi(c) = a$ และ $\phi(d) = b$ ให้ f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน $\phi(t)$ สำหรับทุกค่าของ t ใน $[c, d]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt \qquad \text{.......(3.5.1)}$$

พิสูจน์ ให้ $F' = f$

และนิยาม G บน $[c, d]$

$$\begin{aligned}
\text{โดย} \qquad G(t) &= F(\phi(t)) \\
\text{ดังนั้น} \qquad G'(t) &= F'(\phi(t))\,\phi'(t) \\
&= f(\phi(t))\,\phi'(t) \\
\int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)dt &= \int_c^d G'(t)dt \\
&= \int_c^d G' \\
&= G(d) - G(c) \\
&= F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f
\end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร การเปลี่ยนตัวแปรจะอาศัย **ทฤษฎีการแปลง** (Transformation Theorem)

ทฤษฎีบทที่ 3.11 (Transformation Theorem for Double Integrals)

1.) T เป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างเซตเปิด M ในระนาบ uv และ $N = T(M)$ ในระนาบ xy นิยามฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้และมีความต่อเนื่อง $x = x(u, v)$ และ $y = y(u, v)$

2) ค่า Jacobian $J(u, v) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ บน M

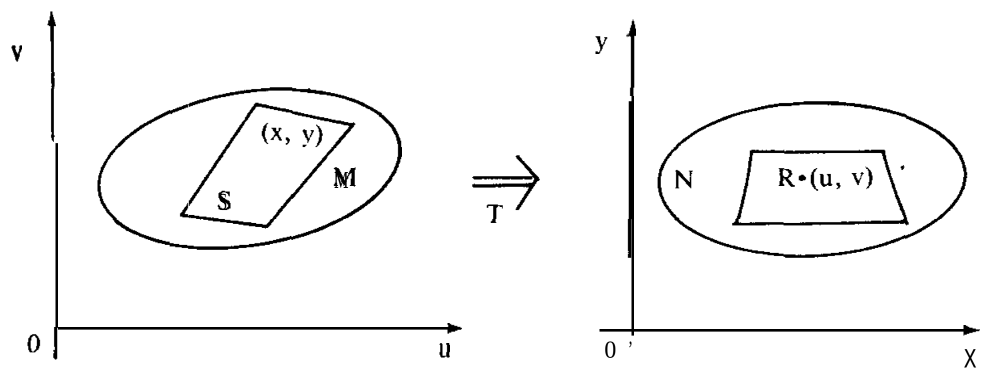
3) R และ S เป็นเซตที่มีขอบเขตบนระนาบ xy และระนาบ uv ตามลำดับ และ $\bar{R} \subset N, S \subset M$ ซึ่ง $R = T(S)$

4) f(x, y) นิยามบน R และ $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ดังนั้นจะได้

5) R มีพื้นที่ก็ต่อเมื่อ S มีพื้นที่

6) ถ้า R และ S มีพื้นที่ f จะอินทิเกรตได้บน R ก็ต่อเมื่อ $g|J|$ อินทิเกรตได้บน S

และ $$\iint_R f(x, y)dA = \iint_S g(u, v)|J(u, v)|dA \qquad \text{..........(3.5.2)}$$



รูปที่ 3.17

ข้อสังเกต $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = |J(u, v)|$ คือค่าสัมบูรณ์ของค่าดีเทอร์มิแนนต์ $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

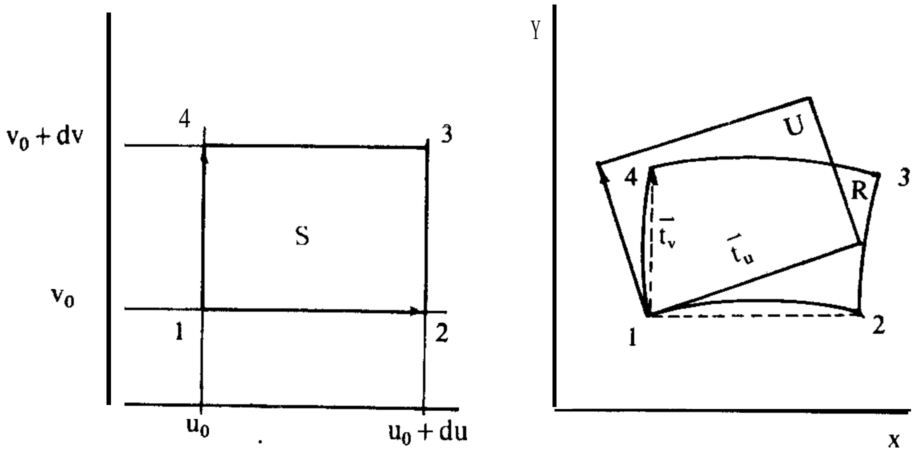
จะเห็นว่า เทอม $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ ในสมการ (3.5.2) นี้ เทียบกับเทอมใน (3.5.1) คือ $\phi'(t)$ นั่นเอง

พิจารณาการแปลง T ซึ่งเป็นฟังก์ชัน $T : S \to R^2$ นิยามโดย

$$T(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

ถ้า S เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดในระนาบ uv ซึ่งมีด้านขนานกับแกนโคออร์ดิเนตและมีจุดยอด (u_0, v_0) และ $(u_0 + du, v_0 + dv)$ ดังรูป

ถ้า R เป็นเซตซึ่ง $R = T(S)$ ในระนาบ xy ดังนั้น เวกเตอร์ซึ่งเชื่อมระหว่างจุดในระนาบ xy ซึ่งสอดคล้องกับจุด (u_0, v_0) และ $(u_0 + du, v_0)$ จะมีค่าเป็น $\big(x(u_0 + du, v_0) - x(u_0, v_0),$ $y(u_0 + du, v_0) - y(u_0, v_0)\big)$



รูปที่ 3.18

โดยกฎของตัวกลาง (Law of the mean) จะได้

$$\left(x_1(u_0 + \theta_1 du, v_0)du, \quad y_1(u_0 + \theta_2 du, v_0)du\right)$$

เมื่อ $0 < \theta_1 < 1$ และ $0 < \theta_2 < 1$

เวกเตอร์นี้ก็คือ เวกเตอร์สัมผัส $\vec{t}_u$ ซึ่ง

$$\vec{t}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du\right) \text{ ที่จุด } (u_{,}, v_0) \qquad \text{......(3.5.3)}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับเวกเตอร์ซึ่งเชื่อมจุด (u_0, v_0) และ $(u_0, v_0 + dv)$ เวกเตอร์สัมผัสคือ $\vec{t}_v$ ซึ่ง $\vec{t}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)$ ที่จุด (u_0, v_0) .... (3.5.4)

เซต $R = T(S)$ จะมีค่าประมาณรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน U ซึ่งหาค่าได้จากเวกเตอร์ (3.5.2), (3.5.4) ดังนั้น พื้นที่ของ U คือ A(U) มีค่าเท่ากับ

ค่าสัมบูรณ์ของ $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$

ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านั่นเอง

$$dA = |J(u, v)| dudv$$

ดังนั้น $$\iint_R f(x, y)dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \, |J(u, v)| dudv$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\iint_R \sqrt{x+y}\, dA$ เมื่อ R เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งประกอบด้วยด้าน

$x+y = 0,\ x+y = 1,\ 2x-3y = 0,\ 2x-3y = 4$

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร โดยการสมมติตัวแปรใหม่

ให้

$$u = x+y$$

$$v = 2x-3y$$

$$\therefore\ x = \frac{3u+v}{5}$$

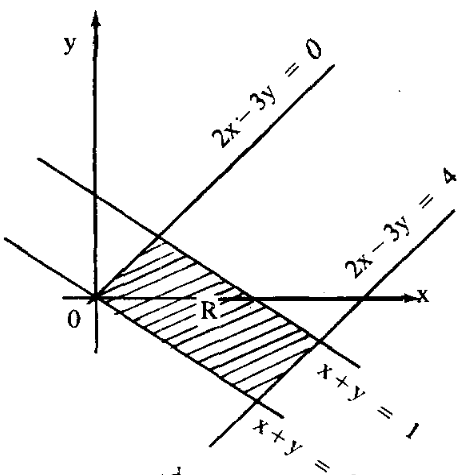
$$y = \frac{2u-v}{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{3}{5},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{5}$$

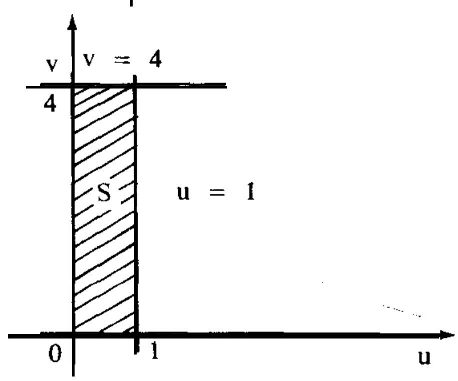
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2}{5},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$



รูปที่ 3.19



รูปที่ 3.20

จะเห็นว่า ภาพของเส้นตรง $x+y = 0$ ในระนาบ xy คือเส้นตรง $u = 0$ ในระนาบ uv, ภาพของเส้นตรง $x+y = 1$ ในระนาบ xy คือเส้นตรง $u = 1$ ในระนาบ uv, ภาพของเส้นตรง $2x-3y = 0$ และ $2x-3y = 4$ ในระนาบ xy คือเส้นตรง $v = 0$ และ $v = 4$ ในระนาบ uv นั่นเอง

ดังนั้น ภาพของจุดภายใน R จะเป็นจุดภายในของ S นั่นเอง

$$\therefore \iint_R \sqrt{x+y}\, dxdy = \iint_S \sqrt{u} \left| -\frac{1}{5} \right| dudv$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^4\int_0^1 \sqrt{u}\, dudv$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^4 \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \frac{2}{15}\int_0^4 dv$$

$$= \frac{8}{15} \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นของ $e^{\frac{y-x}{y+x}}$ บน R เมื่อ R เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งล้อมรอบด้วยแกนพิกัดทั้งสองและเส้นตรง $x+y = 1$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน $e^{\frac{y-x}{y+x}}$ นั้น ไม่ว่าจะอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x หรือ y ก่อนก็ตาม จะทำได้ยาก จึงใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $u = y-x$

$v = y+x$

และจะได้ $x = \frac{v-u}{2}$

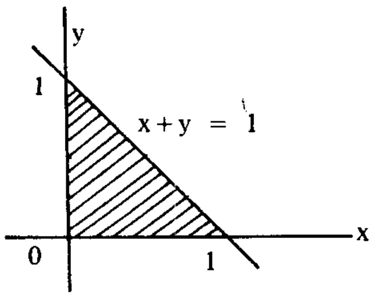
$y = \frac{v+u}{2}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

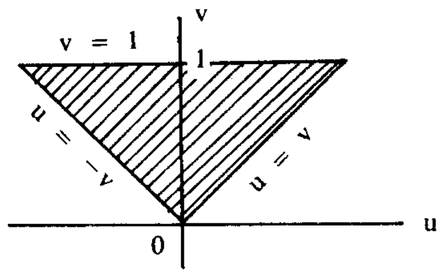
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{ah\quad v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$



รูปที่ 3.21



รูปที่ 3.22

จะเห็นว่าบริเวณ R ล้อมรอบด้วย $x+y = 1$, $x = 0$ และ $y = 0$ บริเวณ S จะล้อมรอบด้วยเส้นตรง $v = 1$, $u = v$ และ $u = -v$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบทจะได้

$$\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dxdy = \iint\limits_S e^{\frac{u}{v}} \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left| ve^{\frac{u}{v}} \right|_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[e - e^{-1}\right]dv$$

$$= \frac{1}{2}\left[e - e^{-1}\right] \left|\frac{v^2}{2}\right|_{v=0}^{v=1}$$

$$= \frac{1}{4}(e - e^{-1})$$

$$= \frac{1}{2}\sin h1$$

3.6 อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ปัญหาต่าง ๆ ในการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นนั้น อาศัยการเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{..........} (3.6.1)$$

เมื่อ $r > 0$ และ $\theta_0 \leqslant \theta < \theta_0 + 2\pi$ เมื่อ $(x, y) \neq (0, 0)$

และ $r = 0, \ \theta = 0$ เมื่อ $(x, y) = (0, 0)$

จะเห็นว่าถ้าเปลี่ยน (x, y) ไปเป็น (r, θ) แล้ว เทอมต่าง ๆ ในรูป $x^2 + y^2$ จะเปลี่ยนเป็น r^2 ซึ่งสะดวกในการอินทิเกรต

ให้ $\quad f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

เมื่อ P เป็นจุดที่มีพิกัด (x, y) ในระบบพิกัดฉาก จะได้ (r, θ) เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว และหา r, θ ได้จาก (3.6.1) โดยที่

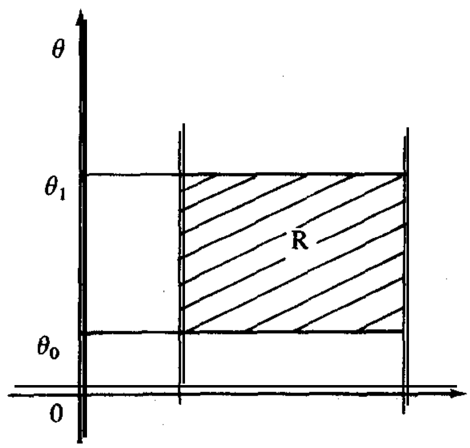
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

และ $\quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ ซึ่งเป็นมุมที่ $\overline{OP}$ ทำกับแกน x ทางบวก

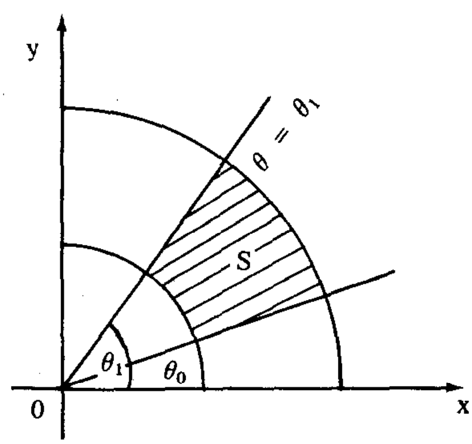
ถ้าให้ $\quad R = \{(r, \theta) | r_0 \leqslant r \leqslant r_1, \ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\}$ เมื่อ $r_0 \geqslant 0$

และ $\quad S = \{(x, y) | x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ (r, \theta) \in R\}$

ดังนั้น ภาพของ R คือสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูป



รูปที่ 3.23



รูปที่ 3.24

จะเห็นว่า ภาพของเส้นตรง $r = r_0$ ภายใต้ f คือวงกลม $x^2+y^2 = r_0^2$ ในระนาบ xy

และภาพของเส้นตรง $r = r_1$ ภายใต้ f คือวงกลม $x^2+y^2 = r_1^2$ ในระนาบ xy

ภาพของเส้นตรง $\theta = \theta_0$ และ $\theta = \theta_1$ ภายใต้ f คือเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและทำมุม θ_0 และ θ_1 กับแกน x ทางบวกในระนาบ xy

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และ

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos e & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \neq 0 \quad \text{เมื่อ } r > 0$$

$$\iint_S f(x, y)dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, drd\theta$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dydx$

วิธีทำ ให้

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

บริเวณที่ต้องการอินทิเกรตอยู่ในจตุภาคที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วยแกนพิกัดและวงกลม $x^2+y^2 = 1$

ดังนั้น $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dydx = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}d\theta$$

$$= \frac{1}{4}[\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dydx$

วิธีทำ ให้

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2$$

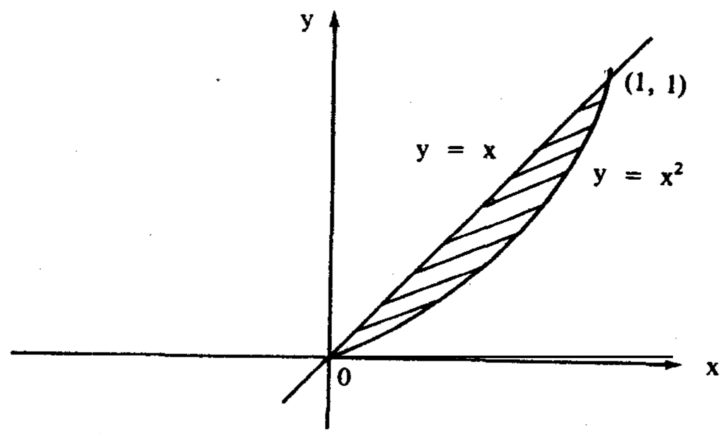
เส้นตรง $y = x$ มีสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น $\theta = \frac{\pi}{4}$

เส้นโค้ง $y = x^2$ จะได้สมการในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น

$$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$$

$$r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

บริเวณที่ต้องการอินทิเกรต คือ ส่วนที่แรเงา



รูปที่ 3.25

$$S = \left\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin e}{\cos^2\theta}} r^{-1} \cdot r\, drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d\cos\theta}{-\cos^2\theta}$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

หมายเหตุ จะเห็นว่าในการเปลี่ยนตัวแปรไปสู่ระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น ในการหาลิมิตของการอินทิเกรตสำหรับ r และ θ นั้น ไม่จำเป็นต้องเขียนรูปในระนาบ $r\theta$ แต่สามารถหาได้จากบริเวณในระนาบ xy นั่นเอง

ถ้า R เป็นบริเวณในระนาบ xy ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้งที่มีสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น $r = f(\theta)$ และ $r = g(\theta)$ เมื่อ $f(\theta) \leqslant g(\theta)$ และ $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ ดังนั้น

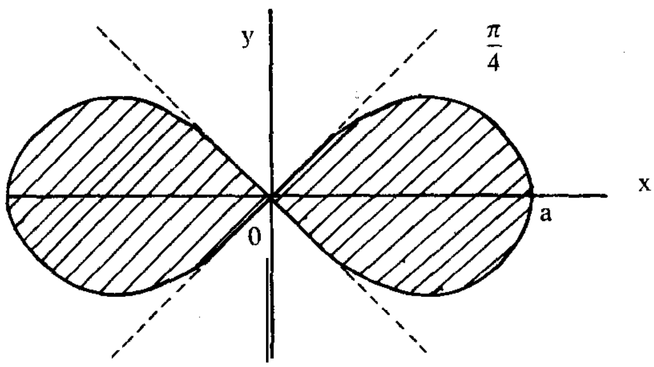
พื้นที่ของ $R = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} r\,dr\,d\theta$

ถ้า $f(x, y) \geqslant 0$ ทุกค่า $(x, y) \in R$ จะได้

ปริมาตรภายใต้ผิว f บน R คือ $\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบ xy ซึ่งล้อมรอบด้วย $r^2 = a^2\cos 2\theta$

วิธีทำ บริเวณที่ต้องการอินทิเกรตในระนาบ xy แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 3.26

$$\text{พื้นที่ที่ต้องการ} = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

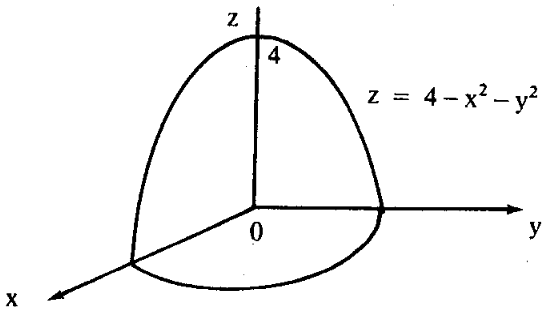
$$= 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\theta d\theta$$

$$= a^2\Big[\sin 2\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}$$

$$= a^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาปริมาตร v ของรูปทรงตันซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลอยด์ $z = 4-x^2-y^2$ และระนาบ xy

วิธีทำ บริเวณที่ต้องการอินทิเกรตแสดงได้ดังรูป

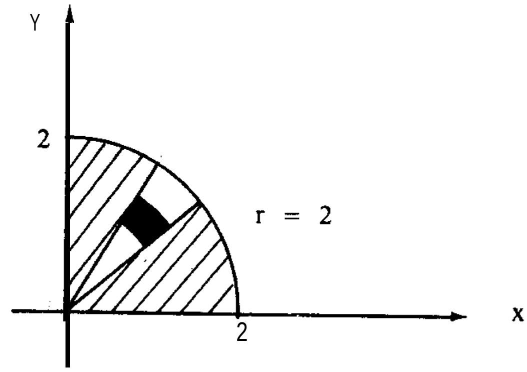


รูปที่ 3.27

ให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

ดังนั้น สมการพาราโบลอยด์ $z = 4-r^2$

บริเวณ R ล้อมรอบด้วยแกนพิกัดและ $\frac{1}{4}$ ของวงกลมซึ่งมีรัศมี 2 ดังรูป



รูปที่ 3.28

ดังนั้น $f(r, \theta) = 4-r^2$

$$v = 4\iint_R (4-r^2)dA$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4-r^2)\cdot r dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \left| 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\theta$$

$$= 4\int_0^{n/2} 4d\theta = 160\int_0^{n/2}$$

$$= 8\pi$$

แบบฝึกหัดที่ 3.3

1. จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นโดยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม

   1. $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$ เมื่อ R เป็นบริเวณทีล้อมรอบด้วย $x^2-y^2 = 1$, $x^2-y^2 = 9$, $xy = 2$ และ $xy = 4$

   2. $\iint_R (x+y)^2 dA$ เมื่อ R เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานจุดยอด (1, 0), (3, 1), (2, 2) และ (0, 1) โดยให้ $u = x+y$, $v = x-2y$

   3. $\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $x+y = 1, x = 0, y = 0$

   4. $\int_0^1\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$ โดยให้ $x = u, y = uv$

5. โดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $x+y = u$, $y = uv$ จงแสดงว่า

$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{y/x+y}\, dydx = \frac{e-1}{2}$$

6. จงแปลงแต่ละอินทิกรัลให้เป็นอินทิกรัลในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   6.1 $\int_0^1\int_0^x f(x, y)dydx$

   6.2 $\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dydx$

6.3 $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{3y-y^2}}^{\sqrt{3y-y^2}} f(x, y)dxdy$

7. จงหาพื้นที่ของบริเวณภายในวงกลม $r = 2a\cos\theta$

8. จงหาพื้นที่ของบริเวณภายใน $r = a(1+\sin\theta)$

9. จงหาปริมาตรโดยใช้อินทิกรัลซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วภายในทรงกลม $x^2+y^2+z^2 = a^2$ และทรงกระบอก $r = a\cos\theta$

การประยุกต์ของแคลคูลัสในทางฟิสิกส์จะเป็นการคำนวณหามวลและโมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุ ซึ่งก็อาจจะพิจารณาได้จากอินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้น ในการคำนวณหาอินทิกรัลสามชั้น ก็จะพิจารณาเช่นเดียวกับอินทิกรัลสองชั้น คือ จะกล่าวถึงการหาค่าของอินทิกรัลซ้อน

3.7 อินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันสามตัวแปร

ในการหาอินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันสองตัวแปร จะอินทิเกรตเทียบกับตัวแปรครั้งละหนึ่งตัว โดยถือว่าตัวแปรที่เหลือเป็นค่าคงตัว สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน

นิยาม เซต R เรียกว่า **โพรเจกชัน** (projection) ของเซต D บนระนาบ xy ถ้า R เป็นเซตของจุดในระนาบ xy ซึ่งทำให้ได้ว่า $D = \{(x, y, z) | (x, y) \in R$ และ $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$ เมื่อ z_1 และ z_2 นิยามได้บน R

ถ้าบริเวณ D ฉาย (project) ไปยังบริเวณ R ในระนาบ xy และ D เป็นบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิว $z = z_2(x, y)$ และ $z = z_1(x, y)$ เมื่อ $(x, y) \in R$ ดังรูป 3.29

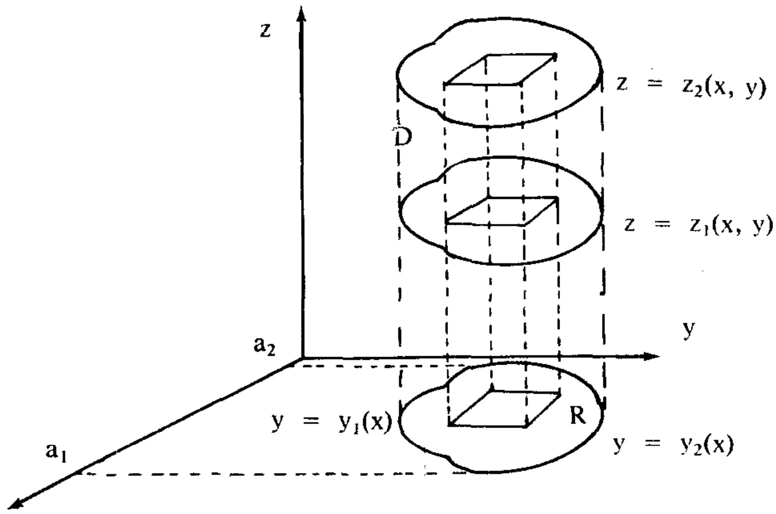
ให้ F เป็นฟังก์ชันบน R ซึ่งนิยามโดย

$$F(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

เมื่ออินทิกรัลหาค่าได้ (ในการหาค่าถือว่า x, y เป็นค่าคงตัว) เราจะกล่าวว่า **อินทิกรัลซ้อน** ของ f หาค่าได้บน D และมีค่าเท่ากับอินทิกรัลซ้อนของ F บน R

ถ้า $R = \{(x, y) | a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$

อินทิกรัลซ้อนของ f บน D $= \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$ .... (3.7.1)



รูปที่ 3.29

ถ้า $R = \{(x, y) | b_1 \leqslant y \leqslant b_2,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$

อินทิกรัลซ้อนของ f บน D $= \int_{b_1}^{b_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$ .... (3.7.2)

ข้อสังเกต

1) ถ้า $f(x, y, z) = 1$

อินทิกรัลซ้อนของ f บน D $= \iint_R |z_2(x, y) - z_1(x, y)|\,dA$

ซึ่งคือ ปริมาตรรูปทรงตันซึ่งอยู่ระหว่างกราฟ z_2 และ z_1 บน R นั่นเอง

2) ถ้า D เป็นเซตของ (x, y, z) ซึ่ง $(x, y) \in R$ และ $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$ ดังนั้น D มีปริมาตรก็ต่อเมื่อ f(x, y) อินทิเกรตได้บน R และ

ปริมาตรของ D $= \iint_R f(x, y)\,dA$

ในทำนองเดียวกัน สามารถนิยามโพรเจกชันของ D บนระนาบ yz ดังนี้

นิยาม เซต S เรียกว่า**โพรเจกชัน**ของเซต D บนระนาบ yz ถ้า S เป็นเซตของจุดในระนาบ yz ซึ่งทำให้ได้ว่า $D = \{(x, y, z) | (y, z) \in S, x_1(y, z) \leqslant x \leqslant x_2(y, z)\}$ เมื่อ x_1, x_2 นิยามได้บน S

อินทิกรัลซ้อนของ f บน D มีค่าเท่ากับอินทิกรัลซ้อนของ

$$F(y, z) = \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z)dx \quad \text{บน } S$$

ถ้า $S = \{(y, z) | b_1 \leqslant y \leqslant b_2, z_1(y) \leqslant z \leqslant z_2(y)\}$

$$\text{อินทิกรัลซ้อนของ } f \text{ บน } D = \int_{b_1}^{b_2} \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z)dxdzdy$$

หรืออาจจะสลับลำดับการอินทิเกรตบน S ได้

ถ้า $S = \{(y, z) | c_1 \leqslant z \leqslant c_2, \quad y_1(z) \leqslant y \leqslant y \leqslant y_2(z)\}$

$$\text{อินทิกรัลซ้อนของ } f \text{ บน } D = \int_{c_1}^{c_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z)dxdydz$$

เช่นเดียวกับทั้งสองกรณี จะเรียก T ว่าโพรเจกชันของ D บนระนาบ xz ถ้า T เป็นเซตของจุดในระนาบ xz ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$D = \{(x, y, z) | (x, z) \in T, y_1(x, z) \leqslant y \leqslant y_2(x, z)\}$$

เมื่อ $y_1(x, z)$, $y_2(x, z)$ นิยามได้บน T

และอินทิกรัลซ้อนของ f บน D มีค่าเท่ากับอินทิกรัลซ้อนของ

$$F(x, z) = \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z)dy \quad \text{บน} T$$

จะได้อินทิกรัลซ้อนของ f บน D มี 2 รูป คือ

$$\int_{c_1}^{c_2} \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z)dydxdz$$

เมื่อ $T = \{(x, z) | c_1 \leqslant z \leqslant c_2, x_1(z) \leqslant x \leqslant x_2(z)\}$

และ $\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z)dydzdx$

เมื่อ $T = \{(x, z) | a_1 \leqslant x \leqslant a_2, z_1(x) \leqslant z \leqslant z_2(x)\}$

และถ้า $f(x, y, z) = 1$ ค่าอินทิกรัลซ้อนของ f บน D คือปริมาตรของ D

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x+xy)dzdxdy$

วิธีทำ $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x+xy)dzdxdy = \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\left[(x+xy)z\right]_{z=0}^{z=\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

$$= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x+xy)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^2\left(\frac{1+y}{3}\right)\left[(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$= \int_0^2\frac{(1+y)}{3}(8-y^3)dy$$

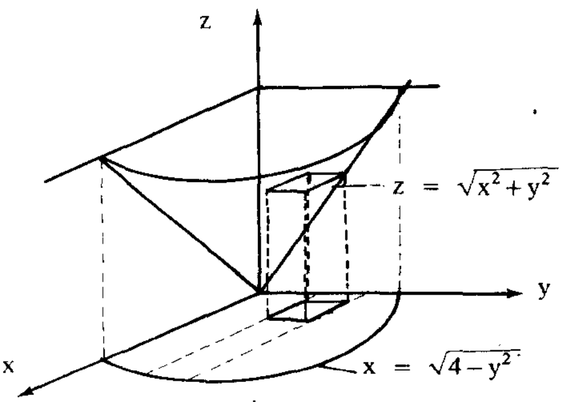
$$= \frac{16}{4}+\frac{32}{5} = \frac{52}{3}$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าบริเวณของการอินทิเกรต D คือ

$\{(x, y, z)|0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$

และโพรเจกชันของ D บนระนาบ xy คือ

$\{(x, y)|0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}\}$ จะเห็นได้ดังรูป

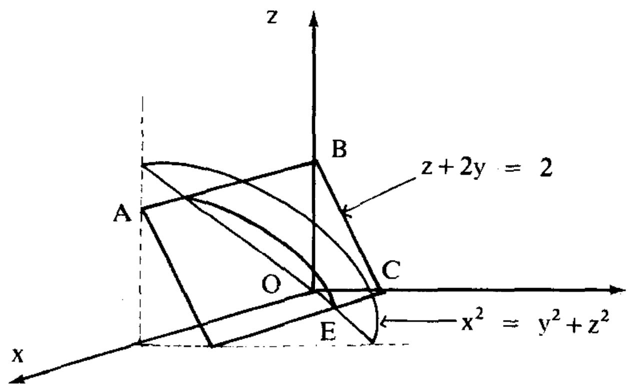


รูปที่ 3.30

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนอินทิกรัลซ้อนของปริมาตรของบริเวณในอัฐภาค (octant) ที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $z+2y = 2$ และ $x^2 = y^2+z^2$

วิธีทำ ปริมาตรที่ต้องการหา คือ $V = \iiint_D dV$

เมื่อ D คือบริเวณที่กำหนดให้คือรูป OABCE



รูปที่ 3.31

เพื่อที่จะไม่ต้องแบ่งบริเวณการอินทิเกรตออกเป็นสองส่วน จึงเลือกที่จะอินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน

วิธีที่ 1 โพรเจกชันของเซต D บนระนาบ yz คือเซต S เมื่อ S คือรูปสามเหลี่ยม OBC ซึ่งประกอบด้วยเส้นตรง $z+2y = 2$, $z = 0$ และ $y = 0$

$$S = \left\{(y, z)|0 \leqslant z \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{z-2}{2}\right\}$$

และ
$$D = \left\{(x, y, z)|0 \leqslant z \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \frac{z-2}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y^2+z^2}\right\}$$

$$V = \int_0^2\int_0^{\frac{z-2}{2}}\int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} dxdydz$$

วิธีที่ 2 สลับลำดับของการอินทิเกรตของวิธีที่ 1 ดังนั้นจะได้เซต S

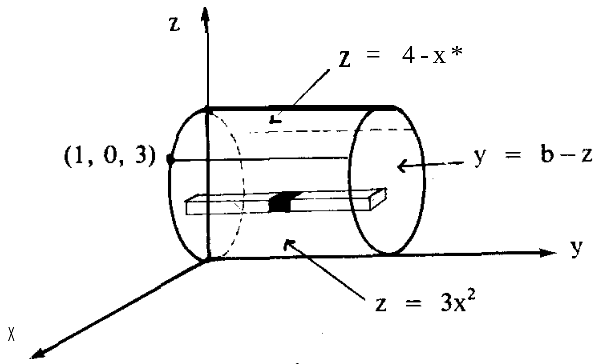
$$S = \{(y, z)|0 \leqslant y\ 4\ 1, 0 \leqslant z \leqslant 2-2y\}$$

และ
$$D = \{(x, Y.\ z)|0\ 6\ Y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2-2y, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y^2+z^2}\}$$

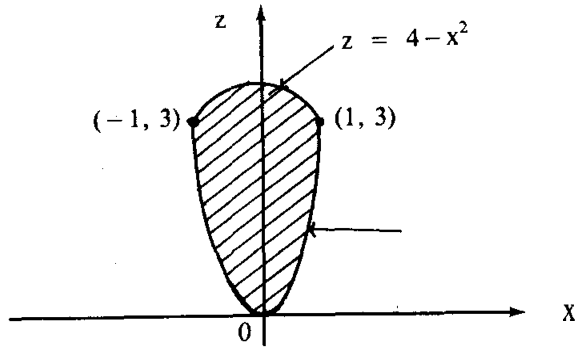
ดังนั้น
$$V = \int_0^1\int_0^{2-2y}\int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} dxdzdy$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาปริมาตรของบริเวณ D ซึ่งล้อมรอบด้วยกราฟ $z = 3x^2$, $z = 4-x^2$ $y = 0$ และ $z+y = 6$

วิธีทำ จะเห็นว่าบริเวณ D อยู่ใต้ไซลินเดอร์ $z = 4-x^2$ เหนือ $z = 3x^2$ ทางขวาของระนาบ xz และซ้ายมือของระนาบ $z+y = 6$ ดังรูป 3.32



รูปที่ 3.32



รูปที่ 3.33

โพรเจกชันของ D บน xz คือเซต S ดังรูปที่ 3.33

ดังนั้น

$$V = \iiint_D dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_{0}^{6-z} dydzdx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} (6-z)dzdx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left| 6z - \frac{1}{2}z^2 \right|_{3x^2}^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (16 - 20x^2 + 4x^4)dx$$

$$= \frac{304}{15}$$

แบบฝึกหัดที่ 3.4

1. จงหาค่าของอินทิกรัลซ้อน $\int_0^1\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz\,dz\,dy\,dx$

2. จงเขียนกราฟของบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วย $x+y+z = a(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$ และ $z = 0$ และจงหาค่าของ

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยพาราโบลิกไซลันเดอร์ $z = 4-x^2$ และระนาบ $x = 0, y = 0, y = 6, z = 0$

4. ถ้า D เป็นบริเวณปิดซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ และ $x-y-z = 0$ จงหาค่าของ $\iiint_D x^3y^2z\,dv$ มา 3 วิธี ในเทอมของอินทิกรัลซ้อน

5. จงเขียนอินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชัน f บนเซต D ในแบบต่าง ๆ 6 แบบ เมื่อ D เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยระนาบ $z = 0$, $z = x$ และพื้นผิว $y^2 = 4-2x$

3.8 อินทิกรัลสามชั้น (Triple integrals)

อินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนแท่งสี่เหลี่ยมตัน R นิยามได้ในทำนองเดียวกับอินทิกรัลสองชั้นบนสี่เหลี่ยมผืนผ้า R โดยทั่วไปก็จะได้อินทิกรัลสามชั้นบนเซตที่มีขอบเขต D สิ่งที่สำคัญที่สรุปได้คือ

1) อินทิกรัลของ $f(x, y, z)$ บน D ก็จะเหมือนกับอินทิกรัลของฟังก์ชัน f_D บน R ซึ่ง $D \subseteq R$ ซึ่งนิยามได้ในเทอมของตาราง N ของระนาบซึ่งขนานกับระนาบโคออร์ดิเนต ซึ่งจะแบ่ง R ออกเป็นสี่เหลี่ยมตันแท่งเล็ก ๆ R_{ij} ซึ่งมีปริมาตร $V(R_{ij})$ และจะได้อินทิกรัลสามชั้นของ f บน D คือ

$$\begin{aligned}\iiint_D f\,dV &= \iiint_R f_D\,dV \\ &= \lim_{\|N\|\to 0} \Sigma f_D(p_{ij})\ V(R_{ij})\end{aligned}$$

2) ปริมาตรของ D ถ้าหาได้จะนิยามได้เป็น

$$V(D) = \iiint_D 1dV$$

ทฤษฎีต่าง ๆ ก็จะได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 3.12 (Fundamental Theorem for Triple Integrals)

ถ้า $f(x, y, z)$ นิยามบนเซตที่มีขอบเขต D ซึ่งประกอบด้วยจุด (x, y, z) ซึ่ง $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ และ $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$ แล้ว

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \int_{a_1}^{a_2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dzdydx$$

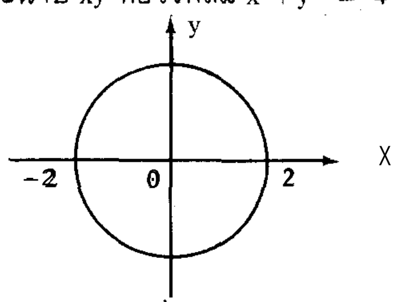
เมื่ออินทิกรัลหาค่าได้

3) ถ้า S เป็นเซตที่มีขอบเขตซึ่งมีพื้นที่ในระนาบ xy และ $f(x, y, z)$ นิยามได้บนเซตที่มีขอบเขต D ซึ่งประกอบด้วยจุด (x, y, z) ซึ่ง $(x, y) \in S$ และ $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$ แล้ว

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \iint_S \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz\right]dA$$

ตัวอย่าง จงเขียนอินทิกรัลสามชั้น $\iiint_D f(x, y, z)dV$ ในรูปของอินทิกรัลซ้อน และหาค่าของปริมาตรของ D เมื่อ $f(x, y, z) = 1$ เมื่อ D เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และ $2z = 12 - x^2 - y^2$

วิธีทำ โพรเจกชันของ D บนระนาบ xy คือวงกลม $x^2 + y^2 = 4$



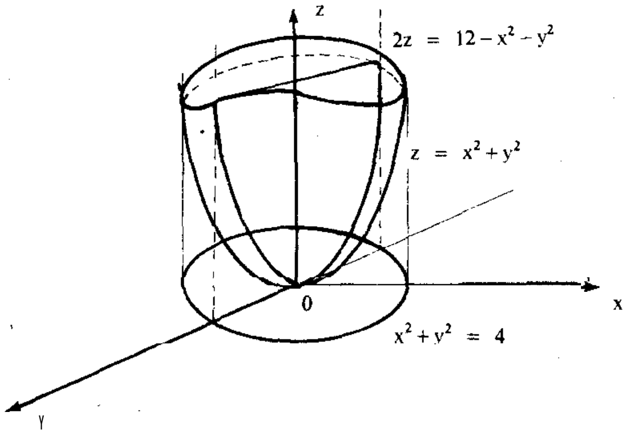
รูปที่ 3.34

$$R = \{(x, y) | -2 \leqslant x \leqslant 2, -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$$

$$D = \left\{(x, y, z) | -2 \leqslant x \leqslant 2, -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \frac{12 - x^2 - y^2}{2}\right\}$$

จะได้อินทิกรัล

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\frac{12-x^2-y^2}{2}} f(x, y, z)dzdydx$$



รูปที่ 3.35

ถ้า $f(x, y, z) = 1$ จะได้

$$v = 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{12-3(x^2+y^2)}{2}dydx$$

$$= 6\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 4-(x^2+y^2)dydx$$

$$= 4\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}dx$$

$$= 12\pi$$

แบบฝึกหัดที่ 3.5

1. จงเขียนอินทิกรัลสามชั้น $\iiint_D f(x, y, z)dV$ ในรูปของอินทิกรัลซ้อน เมื่อ D เป็นบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $z = 7$ และพาราโบลอยด์ $z = 23 - x^2 - y^2$
2. ถ้า $f(x, y, z) = 1$ จงหาปริมาตรของ W ในข้อ 1

3. ถ้า $f(x, y, z) = z^2$ จงหาอินทิกรัลสามชั้นของ f บนบริเวณ D เมื่อ D ล้อมรอบด้วยผิว $z = 0, x^2+z = 1, y^2+z = 1$

4. จงหาปริมาตรของบริเวณซึ่งล้อมรอบด้วย $z = x^2+y^2$ และ $z = 2x$

5. ในการเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากไปสู่ระบบพิกัดทรงกระบอก

ให้
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

จงแสดงว่า $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$

6. จงใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรในข้อ 5 หาค่าของ $\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ เมื่อ S เป็นรูปทรงตัน ซึ่งล้อมรอบด้วย $x^2+y^2 = 2x$ และกรวย $z^2 = x^2+y^2$

บทสรุป

อินทิกรัลสองชั้นซึ่งนิยามบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R จะได้

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|N\|\to 0} \Sigma f(p_{ij})\,A(R_{ij})$$

ถ้า D เป็นเซตที่มีขอบเขตซึ่ง $D \subsetneq R$, $f(p)$ นิยามได้บน D

และ
$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{ถ้า } p \in D \\ 0 & \text{ถ้า } p \notin D \end{cases}$$

จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บน D ก็ต่อเมื่อ F อินทิเกรตได้บน R และ

$$\iint_D f = \iint_R F$$

ทฤษฎีบท ถ้า f มีความต่อเนื่องบนสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด R แล้ว $\iint_R f$ หาค่าได้

การหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น จะอาศัยอินทิกรัลซ้อนโดยทฤษฎีบท fubini's theorem for rectangles และถึงแม้ว่าอินทิกรัลสองชั้นจะคำนวณได้จากอินทิกรัลซ้อน และก็มีข้อแตกต่างกัน

การเปลี่ยนตัวแปรจาก (x, y) ใด ๆ เป็น (u, v) จะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv$$

เมื่อ $|J(u, v)|$ คือ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

และการเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, rdrdv$$

สำหรับอินทิกรัลสามชั้นก็ทำในลักษณะคล้ายกับอินทิกรัลสองชั้น ในการหาค่าอินทิกรัลซ้อนนั้น ใช้วิธีโพรเจกชันบนระนาบ แล้วหาค่าอินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันสองตัวแปร

แบบฝึกหัดระคนบทที่ 3

1. กำหนดให้ f นิยามได้บนเซต D $= \{(x, y) | x, y \in [0, 1]\}$ โดย

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 3y & \text{ถ้า } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \text{ หรือ } x = 1 \end{cases}$$

ฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บนเซต D หรือไม่ อธิบาย

2. จงหาค่าของ

2.1 $\iint_R y^2 e^{(x+y)}$ เมื่อ $R = \{(x, y) | x \in [-1, 1], y \in [0, 1]\}$

2.2 $\iint_R |y| - 2x$ เมื่อ $R = \{(x, y) | x \in [-2, 2], y \in [-1, 1]\}$

3. กำหนดให้ f นิยามได้บน $R = \{(x, y) | x, y \in [0, 1]\}$ โดย

$$f(x, y) = \begin{matrix} 1 & \text{ถ้า } x \in Q \cap [0, 1] \\ 2y & \text{ถ้า } x \in (R - Q) \cap [(0, 1] \end{matrix}$$

จงแสดงว่า

3.1 f อินทิเกรตไม่ได้บน R

3.2 $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dydx$ หาค่าได้ แต่ $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dxdy$ หาค่าไม่ได้

4. จงหาค่าอินทิกรัลโดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ $\iint_R \ln(x^2 + y^2 + 1)$ เมื่อ R เป็นบริเวณสามเหลี่ยม $0 \leqslant y \leqslant x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

5. จงหาปริมาตรของบริเวณที่เป็นส่วนร่วมกันของรูปทรงกระบอก $x^2 + y^2 = a^2$ และ $y^2 + z^2 = a^2$
