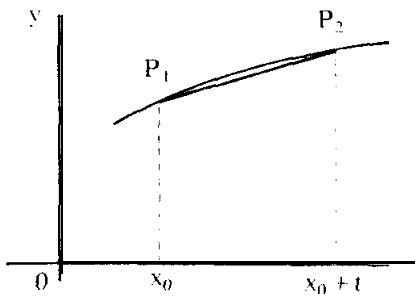
บทที่ 2
อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

การศึกษาคณิตศาสตร์ในเชิงวิเคราะห์นั้น เรื่องสำคัญที่จะศึกษาถึงคือ การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรต ดังนั้น ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปร โดยเฉพาะอย่างยิ่งอนุพันธ์ระบุทิศทาง อนุพันธ์ย่อย ตลอดจนอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ เช่น ฟังก์ชันประกอบ ฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยนัย เป็นต้น นอกจากนี้ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ก็มีประโยชน์มากในทางประยุกต์

จะเห็นว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรนั้น นิยามจากเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) และจะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงที่ x_0 คือ

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด P_1 เข้าใกล้ P_2 ตามเส้นโค้ง ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1

เส้นตัด P_1P_2 จะเคลื่อนเข้าสู่ตำแหน่งลิมิต การเลื่อนจุด P_1 เข้าใกล้ P_2 นั้น ไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง

สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปรจะยุ่งยากขึ้น เนื่องจากสามารถเลื่อนจุด P_1 ได้หลายทิศทาง ดังนั้น ในตอนแรกจะศึกษาถึงอนุพันธ์ระบุทิศทาง จะเห็นว่าในปริภูมิ 1 มิติ จะมี 2 ทิศทางคือซ้ายและขวา ในปริภูมิ 2 มิติ การกำหนดทิศทางจะใช้มุมเป็นเครื่องวัด ในปริภูมิ 3 มิติ และในปริภูมิ n มิติใด ๆ จะอธิบายทิศทางการเคลื่อนที่ด้วยการกำหนด v ให้เมื่อ $\|v\| = 1$

2.1 อนุพันธ์ระบุทิศทาง (Directional derivatives)

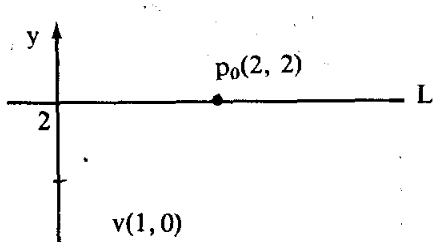
ใน R^n การกำหนดทิศทางจะอาศัยเวกเตอร์ v ซึ่ง $\|v\| = 1$

พิจารณา $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$ และ $p_0 \in Int(D)$, v เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{op_0}$

ดังนั้น เส้นตรงซึ่งผ่าน p_0 ในทิศทาง v คือ

$$\{p \in R^n | p = p_0 + tv, t \in R\}$$

ตัวอย่างเช่น ใน R^2 ถ้าให้ $p_0 = (2, 2)$ และ $v = (1, 0)$ ดังนั้น เส้นตรงซึ่งผ่าน p_0 ในทิศทาง v จะอยู่ในรูป $\{(2+t, 2) | t \in R\}$ ซึ่งจะได้เส้นตรงในแนวนอน L ซึ่งผ่านจุด (2, 2) ดังรูป 2.2

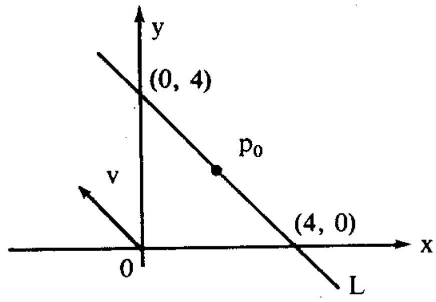


รูปที่ 2.2

แต่ถ้าเลือก $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ สำหรับ $p = (x, y)$ บนเส้นตรงซึ่งผ่าน p_0 ในทิศทาง v จะได้ว่า x, y จะต้องคล้องตามสมการ

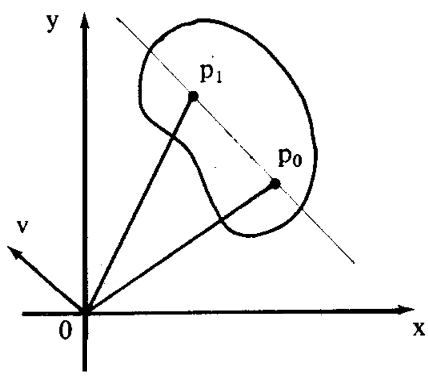
$$x = 2 - \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y = 2 + \frac{t}{\sqrt{2}} \text{ เมื่อ } t \in R$$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่าน p_0 ในทิศทาง v จะมีกราฟเป็น $y = 4-x$ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3

สำหรับใน R^n จะเห็นว่า จุด $p_1 = p_0 + tv$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน p_0 และขนานกับเวกเตอร์ v ดังนั้น ถ้าต้องการเลื่อนจุดจากจุด p_0 "ในทิศทาง v" ก็คือเลื่อนจุดจากจุด p_0 ไปตามส่วนของเส้นตรงที่ผ่าน p_1 และขนานกับเวกเตอร์ v นั่นเอง



รูปที่ 2.4

เนื่องจาก $p_0 \in Int(D)$ ดังนั้น มีค่า $r > 0$ ซึ่งถ้า $|t| < r$ แล้ว $p_0 \in D$ ดังนั้น สามารถหาค่า $f(p_1)$ ได้

พิจารณาตาม $f(p_1) - f(p_0) = f(p_0 + tv) - f(p_0)$ คือ ความเปลี่ยนแปลงของ f จาก p_0 ไปยัง p_1

$\frac{f(p_1) - f(p_0)}{t}$ คือ ค่าเฉลี่ยของความเปลี่ยนแปลงของ f จาก p_0 ไปยัง p_1 ในทิศทาง v

$\therefore$ **อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่ p_0 ในทิศทาง v** $= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1) - f(p_0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$$

นิยาม ถ้า $f : D \to R$, $D \subseteq R^n$, $p_0 \in Int(D)$, $v \in R^n$ และ $\|v\| = 1$

ถ้า $\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$ หาค่าได้ จะกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ระบุทิศทาง ที่ p_0 ในทิศทาง** v และใช้สัญลักษณ์ $(D_v f)(p_0)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x, y) = 2x - xy$, $p_0 = (0, 3)$ และ $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

จงหา $(D_v f)(p_0)$

วิธีทำ

$$p_0 + tv = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f(p_0 + tv) = \frac{2t}{\sqrt{2}} - \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(3 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$(D_v f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 0}{t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ข้อสังเกต 1. $(D_{-v} f)(p_0) = -(D_v f)(p_0)$

พิสูจน์ ให้ $\lambda = -t$

$$(D_{-v} f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 - tv) - f(p_0)}{t}$$

$$= -\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(p_0 + \lambda v) - f(p_0)}{\lambda}$$

$$= -(D_v f)(p_0)$$

2. ถ้าให้ $v = (1, 0)$, $p_0 = (x_0, y_0)$

$$(D_v f)(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, YO) + t(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

ให้ $g(x) = f(x, y_0)$

$$\therefore \quad (D_v f)(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t}$$

$$= g'(x_0) \text{ ถ้า } g'(x_0) \text{ หาค่าได้}$$

จะเห็นว่า $(D_{(1,0)}f)(x_0, y_0)$ หาได้โดยหาอนุพันธ์ของ f ที่ x_0 โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ตัวเดียว ตัวแปร y เป็นค่าคงตัว และใช้สัญลักษณ์แทน $(D_{(1,0)}f)(x_0, y_0)$ ด้วย $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ หรือ $f_x(x_0, y_0)$ ซึ่งเรียกว่าอนุพันธ์ย่อยของ f ที่ (x_0, y_0) เทียบกับ x นั่นเอง

กล่าวอีกนัยหนึ่ง จะเห็นว่า $f_x(x, y)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เคลื่อนไปในทิศแนวนอน (horizontal direction)

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์ย่อยของ f ที่ (x_0, y_0) เทียบกับ y แทน $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ หรือ $f_y(x_0, y_0)$ และ $f_y(x, y)$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เคลื่อนไปในทิศแนวตั้ง (vertical direction)

2.2 อนุพันธ์ย่อย (Partial derivative)

ถ้า $f : R^{(n)} \to R^{(m)}$ ให้ $v = e_i$ โดยที่ e_i คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกนพิกัดที่ i

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots \delta_{ii}, \ldots, \delta_{in})$$

เมื่อ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ I & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$$

จะเห็นว่า

$$e_1 = (I, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0)$$

$$e_n = (0, 0, \ldots . 0, 1)$$

และ $\|e_i\| = 1$

ถ้า $p_0 = (p_1, p_2, \ldots p_n)$, $e_i = (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$ จะนิยามอนุพันธ์ย่อยโดยทั่วไปดังนี้

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x_1, \ldots x_n)$ ถ้า $p_0 = (p_1, \ldots p_n)$ และ $e_i = (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$ พิจารณา

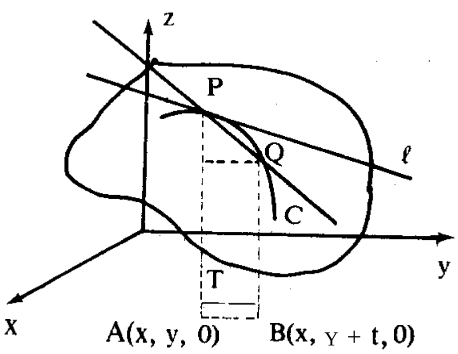
$$(D_{e_i} f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + te_i) - f(p_0)}{t}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้ $(D_{e_i} f)(p_0)$ เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด p_0 เทียบกับ x_i** และใช้สัญลักษณ์ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$ หรือ $f_i(p_0)$ หรือ $f_{x_i}(p_0)$ หรือ $(D_i f)(p_0)$

ดังนั้น
$$f_x(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}$$

และ
$$f_y(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}$$

พิจารณารูปทางเรขาคณิตของ $f_y(x, y)$ พิจารณาจุด $A(x, y, 0)$ และ $B(x, y+t, 0)$ ระนาบ T ขนานกับระนาบ yz และผ่านจุด A, B โดยตัดกับผิว $S : z = f(x, y)$ ได้เส้นโค้ง C ดังรูป



รูปที่ 2.5

จุด P, Q เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ซึ่งภาพฉายบนระนาบ xy คือจุด A, B

ดังนั้น $AP = f(x, y)$

$BQ = f(x, y+t)$

และ $AB = t$

ความชันของเส้นตรงผ่าน

$$PQ = \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}$$

ดังนั้น $$f_y(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}$$

เป็นความชันของเส้นสัมผัส ℓ กับกราฟ C ที่จุด P

ในทำนองเดียวกัน ถ้า C' เป็นกราฟรอยตัดของผิว S และระนาบ T' ซึ่งขนานกับระนาบ xz และผ่านจุด A จะได้ว่า $f_x(x, y)$ เป็นความชันของเส้นสัมผัสกับ C' ที่ P

สำหรับการหาค่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_i หาได้จากการหาอนุพันธ์ของ f โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x_i ตัวเดียว

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 - 2xy$ จงหาค่าของ $f_1(x_0, y_0)$

วิธีทำ *วิธีที่ 1* จากนิยาม

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t(1, 0)) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(x + t)^2 - 2(x + t)y - (x^2 - 2xy)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2xt + t^2 - 2yt}{t} \\ &= 2x - 2y \\ f_1(x_0, y_0) &= 2x_0 - 2y_0 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หา $f_1(x_0, y_0)$ โดยการหาอนุพันธ์ของ f ที่ (x, y) โดยคิดว่า f เป็นเสมือนฟังก์ชันของตัวแปร x ตัวเดียว y เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned} \therefore \quad f_1(x, y) &= 2x - 2y \\ f_1(x_0, y_0) &= 2x_0 - 2y_0 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 นี้ สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้ โดยใช้สูตรการหาอนุพันธ์ ไม่ต้องหาโดยลิมิตซึ่งยุ่งยากมากกว่า

การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะได้ฟังก์ชันใหม่คือ $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ f เราอาจจะพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ ได้อีก ซึ่งจะได้ฟังก์ชัน $D_1(D_1f), D_2(D_2f), \ldots, D_n(D_nf)$ ซึ่งเรียกว่าเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f จะเห็นว่าถ้า $n = 2$ f เป็นฟังก์ชันของ x และ y อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f คือ $D_1(D_1f), D_2(D_1f), D_1(D_2f), D_2(D_2f)$ หรือ

$$f_{11} = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{21} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{12} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{22} = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

โดยทั่วไป อนุพันธ์ย่อยอันดับที่ n ของ f จะเป็นอนุพันธ์ย่อยของอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ $n-1$ ของ f เมื่อ $n = 2, 3, \ldots$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $w = x^2y^2\sin z + e^{xz}$

จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2\sin z + ze^{xz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2x^2y\sin z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^2y^2\cos z + xe^{xz}$$

$$\frac{\partial^2 w}{ayax} = 4xy\sin z = \frac{\partial^2 w}{axay}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = 2x^2 y \cos z = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

และ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 2xy^2 \cos z + e^{xz} + z^2 e^{xz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

สำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร มีทฤษฎีของความสัมพันธ์ของอนุพันธ์และความต่อเนื่องของฟังก์ชันคือ ถ้า f หาอนุพันธ์ที่ a ได้แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย แต่สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปร ทฤษฎีนี้ไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 1, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ให้ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1-1)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-1)}{h} = 0$$

ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ หาค่าได้

แต่ f ไม่มีความต่อเนื่องที่ (0, 0) เนื่องจากให้

$$S_1 = \{(x, y) | y = x\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ \text{บน } S_1}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} 2 = 2$$

ให้ $S_2 = \{(x, y) | y = -x\}$

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ \text{บน } S_2}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} 0 = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **หาค่าไม่ได้**

$\therefore$ f **ไม่ต่อเนื่องที่จุด** (0, 0)

ดังนั้น ความหมายของดิฟเฟอเรนชิเอเบิล หรือหาอนุพันธ์ได้ของฟังก์ชันหลายตัวแปร จึงไม่ได้มีความหมายว่า อนุพันธ์หาค่าได้เมื่อเทียบกับทุกเวกเตอร์ แต่มีความหมายว่า f_i หาค่าได้บนโดเมน D แต่อาจจะไม่มีความต่อเนื่อง

คุณสมบัติการสลับอันดับของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน ก็เป็นสิ่งที่น่าสนใจ เช่น ถ้า f(x, y) เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร จะพิจารณาว่า $f_{xy} = f_{yx}$ หรือไม่

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $$f(x,y) = 2x^2y - \sin\left(\frac{x}{y}\right),\ x > 0$$

$$f_x(x,y) = 4xy - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_y(x,y) = 2x^2 + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_{xy}(x,y) = 4x - \left[\frac{1}{y}\ \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= 4x - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_{yx}(x,y) = 4x + \frac{x}{y^2}\left(-\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= 4x - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $f_{xy} = f_{yx}$ คุณสมบัตินี้ไม่จริงเสมอไปดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงหา $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$

วิธีทำ จากนิยาม

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

พิจารณา $$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{-t^5}{t^4} = -t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{-t-0}{t}$$

$$= -1$$

$$\because \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

พิจารณา $$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{x^5 - xy^4 - 5x^3y^2 + x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \frac{t^5}{t^4} = t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t-0}{t} = 1$

นั่นคือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

สำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x, y)$ จะสามารถสลับอันดับการหาอนุพันธ์ย่อย คือ f_{xy} และ f_{yx} และมีค่าเท่ากันโดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ถ้า $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หาค่าได้ และมีความต่อเนื่องบนเซตเปิด ซึ่งมี (x_0, y_0) อยู่ในเซต แล้วจะได้ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

พิสูจน์ ให้ $g_k(t) = f(x_0+t, y_0+k) - f(x_0+t, y_0)$ .... (2.2.1)

เพราะว่า $g_k(t)$ มีอนุพันธ์บนเซตเปิดซึ่งมี 0 อยู่ในเซต

$\therefore$ $g_k(t)$ มีอนุพันธ์และมีความต่อเนื่องบนช่วงปิดซึ่งมี 0 อยู่ โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะมี c ซึ่ง $0 < c < h$ ทำให้

$$g_k(h) - g_k(0) = hg_k'(c)$$

จาก (2.2.1) $$g_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t, y_0+k)\frac{d}{dt}(x_0+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t, y_0)\frac{d}{dt}(x_0+t)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t, y_0)$$

และ $$\frac{g_k(h)-g_k(0)}{k} = \frac{[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]}{k}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f[(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{g_k(h) - g_k(0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{hg_k'(c)}{k}, \quad |c| < |h|$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0)\right|}{k}$$

ให้ $G(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0+s)$

เพราะว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หาค่าได้บนเซตเปิดซึ่งมี (x_0, y_0) อยู่ในเซต

โดยทฤษฎีบทค่ากลางสำหรับ $G(s)$ บนช่วงปิดซึ่งมีจุด 0 อยู่จะได้

$$\frac{G(k)-G(0)}{k} = G'(d) \quad \text{เมื่อ} \quad |d| < |k|$$

เพราะว่า
$$G'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+c, y_0+s)\frac{d}{ds}(y_0+s)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+c, y_0+s)$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{h[G(k)-G(0)]}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} hG'(d)$$
$$= \lim_{k\to 0} h\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+c, y_0+d)\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+c, y_0+d) \quad \text{......(2.2.2)}$$

เพราะว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ มีความต่อเนื่องบนเซตเปิดซึ่งมี (x_0, y_0) อยู่ในเซต

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนบวกใด ๆ จะมี $\delta' > 0$ ซึ่งทำให้

$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $(x, y) \in N'_{\delta}(x_0, y_0)$

เลือก $\delta = \frac{\delta'}{2}$

ให้ h เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 < |h| < \delta$

เนื่องจาก (2.2.2) ดังนั้น $\exists \delta^* > 0$ ซึ่งทำให้

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+c, y_0+d) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{..........} \quad (2.2.3)$$

สำหรับทุกค่า k ซึ่ง $0 < |k| < \delta^*$

เลือก k ซึ่ง $0 < |k| < \min\{\delta, \delta^*\}$

จะได้ (2.2.3) เป็นจริงทุกค่า h ซึ่ง $0 < |h| < \delta$

พิจารณา $\|(x_0+c,\ y_0+d)-(x_0,\ y_0)\|^2 = \|(c,\ d)\|^2$

$$= c^2+d^2$$

$$< h^2+k^2$$

$$< \delta^2+\delta^2 < \left(\frac{\delta'}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta'}{2}\right)^2 < \delta'^2$$

เพราะฉะนั้น

$$\|(x_0+c, y_0+d)-(x_0, y_0)\| < \delta'$$

ดังนั้น $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+c, y_0+d)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .... (2.2.4)

จาก (2.2.3) และ (2.2.4) จะได้

$$\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)$$

แต่ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h}$

ดังนั้น $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,\ y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,\ y_0)$

2.3 อนุพันธ์รวม

การจะกล่าวถึงดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน (differential of a function) นั้น จะพิจารณาจากกรณีเฉพาะดังตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้า $f(x,\ y, z) = xy-z^2$, $P = (x,\ y,\ z)$

และ $\Delta p = (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$

พิจารณา $f(p+\Delta p) = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$

$$= (x+\Delta x)\ (y+\Delta y)\ -\ (z+\Delta z)^2$$

$$= xy + x(\Delta y) + y(\Delta x) + (\Delta x)(\Delta y) - z^2 - 2z(\Delta z) - (\Delta z)^2$$

$$= \{xy-z^2\} + \{y(\Delta x)+x(\Delta y)-2z(\Delta z)\} + \{(\Delta x)(\Delta y)-(\Delta z)^2\}$$

จะเห็นว่าเทอมในวงเล็บปีกกาแรกคือ f(p)

พิจารณาเทอมในวงเล็บปีกกาที่ 2 คือ

$$y(\Delta x) + x(\Delta y) - 2z(\Delta z) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

ถ้าให้ $L = (y, x, -22) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

ดังนั้น เทอมที่ 2 เขียนได้เป็น $L(\Delta p)$

เทอมที่ 3 คือ $(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta z)^2$ ถ้า Δp มีค่าน้อยมากเข้าใกล้ 0

จะได้ $(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta z)^2$ เข้าใกล้ศูนย์

เพราะฉะนั้น $f(p + \Delta p) \sim f(p) + L(\Delta p)$

ดังนั้น จะให้นิยามของดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันดังนี้

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตเปิด S ของ n มิติ และ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ หาค่าได้และมีความต่อเนื่องบน S ด้วย **ดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน f ที่จุด** $p \in S$ **ใช้สัญลักษณ์** df(p) **ซึ่ง**หมายถึง

$$df(p) = (f_1(p) + f_2(p), \ldots, f_n(p))$$

และเรียกค่าของ df(p) ที่ $x \in R''$ คือ

$$df(p).x = (f,(P),\ f_2(p), \ldots, f_n(p))\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= f,(P)\ x_1 + f_2(p)x_2 + \ + f_n(p)x_n$$

ว่า**อนุพันธ์รวมของ** f **ที่** p เมื่อ $x \in R^n$

จะเห็นว่าจากตัวอย่างเฉพาะ เราได้การประมาณค่าของฟังก์ชัน $f(p + \Delta p) \sim f(p) + L(\Delta p)$ ซึ่งมีทฤษฎีที่สนับสนุนว่าเป็นไปได้ คือทฤษฎีการประมาณค่า (approximation theorem)

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตเปิด S ของ n มิติ f_i หาค่าได้ ทุก i และมีความต่อเนื่องบน S ด้วย $E \subseteq S$, E เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต ให้ $df(p_0)$ เป็นดิฟเฟอเรนเชียลของ f ที่จุด $p_0 \in E$ จะได้ว่า

$$f(p_0 + \Delta p) = f(p_0) + df(p_0)\cdot \Delta p + R(\Delta p)$$

เมื่อ $\lim\limits_{p \to p_0} \frac{R(\Delta p)}{\|\Delta p\|} = 0$ อย่างเสมอต้นเสมอปลาย (uniformly) ทุก $p_0 \in E$

บทนำ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตเปิด $B(p, r)$ f_i หาค่าได้ทุก i และต่อเนื่องบน S ด้วย ให้ $p_0 = (x_0, y_0)$, $\Delta p = (\Delta x, \Delta y)$ ซึ่ง $|\Delta p| < r$ จะได้ว่าสามารถหาจุด p' และ p" ใน $B(p_0, r)$ ซึ่ง

$$f(p_0 + \Delta p) - f(p_0) = f_1(p')\Delta x + f_2(p'')\Delta y$$

พิสูจน์ ให้ $q = (x_0 + \Delta x, y_0)$

พิจารณา $f(q) - f(p_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

$$f(p) - f(p_0) = [f(p) - f(q)] + [f(q) - f(p_0)]$$

$\because$ f มีความต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน $(x_0, x_0 + \Delta x)$

โดยทฤษฎีค่าเฉลี่ย จะมี x' ซึ่ง $x' \in (x_0, x_0 + \Delta x)$

และ
$$\begin{aligned} f(q) - f(p_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= \Delta x f_1(x', y_0) \end{aligned}$$

ให้ $p' = (x', y_0)$

$$f(q) - f(p_0) = \Delta x f_1(p')$$

ในทำนองเดียวกันบนช่วง $(y_0, y_0 + \Delta y)$ จะมี y' ซึ่ง $y' \in (y_0, y_0 + \Delta y)$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \\ &= \Delta y \; f_2(x_0 + \Delta x, y') \end{aligned}$$

ให้ $p'' = (x_0 + \Delta x, y')$

$$\therefore f(p) - f(q) = f_2(p'')\Delta y$$

นั่นคือ $f(p) - f(p_0) = f_1(p')\Delta x + f_2(p'')\Delta y$ #

พิสูจน์ ทฤษฎีบทที่ 2.2

จากบทนำ $p = p_0 + \Delta p$, $\Delta p = (\Delta x, \Delta y)$

จะมี $p', p'' \in B(p_0, r)$ ซึ่งทำให้

$$f(p) - f(p_0) = f_1(p')\Delta x + f_2(p'')\Delta y$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(p_0 + \Delta p) &= f(p_0) + f_1(p')\Delta x + f_2(p'')\Delta y \\ &= f(p_0) + \{f_1(p_0)\Delta x + f_2(p_0)\Delta y\} \\ &\quad + \{[f_1(p') - f_1(p_0)]\Delta x + [f_2(p'') - f_2(p_0)]\Delta y\} \\ &= f(p_0) + df(p_0)\cdot \Delta p + R(\Delta p) \end{aligned}$$

เมื่อ $R(\Delta p) = [f_1(p') - f_1(p_0)]\Delta x + [f_2(p'') - f_2(p_0)]\Delta y$

เนื่องจาก $\|\Delta x\| \leqslant \|\Delta p\|$ และ $\|\Delta y\|$ 4 $\|\Delta p\|$

$$\therefore \quad \frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} \leqslant \|f_1(p') - f_1(p_0)\| + \|f_2(p'') - f_2(p_0)\|$$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก f_1, f_2 มีความต่อเนื่องที่ p_0 และมีความต่อเนื่องอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (uniformly continuous) ที่ p_0 ใน E

ดังนั้น เลือก $\delta > 0$

สำหรับ $p_0 \in E$ ถ้า $\|\Delta p\| < \delta$

เนื่องจาก $\|p' - p_0\| < \|\Delta p\|$ และ $\|p'' - p_0\| < \|\Delta p\|$

ดังนั้น $\|p' - p_0\| < \|\Delta p\| < \delta \rightarrow \|f_1(p') - f_1(p_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

และ $\|p'' - p_0\| < \|\Delta p\| < \delta \rightarrow \|f_2(p'') - f_2(p_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

ดังนั้น
$$\frac{\|R(\Delta p)\|}{\|\Delta p\|} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta p \to 0} \frac{|R(\Delta p)|}{\|\Delta p\|} = 0 \quad \text{ทุกค่า } p_0 \in E$$

สำหรับทฤษฎีบทที่ 2.2 นี้ ใช้ได้สำหรับกรณีที่ f ดิฟเฟอเรนชิเอเบิลบน D (f_i หาค่าได้ แต่อาจจะไม่ต่อเนื่องบน D)

จากทฤษฎีการประมาณค่า ทำให้ได้ทฤษฎีที่สำคัญ ซึ่งใช้ในการหาอนุพันธ์ตามทิศทางได้ง่ายขึ้น โดยไม่ต้องอาศัยนิยามซึ่งหาโดยใช้ลิมิต

ทฤษฎีบทที่ 2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตเปิด S และ f_i หาค่าได้ และมีความต่อเนื่องบน S ด้วยทุก ๆ i แล้วอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด p หาค่าได้ และถ้า df(p) เป็นดิฟเฟอเรนเชียลของ f ที่ p จะได้ว่า

$$(D_v f)(p) = df(p) \cdot v$$

พิสูจน์ ให้ $\Delta p = tv$ และ $\|v\| = 1$

$$\|\Delta p\| = |t| \; \|v\| = |t|$$

จากทฤษฎี
$$\frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \frac{df(p)\,(tv) + R(tv)}{t}$$

$$= \frac{t df(p)\,(v) + R(tv)}{t}$$

$$= df(p)\cdot v + \frac{R(tv)}{\|\Delta p\|}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} df(p)\cdot v + \frac{R(tv)}{\|\Delta p\|}$$

$$= df(p)\cdot v + \lim_{\Delta p\to 0} \frac{R(\Delta p)}{\|\Delta p\|}$$

$$= df(p)\cdot v$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ และ $f(x, y) = 2x - xy$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (0, 3) ในทิศทาง $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

วิธีทำ จาก $$(D_v f)(p) = df(p)\cdot v$$

ในที่นี้ $$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$$

$$= (2 - y, -x)$$

$$df(0, 3) = (-1, 0)$$

$$(D_v f)(0, 3) = (-1, 0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

จะเห็นว่า มีค่าเท่ากับตัวอย่างทีหาจากนิยามโดยตรง

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f(x, y, z) = x^2 - 3xy^2 + 2z^2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 1, 0) ในทิศทาง (1, −1, 2)

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $(1, -1, 2) = \frac{(1, -1, 2)}{\|(1, -1, 2)\|}$

$$= \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$(D_v f)(p) = df(p)\cdot v$$

$$df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

$$= (2x - 3y^2, -6xy, 4z)$$

$$df(1, 1, 0) = (-1, -6, 0)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (1, 1, 0) ในทิศทาง (1, −1, 2)

มีค่าเท่ากับ $(-1, -6, 0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ถ้า f ดิฟเฟอเรนชิเอเบิลที่ p_0 จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด p_0

พิสูจน์ เพราะว่า f ดิฟเฟอเรนชิเอเบิลที่จุด p_0 จากทฤษฎีบทที่ 2.2

$$\therefore \quad f(p_0+\Delta p) = f(p_0) + df(p_0)\cdot\Delta p + R(\Delta p)$$

เมื่อ $$\lim_{p\to p_0} \frac{R(\Delta p)}{\|\Delta p\|} = 0$$

พิจารณา $0 < \|f(p_0+\Delta p) - f(p_0)\| = \|df(p_0)\cdot\Delta p + R(\Delta p)\|$

$$\leqslant \|df(p_0)\|\cdot\|\Delta p\| + \|R(\Delta p)\|$$

$$\lim_{p\to p_0} f(p_0+\Delta p) = f(p_0)$$

หรือ $$\lim_{\Delta p\to 0} f(p_0+\Delta p) = f(p_0)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด p_0

ตัวอย่าง กำหนดให้ f นิยามบน R^2 โดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า ถ้า $p_0 = (0, 0)$ แล้ว $(D_v f)(p_0)$ หาค่าได้ทุกค่า v แต่ f หาอนุพันธ์ที่จุด p_0 ไม่ได้ (f ดิฟเฟอเรนชิเอเบิลที่ p_0 ไม่ได้)

วิธีทำ ให้ $v = (v_1, v_2)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

เนื่องจาก v จะต้องมีคุณสมบัติ $\|v\| = 1$ ดังนั้น จะได้ $v_1 = \cos\theta$, $v_2 = \sin\theta$ สำหรับบางค่า $\theta \in [0, 2\pi)$

ดังนั้น พิจารณา 2 กรณี คือ $\cos\theta \neq 0$ และ $\cos\theta = 0$

กรณีที่ 1 $\cos\theta \neq 0$

$$(D_v f)(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+tv) - f(p_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos e \sin^3\theta}{\cos^3\theta + t^3\sin^6\theta} = \frac{2\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $\cos\theta = 0$ จะได้ $(D_v f)(p_0) = 0$

ดังนั้น $(D_v f)(p_0)$ หาค่าได้ทุกค่า v

เพราะว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ (0, 0) (แบบฝึกหัด)

ดังนั้น f ดิฟเฟอเรนชิเอเบิลที่ (0, 0) ไม่ได้

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ ที่จุด (1, 1) ในทิศทาง "ตะวันออกเฉียงเหนือ"
2. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด p เมื่อ
   - 2.1 $f(x, y) = \sin(xy^2)$, $p = (0, 1)$ ในทิศทาง $-3i+4j$
   - 2.2 $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $p = (-1, 2)$ ในทิศทางตั้งฉากกับ $\nabla f(p)$
   - 2.3 $f(x, y, z) = xy^2 + yz$, $p = (1, 1, 2)$ ในทิศทาง $\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$
   - 2.4 $f(x, y, z) = xyz$, $p = (1, 2, 3)$ ในทิศทางจาก p ไปยัง (3, 3, 1)
   - 2.5 $f(x, y, z) = 3x^2y^2 + 2yz$, $p = (-1, 0, 4)$ ในทิศทาง $Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
3. ให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & , (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & . (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
   - 3.1 จงแสดงว่า f_1, f_2 หาค่าได้ทุกจุด แต่ f_1, f_2 ไม่มีความต่อเนื่อง
   - 3.2 f มีอนุพันธ์ระบุทิศทางที่ (0, 0) หรือไม่
4. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ
   - 4.1 $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{y}$, $y \neq 0$
   - 4.2 $f(x, y) = y^{(x^2)}$, $y > 0$

4.3 $f(x, y, z) = e^{xyz}$

4.4 $f(x, y, z) = \sqrt{e^{x+2y} - y^2}$

5. จงหาดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน

5.1 $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

5.2 f(x, y) = tan-‘(f)

5.3 $f(x, y) = x \sin(xy)$ ที่จุด $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

3.4 $f(x, y, z) = x^2yz + 2yz^2$ ที่ $(1, 2, -1)$

6. กำหนดให้ f นิยามบน R^2 โดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{x^2 + y^4} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์ระบุทิศทางที่ (0, 0) ในทุกทิศทาง แต่ f หาอนุพันธ์ที่ (0, 0) ไม่ได้

7. จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ เมื่อ $f(x, y) = \ln(x + y) + \tan(x - y)$

8. ถ้า $f(x, y) = e^x \tan^2 y$ จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

9. กำหนดให้ f นิยามบน R^2 โดย

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{Ax^3y}{x^2 + y^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

เมื่อ A เป็นค่าคงตัวซึ่ง $A \neq 0$ จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์อันดับสองใน R^2 ได้ แต่ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

10. ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ x, y, f กล่าวว่าเป็นฮาร์โมนิกฟังก์ชัน (harmonic function) ถ้า $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฮาร์โมนิก

10.1 $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

10.2 $f(x, y) = \arctan(y/x)$

2.4 การประมาณค่า

จากทฤษฎีบทที่ 2.2

$$f(p_0+\Delta p) = f(p_0) + df(p_0)\cdot \Delta p + R(\Delta p)$$

เมื่อ $\displaystyle\lim_{\Delta p\to 0} \frac{R(\Delta p)}{\|\Delta p\|} = 0$

ถ้า $\|\Delta p\| = \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ มีค่าน้อยมากและ $R(\Delta p)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้นเราจะประมาณค่า $f(p_0+\Delta p)$ ด้วย $f(p_0)+df(p_0)\cdot\Delta p$

นั่นคือ $$f(p_0+\Delta p) \approx f(p_0) + df(p_0)\cdot \Delta p$$

หรือ $$f(p_0+\Delta p) - f(p_0) \approx df(p_0)\cdot \Delta p$$

ตัวอย่าง $f(x,\ y) = 3x^2+2xy-y^2$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$ จงหาค่า $f(1.03,\ 1.98)$ โดยประมาณ

วิธีทำ ให้

$$p_0 = (1,\ 2)$$

$$\Delta p = (\Delta x,\ \Delta y)$$

$$= (0.03,\ -0.02)$$

$$f(1.03,\ 1.98) = f(1+0.03,\ 2-0.02)$$

$$\approx f(1,\ 2)+df(1,\ 2)\cdot(\Delta x,\ \Delta y)$$

$$df(1,\ 2) = \left(f_x(1,\ 2),\ f_y(1,\ 2)\right)$$

$$f_x = 6x+2y$$

$$f_x(1,2) = 10$$

$$f_y = 2x-2y$$

$$f_y(1,2) = -2$$

แทนค่า $f(1,2)+df(1,\ 2)\cdot(\Delta x,\ \Delta y) = 3 + (10,\ -2)\cdot(0.03,\ -0.02)$

$$= 3 + 10(0.03) + (-2)(-0.02)$$

$$= 3 + 0.03 + 0.04$$

$$= 3.34$$

ตัวอย่าง กระป๋องโลหะรูปทรงกระบอกใบหนึ่ง รัศมีภายในวัดได้ 3 นิ้ว ความสูงภายในวัดได้ 7 นิ้ว เนื้อโลหะหนา 0.1 นิ้ว ถ้าโลหะที่ใช้ทำกระป๋องนี้ราคา 3 บาทต่อลูกบาศก์นิ้ว จงหาราคาโดยประมาณของโลหะที่ใช้ทำกระป๋องใบนี้

วิธีทำ ให้ $v(r, h)$ เป็นปริมาตรของรูปทรงกระบอกตันที่มีรัศมี r และความสูง h

$$v(r, h) = \pi r^2 h$$

ปริมาตรของโลหะที่ใช้ทำกระป๋อง = $v(r_0 + Ar, h_0 + \Delta h) - v(r_0, h,)$

เมื่อ $r_0 = 3$, $h_0 = 7$, $Ar = 0.1$, $Ah = 0.2$

$$v(r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h) - v(r_0, h_0) \approx dv(r_0, h_0) \cdot (Ar, Ah)$$

$$dv(r_0, h_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial r}(r_0, h_0), \frac{\partial v}{\partial h}(r_0, h_0)\right)$$

$$= (2\pi r_0 h_0, \pi r_0^2)$$

$$v(r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h) - v(r_0, h_0) \approx (2\pi r_0 h_0)(\Delta r) + (\pi r_0^2)(\Delta h)$$

$$= 2\pi(3)(7)(0.1) + \pi(3)^2(0.2)$$

$$= 4.2\pi + 1.8\pi$$

$$= 6\pi$$

ปริมาตรของโลหะที่ใช้ทำกระป๋องโดยประมาณ = 6π ลูกบาศก์นิ้ว

ราคาโดยประมาณของโลหะที่ใช้ทำกระป๋องใบนี้ = $3 \times 6\pi = 18\pi$ บาท

(ประมาณ 55 บาท)

แบบฝึกหัด 2.2

1. ถ้า $f(x, y) = x^2y - 2x$, $Ax = -0.01$, $Ay = 0.02$ จงหา

   1.1 ส่วนที่เปลี่ยนของ f ที่จุด (4, 3)

   1.2 ดิฟเฟอเรนเชียลรวมของ f ที่ (4, 3)

   1.3 ค่าโดยประมาณ $f(3.99, 3.02)$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

   2.1 (8.04) (5.99:)

   2.2 $\sqrt[3]{(3.8)^2 + 2(2.1)^3}$

   2.3 $\sin \dfrac{89\pi}{180}$

3. จงประมาณค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียลรวม

   3.1 $f(x, y) = y^x$, $f(1.1, 0.08)$

   3.2 $f(x, y, z) = \ell n(xy) - yz$, $Ax = 0.01$, $Ay = -0.03$, $\Delta z = .01$ ที่จุด $(-3, 1, 2)$

4. จงหาปริมาตรของกล่องใบหนึ่งซึ่งวัดภายนอกยาว 6 ฟุต กว้าง 2 ฟุต สูง 5 ฟุต และมีความหนา $\frac{1}{2}$ นิ้ว

5. กระป๋องกลมใบหนึ่งวัดรัศมีที่ฐานได้ 2 นิ้ว ความสูงวัดได้ 8 นิ้ว ถ้าการวัดนี้ผิดพลาดไม่เกิน 0.1 นิ้ว จงหาขอบเขตของค่าผิดพลาดในการคำนวณปริมาตรโดยประมาณของกล่อง

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Differentiation of composite function)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร เช่น y เป็นฟังก์ชันของ x

$$y = f(x)$$

และ x เป็นฟังก์ชันของ t

$$x = x(t)$$

แทนค่า x ใน $\quad y = f(x)$

จะได้ $\quad y = f(x(t)) = g(t)$

ดังนั้น y เป็นฟังก์ชันของ t

โดยกฎลูกโซ่สามารถหาค่า $\frac{dy}{dt}$ ได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปรมีทฤษฎีในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.5 *(กฎลูกโซ่)* ให้ $z = f(x, y)$ และ $x = g(t)$, $y = h(t)$ เมื่อ g และ h มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนย่านของ t_0 และ f มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนย่านของ $p_0 = (g(t_0), h(t_0))$ แล้วฟังก์ชัน F ซึ่ง $z = F(t)$ มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนย่านของ t_0 และ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

พิสูจน์ ให้ $z = f(x, y)$ และ $x = g(t)$, $y = h(t)$

ให้ $\quad t = t_0 + \Delta t$

$$p = (g(t), h(t))$$

และ $\Delta p = p - p_0$

ดังนั้น $\Delta p = (Ax, \ \Delta y)$

เมือ $Ax. = g(t) - g(t_0)$

และ $\Delta y = h(t) - h(t_0)$

โดยใช้คุณสมบัติการประมาณค่าของดิฟเฟอเรนเชียล

$$\Delta x = dg(\Delta t) + R_1(\Delta t)$$

$$\Delta y = dh(\Delta t) + R_2(\Delta t)$$

และ
$$F(t) - F(t_0) = f(p) - f(p_0)$$
$$= df(\Delta p) + R_3(\Delta p)$$

เมือ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{R_1(\Delta t)}{|At} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{R_2(\Delta t)}{|\Delta t|} = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \dfrac{R_3(\Delta p)}{|\Delta p|} = 0$

แทนค่า $\Delta x, \Delta y$ จะได้

$$Ap = \big(dg(\Delta t), dh(\Delta t)\big) + \big(R_1(\Delta t), R_2(\Delta t)\big)$$

ดังนั้น $df(\Delta p) = df\big(dg(\Delta t), \ dh(\Delta t)\big) + df(R,(At), \ R_2(\Delta t)\big)$

ดังนั้น $F(t) - F(t_0) = df\big(dg(\Delta t), dh(\Delta t)\big) + R(\Delta t)$

เมื่อ $R(At) = df(R,(At), \ R_2(\Delta t)\big) + R_3(\Delta p)$

พิจารณา

$$df\big(dg(\Delta t), \ dh(\Delta t)\big) = f_1(p_0)\, dg(\Delta t) + f_2(p_0)\, dh(\Delta t)$$
$$\approx f_1(p_0)\ \big(g'(t_0)\Delta t\big) + f_2(p_0)\ \big(h'(t_0)\Delta t\big)$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)\Delta t + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)(\Delta t)$$

แทนค่า
$$F(t) - F(t_0) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t + R(At)$$

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{|\Delta t|} = \frac{a2}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{R(\Delta t)}{|\Delta t|}$$

พิจารณา
$$\frac{R(\Delta t)}{|\Delta t|} = df\left(\frac{R_1(\Delta t)}{|\Delta t|}, \ R_2\frac{(\Delta t)}{|\Delta t|}\right) + \frac{R_3(\Delta p)}{|\Delta t|}$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{R_1(\Delta t)}{|\Delta t|}, \ \dfrac{R_2(\Delta t)}{|\Delta t|}\right) = (0, 0)$

และ df มีความต่อเนื่อง ดังนั้น $\lim_{\Delta t \to 0} df\left(\frac{R_1(\Delta t)}{|\Delta t|}, \frac{R_2(\Delta t)}{|\Delta t|}\right) = 0$

พิจารณา $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R_3(\Delta p)}{|\Delta t|}$

เนื่องจาก dg และ dh เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้น

$\exists M$ ซึ่ง $|\Delta p| \leqslant M|\Delta t|$ เมื่อ Δt เข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\frac{|R_3(\Delta p)|}{|\Delta t|} \leqslant M \frac{|R_3(\Delta t)|}{|\Delta t|}$ ซึ่งเป็น 0 เมื่อ $\Delta t \to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R_3(\Delta p)}{|\Delta t|} = 0$$

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\Delta t)}{|\Delta t|} = 0$$

ดังนั้น $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t) - F(t_0)}{|\Delta t|} = \frac{\partial z}{ax}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

หรือ $$F'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้ $z = f(u, v)$ เมื่อ $u = g(x, y)$ และ $v = h(x, y)$ g และ h มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนย่านของจุด $p_0 = (x_0, y_0)$ และ f มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ต่อเนื่องบนย่านของจุด $q_0 = (g(p_0), h(p_0))$ แล้วฟังก์ชัน F ซึ่งมี $z = F(x, y)$ จะมีอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อเนื่องบนย่านของ p_0 และ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกับทฤษฎีบทที่ 2.5

โดยทั่วไปจะได้ทฤษฎีว่า ถ้า $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปร x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ เป็นฟังก์ชันของ m ตัวแปร y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ ถ้า x_i มีอนุพันธ์ได้ที่จุด p_0 ทุกค่าของ i และ f มีอนุพันธ์ได้ที่จุด q_0 เมื่อ $q_0 = (x_1(p_0), x_2(p_0), \ldots, x_n(p_0))$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial y_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0)\frac{\partial x_1}{\partial y_1}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q_0)\frac{\partial x_2}{\partial y_1}(p_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\frac{\partial x_n}{\partial y_1}(p_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_2}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_2}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q_0)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2}(p_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_2}(p_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_m}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_{11}}(q_0)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_m}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q_0)\frac{\partial x_2}{\partial y_{nm}}(p_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_m}(p_0)$$

หรือเขียนสั้น ๆ จะได้

$$\frac{\partial z}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial y_j}; \quad j = 1, 3, \ldots, m$$

จะเห็นว่า ถ้า $m = 1$, x_i เป็นฟังก์ชันของ y_1 ถ้า $y = y_1$ จะได้

$$\frac{dz}{dy}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0)\cdot\frac{dx_1}{dy}(p_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q_0)\cdot\frac{dx_2}{dy}(p_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\frac{dx_n}{dy}(p_0)$$

ตัวอย่าง ให้ $z = \ln xy + y^2$; $x = e^t$, $y = e^{-t}$

จงหาค่าของ $\frac{dz}{dt}$

วิธีทำ *วิธีที่ 1* โดยการใช้กฎลูกโซ่

ให้

$$z = f(x, y) = \ln xy + y^2$$

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}$$

$$\therefore \quad z(t) = f(x(t), y(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 2y$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{x} - e^{-t}\left(\frac{1}{y} + 2y\right)$$

$$= \frac{e^t}{x} - \frac{e^{-t}}{y} - 2ye^{-t}$$

ถ้าแทนค่า $x = e^t$, $y = e^{-t}$

$$\frac{dz}{dt} = -2e^{-2t}$$

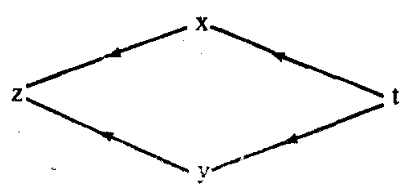
วิธีที่ 2 **โดยการแทนค่า x, y ก่อนหาอนุพันธ์**

$$
\begin{aligned}
z &= \ln xy + y^2 \\
&= \ln(e^t \cdot e^{-t}) + e^{-2t} \\
&= \ln 1 + e^{-2t} \\
&= \underline{e^{-2t}} \\
\frac{dz}{dt} &= -2e^{-2t}
\end{aligned}
$$

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ อาจจะอาศัยรูปภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 $z = f(x, y),\quad x = g(t),\quad y = h(t)$

เขียนภาพแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



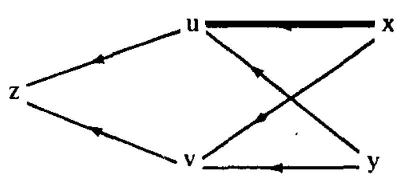
รูปที่ 2.5

ซึ่งจะเห็นว่า ตัวแปร z ขึ้นอยู่กับตัวแปร t ในสองทางคือ ผ่าน x และ y ดังนั้น จะได้

$$
\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}
$$

ตัวอย่างที่ 2 $z = f(u, v),\quad u = g(x, y),\quad v = h(x, y)$

เขียนภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรได้ดังนี้



รูปที่ 2.6

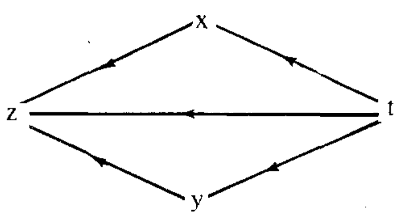
จะเห็นว่า z เป็นฟังก์ชันของ x และ y ในการหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ ก็จะดูเส้นที่โยงความสัมพันธ์ จาก z ไปถึง x ในสองทางด้วยกันคือ ผ่าน u และ v

ดังนั้น
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= f_1g_1 + f_2h_1$$

ในทำนองเดียวกัน
$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= f_1g_2 + f_2h_2$$

ตัวอย่างที่ 3 $z = f(x, y, t),\ x = g(t),\ y = h(t)$

แผนภาพแสดงความสัมพันธ์คือ



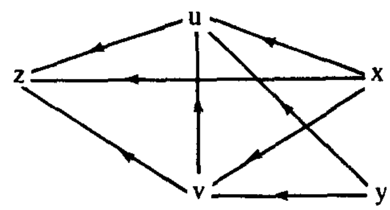
รูปที่ 2.7

$$z = f(g(t), h(t), t)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$= f_3 + f_1\frac{dx}{dt} + f_2\frac{dy}{dt}$$

ตัวอย่างที่ 4 $z = f(x, u, v),\ u = g(x, v, y),\ v = h(x, y)$

จะเห็นว่า ในที่นี้ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y ดังนั้น เขียนแทนด้วยภาพจะได้ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8

พิจารณาเส้นที่ลากจาก z ไปยัง x ในทิศทางย้อนลูกศร ดังนั้น

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

จากสมการนี้จะเห็นว่ามี $\frac{\partial z}{\partial x}$ เหมือนกันอยู่ 2 เทอม แต่ความหมายต่างกัน จะเห็นว่า $\frac{\partial z}{\partial x}$ ทางซ้ายมือหมายถึงอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x ในที่นี้ z เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และ y อาจจะเขียนแทนด้วย $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y$ สำหรับ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ทางขวามือ หมายถึงอนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x เมื่อ z เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, u, v ดังนั้น อาจจะเขียนในอีกรูปหนึ่ง จึงจะเห็นได้ชัดเจน

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_2g_1 + f_3h_1 + f_2g_2h_1$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= f_2g_3 + f_3h_2 + f_2g_2h_2$$

อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันประกอบ

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันประกอบ จะหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่เช่นเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $z = f(x, y)$ และ $x = g(t)$, $y = h(t)$ จงหา $\frac{d^2z}{dt^2}$

วิธีทำ จาก

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

พิจารณา $$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

จะเห็นว่า $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)$ และ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$ เป็นการหาอนุพันธ์ของผลคูณของ 2 ฟังก์ชัน ดังนั้นจะได้

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ใช้กฎลูกโซ่อีกครั้งหนึ่ง

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

วิธีทำ จาก $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\left| \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

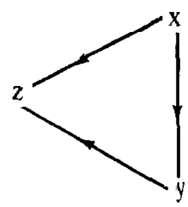
$$+ \frac{\partial v}{\partial x}\, \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $z = f(x, y)$ และ $y = g(x)$ จงหา $\frac{dz}{dx}$ และ $\frac{d^2 z}{dx^2}$

วิธีทำ ความสัมพันธ์ของ z, x, y เขียนได้ดังแผนภาพนี้



$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= f_1 + f_2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(f_1 + f_2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(f_1) + \frac{d}{dx}\left(f_2\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f_1)\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}f_2\cdot\frac{dy}{dx} + f_2\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= f_{11} + f_{12}\frac{dy}{dx} + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right|\frac{dy}{dx} + f_2\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= f_{11} + f_{12}\frac{dy}{dx} + f_{21}\frac{dy}{dx} + f_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_2\frac{d^2 y}{dx^2}$$

ถ้า $f_{12} = f_{21}$ ดังนั้น

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f_{11} + 2f_{21}\frac{dy}{dx} + f_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_2\frac{d^2 y}{dx^2}$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ถ้า $y = u+v$, $y = u \cdot v$ และ $y = u/v$ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

2. ถ้า $y = u^v$ เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันของ x จงหา $\frac{dy}{dx}$

3. ถ้า $z = e^{xy^2}$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

4. จงเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน และหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   4.1 ให้ $w = f(x, y, z)$, $x = \phi(t)$, $y = \Psi(t)$, $z = \Psi(t)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

   4.2 $w = F(x, y, z)$, $y = f(x, z)$, $x = g(t)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

   4.3 $w = F(x, y, z)$. $y = g(x, t)$, $v = h(x, s)$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$

   4.4 $w = F(x, y. z, t)$, เมื่อ $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ จงหา $\frac{dw}{dt}$

5. ถ้า $w = f(x, y)$ และ $x = u\cosh v$, $y = \sinh v$ จงแสดงว่า

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

6. ถ้า $z = e^x\cos y$ เมื่อ x, y เป็นฟังก์ชันของ t ซึ่ง

$$x^3 + e^x - t^2 - t = 1$$

$$yt^2 + y^2t - t + y = 0$$

   จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 0$ [เมื่อ $t = 0$, ให้ $x = 0$ และ $y' = 0$]

7. ให้ $F(x, y, z) = 0$ ถ้าสมการนี้สามารถแก้สมการสำหรับ z ในเทอมของ x, y ได้ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

8. ถ้า $w = F(xz, yz)$ จงแสดงว่า

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = z\frac{\partial w}{\partial z}$$

9. **ฟังก์ชัน** f จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี k ในย่าน N ของจุดกำเนิด

ถ้า $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in N$ และทุกค่า t, $t \in [0, 1]$

จงแสดงว่า $x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = kf$

10. ถ้า $u = f(x+at), + g(x-at)$ แล้วจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

เมื่อ f และ g สามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้ a เป็นค่าคงตัว

11. กำหนดให้ $u = x^2 F(y/x)$

จงแสดงว่า $x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2u$

2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยนัย (Derivatives of Implicit functions)

สมการ $F(x, y, z) = 0$

ถ้า $z = f(x, y)$ แล้ว z จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยนัย** บางครั้งจากสมการ $F(x, y, z) = 0$ อาจนิยาม z ได้หลายแบบ เช่น

พิจารณาสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

ดังนั้น $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

นั่นคือ $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

หรือ $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

ซึ่ง z ทั้งสองค่านี้จะหาค่าได้เมื่อ $x^2 + y^2 \leqslant 4$ จากค่า z ทั้งสองค่านี้ สามารถหาอนุพันธ์ $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ได้โดยตรง แต่บางสมการไม่สามารถจัด z ให้อยู่ในเทอมของ x, y ได้ เช่น

$$F(x, y, z) = x^2 + xy + z^2 - e^{-z} + 1 = 0$$

ในกรณีนี้จะอาศัยความรู้ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบมาช่วยหา $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

พิจารณา $F(x, y, z) = 0$ .... (2.6.1)

เมื่อ $z = f(x, y)$ .... (2.6.2)

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

สมมติว่าสมการเป็นจริงเมื่อ (x, y) อยู่ในโดเมน D เมื่อ

$$D = \{(x, y) | (x, y, z) \in E \subseteq R^3 \text{ และ } Z = f(x, y)\}$$

และ F หาอนุพันธ์ได้

จากสมการ (2.7.1) หาอนุพันธ์ย่อย จะได้

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

และ $$F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ดังนั้น $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

ตัวอย่าง ถ้า $x^2 + xy + z^2 - e^{-z} + 1 = 0$ และ $z = f(x, y)$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = x^2 + xy + z^2 - e^{-z} + 1 = 0$,

$$F_x = 2x + y,\ F_y = x,\ F_z = 2z + e^{-z}$$

$$\frac{af}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-2x-y}{2z+e^{-z}}$$

$$\frac{af}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-x}{2z+e^{-z}}$$

พิจารณา $F(x, y, u, v) = 0$ .... (2.6.3)

และ $G(x, y, u, v) = 0$ .... (2.6.4)

เมื่อ $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าหาอนุพันธ์ย่อยของ (2.6.3) และ (2.6.4) เทียบกับ x จะได้

$$F_x + F_u \frac{\partial u}{ax} + F_v \frac{\partial v}{ax} = 0$$

หรือ $$F_u \frac{\partial u}{ax} + F_v \frac{\partial v}{ax} = -F_x$$

และ $$G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

หรือ $$G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = -G_x$$

ทั้งสองสมการเป็นสมการเชิงเส้น โดยกฎของคราเมอร์จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{F_xG_v - F_vG_x}{F_uG_v - F_vG_u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{F_uG_x - F_xG_u}{F_uG_v - F_vG_u}$$

ตัวกำหนด $\begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial s} & \frac{\partial A}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial s} & \frac{\partial B}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial(A, B)}{\partial(s, t)}$ มีชื่อเฉพาะเรียกว่า Jacobians

ดังนั้น $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

และ $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \Big/ \frac{a\ -}{\partial(u, v)}$$

ในทำนองเดียวกันถ้าต้องการหาค่า $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial y}$ ก็หาอนุพันธ์ย่อยของ **(2.6.3)** และ **(2.6.4)** เทียบกับ y แล้วแก้สมการจะได้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $u^2 - v = 3x + y$ และ $u - 2v^2 = x - 2y$

วิธีทำ

$$F(x,y,u,v) = u^2 - v - 3x - 3y = 0$$

$$G(x,y,u,v) = u - 2v^2 - x + 2y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = -1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = -4v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นคำตอบหนึ่งของ $F(x+y+z, Ax+By) = 0$

จงแสดงว่า $A\frac{\partial z}{\partial y} - B\frac{\partial z}{\partial x}$ เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ ให้

$$u(x,y) = x+y+z$$

$$v(x,y) = Ax+By$$

$$G(x,y) = F(x+y+z, \ Ax+By)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}(A)$$

$$0 = F_1 + F_1\frac{\partial z}{\partial x} + AF_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(F_1 + AF_2)}{F_1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{au}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{av}{\partial y}$$

$$0 = F_1\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) + BF_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(F_1 + BF_2)}{F_1}$$

พิจารณา $A\frac{\partial z}{\partial y} - B\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{F_1}(F_1 + BF,) + \frac{B}{F_1}(F_1 + AF_2)$

$$= \frac{-AF_1 + BF,}{F_1}$$

$$= B - A = \text{ค่าคงตัว}$$ #

ตัวอย่างที่ 3 ให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x และ y และสมการ

$$u^2+v^2+x^2+y^2 = 3, \quad u^2+2v^2-x^2+y^2 = 3$$

จงหา $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

วิธีทำ

ให้ $F(u, v, x, y) = u^2+v^2+x^2+y^2-3 = 0$

และ $G(u, v, x, y) = u^2+2v^2-x^2+y^2-3 = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ -2x & 4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & 4v \end{vmatrix}} = -\frac{3x}{U}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2v \\ 2Y & 4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & 4v \end{vmatrix}} = -\frac{y}{u}$$

ดังนั้น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3x}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{u} = \frac{3x}{u^2}\left(-\frac{3x}{u}\right) - \frac{3}{u}$

$$= -\frac{9x^2}{u^3} - \frac{3}{u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{u} - = \frac{y}{u^2}\left(-\frac{y}{u}\right) - \frac{1}{u} = -\frac{y^2}{u^3} - \frac{1}{u}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $2x+y-3z-2u = 0$

   และ $x+2y+z+3 = 0$

   จงหา $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z, \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_x, \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_u, \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$

2. ถ้า $u = x^3y$ และ $x^5+y = t$, $x^2+y^3 = t^2$ จงหา $\frac{du}{dt}$

3. ถ้า $xu^2 + v = y^3$ และ $2yu - xv^3 = 4x$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial v}{\partial x}$

4. กำหนดให้ $x+y^2 = u$, $y+z^2 = v$, $z+x^2 = w$ จงหา $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ และ $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$

5. กำหนดให้ $f(x, \text{'}Y, r, s) = 0$, $g(x, y, r, s) = 0$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

6. จงแสดงว่า ถ้า $F(x, y, z) = 0$ แล้ว $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$

7. กำหนดให้

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2$$
$$xy - \sin u \cos v + z = 0$$

   จงหา $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v, \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u$ ที่จุด $x = 1, y = 1, u = \frac{\pi}{2}, v = 0, z = 0$

8. กำหนดให้ $F(x+y-z,\ x^2+y^2) = 0$

   จงแสดงว่า $x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x - y$

2.7 การเปลี่ยนตัวแปร

ปัญหาต่าง ๆ ทางด้านฟิสิกส์ ได้นำเอาอนุพันธ์ย่อยไปใช้มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $u = f(x, y),\ x = s+t$ และ $y = s-t$

จงแสดงว่า สมการ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ จะเปลี่ยนไปเป็น $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0$

วิธีทำ

จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s} \cdot \dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

จาก $x = s+t$

$y = s-t$

จะได้ $s = \dfrac{x+y}{2}$ และ $t = \dfrac{(x-y)}{2}$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2},\quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2},\quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$

และ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

ถ้า u มีคุณสมบัติที่ทำให้ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

และ $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

แทนค่า $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = 0$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = 0$$

การเปลี่ยนตัวแปรที่พบเสมอ ๆ ได้แก่ การเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ถ้า (x, y) เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก และ (r, θ) เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad \text{..........(2.7.1)}$$

ถ้า $u = f(x, y)$ และ u หาอนุพันธ์ได้

ดังนั้น $u = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \phi(r, \theta)$ เป็นฟังก์ชันของ r และ θ ด้วย

จากสมการ (2.7.1) จะเห็นว่า x และ y ก็เป็นฟังก์ชันของ r, θ ด้วย

ดังนั้น $$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

และ $$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

แต่ $$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta$$

และ $$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

ดังนั้น $$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{.......... (2.7.2)}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{.......... (2.7.3)}$$

สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ ϕ สามารถหาได้โดยใช้กฎลูกโซ่ช่วยอีกครั้ง ดังนี้

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\sin\theta$$

และ $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta$$

แทนค่า $$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\sin\theta\right] + \sin\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right]$$

$$= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่าของ $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$ และ $\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial r}$ ก็สามารถหาได้โดยอาศัยกฎลูกโซ่เช่นกัน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ จงแสดงว่า

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2$$

วิธีทำ จาก $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

และ $$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

ดังนั้น $$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 = \left(\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad \#$$

จากสมการ (2.7.1) บางครั้งอาจจะต้องการหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ โดยตรง เช่น ต้องการแสดงว่า สมการลาปลาซ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ สามารถเปลี่ยนเป็นรูปสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

จาก $\quad x = r\cos\theta$

หาอนุพันธ์เทียบกับ y ดังนั้น จะได้

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} r\sin\theta$$

และจากสมการ $\quad y = r\sin\theta$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x จะได้

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} r\cos\theta$$

จาก $\quad x^2 + y^2 = r^2$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x และ y ตามลำดับ

ดังนั้น $\quad 2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

และ $\quad 2y = 2r\frac{\partial r}{\partial y}$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

แทนค่าในสมการ จะได้

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$
$$= \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$
$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

พิจารณา
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(\cos\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}(\cos\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติที่ทำให้ $\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}$

แทนค่า $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ และ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$ จะได้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
$$+ \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ หาได้จาก

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

ปัญหาการเปลี่ยนตัวแปรอีกแบบหนึ่ง ซึ่งเป็นการประยุกต์ในด้าน thermodynamics ซึ่งมีตัวแปร p, T, U และ V สัมพันธ์กันด้วยสมการ

$$E(U, T, V, p) = 0 \qquad \text{..........(2.7.4)}$$

$$G(U, T, V, p) = 0 \qquad \text{..........(2.7.5)}$$

เมื่อ U คือ พลังงานภายใน (internal energy)

T คือ อุณหภูมิ (temperature)

V คือ ปริมาตร (volume)

p คือ ความดัน (pressure)

สมการ (2.7.4) และ (2.7.5) สามารถแก้สมการได้เมื่อตัวแปร 2 ใน 4 ตัว ถูกเลือกให้เป็นตัวแปรอิสระ และ 2 ตัวที่เหลือเป็นตัวแปรตาม เช่น

เมื่อ V และ T เป็นตัวแปรอิสระ จากกฎข้อ 2 ของ thermodynamics จะได้สมการ

$$\frac{\partial U}{\partial V} - T\frac{\partial p}{\partial T} + p = 0 \qquad \text{.......... (2.7.6)}$$

ดังนั้น สมการนี้มี U และ p เป็นตัวแปรตาม

ถ้าต้องการแสดงว่าสมการ (2.8.6) สามารถเปลี่ยนเป็นสมการรูปอื่นได้ เช่น

$$\frac{\partial T}{\partial V} + T\frac{\partial p}{\partial U} - p\frac{\partial T}{\partial U} = 0$$

นั่นคือ ต้องการให้ตัวแปร U และ V เป็นตัวแปรอิสระ และ T, p เป็นตัวแปรตาม ดังนั้น จะให้

$$\left.\begin{aligned} T &= f(U, V) \\ p &= g(U, V) \end{aligned}\right\} \qquad \text{...........(2.7.7)}$$

จากสมการ (2.7.6) มีเทอม $\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T$ และ $\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V$ ดังนั้น จะหาอนุพันธ์ของ (2.7.7) เทียบกับ V และ T จะได้

อนุพันธ์ของ (2.7.7) เทียบกับ V;

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial V}$$

$$0 = f_1\frac{\partial U}{\partial V} + f_2$$

หรือ
$$\frac{au}{\partial V} = -\frac{f_2}{f_1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{\partial g}{au}\cdot\frac{\partial U}{av} + \frac{\partial g}{av}\,\frac{\partial V}{av}$$

$$\frac{\partial p}{av} = g_1\frac{au}{\partial V} + g_2$$

อนุพันธ์ของ (2.7.7) เทียบกับ T;

$$\frac{\partial T}{\partial T} = \frac{af}{\partial U}\cdot\frac{au}{\partial T} + \frac{af}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}$$

$$1 = f_1\frac{\partial U}{\partial T} + o \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{I}{f_1}$$

และ
$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial g}{\partial U}\cdot\frac{au}{\partial T} + \frac{\partial g}{\partial V}\cdot\frac{av}{\partial T}$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = g_1\frac{\partial U}{\partial T} + 0$$

แทนค่า $\frac{\partial U}{\partial T}$ จะได้

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{g_1}{f_1}$$

แทนค่า $\frac{\partial U}{av}$ และ $\frac{\partial U}{\partial T}$ ในสมการ (2.7.6) จะได้

$$0 = \frac{\partial U}{\partial V} - T\frac{\partial p}{\partial T} + p = -\frac{f_2}{f_1} - T\frac{g_1}{f_1} + p$$

$$-f_2 - Tg_1 + pf_1 = 0$$

$$f_2 + Tg_1 - pf_1 = 0$$

หรือ
$$\frac{\partial T}{\partial V} + T\frac{\partial p}{\partial U} - p\frac{\partial T}{\partial U} = 0$$

แบบฝึกหัด 2.5

1. ในการเปลี่ยนตัวแปร $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ จากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว จงแสดงว่า

   1.1 $dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$

   1.2 $dr = \cos\theta dx + \sin\theta dy,\quad d\theta = -\dfrac{\sin\theta}{r}dx + \dfrac{\cos\theta}{r}dy$

   1.3 $\left(\dfrac{\partial x}{\theta r}\right)_\theta = \cos\theta,\quad \left(\dfrac{\partial x}{\theta r}\right)_y = \sec\theta,\quad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \cos\theta,\quad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)_\theta = \sec\theta$

   1.4 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r,\quad \dfrac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \dfrac{1}{r}$

2. จงแสดงว่า ถ้า $x = e^s,\ y = e^t$ จะเปลี่ยนสมการ

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \text{ เป็นสมการ } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

3. จงแสดงว่า โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$ จะเปลี่ยนสมการ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ เป็นสมการ } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

4. จงแสดงว่า ถ้า $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   จะเปลี่ยนเป็นสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

5. จากปัญหาในด้านเทอร์โมไดนามิกส์ จงแสดงว่าสมการ

$$\frac{\partial U}{\partial V} - T\frac{\partial p}{\partial T} + p = 0$$

   จะเปลี่ยนเป็นสมการต่อไปนี้

   5.1 $\dfrac{\partial U}{\partial p} + T\dfrac{\partial V}{\partial T} + p\dfrac{\partial V}{\partial p} = 0$ (p, T เป็นตัวแปรอิสระ)

   5.2 $\dfrac{\partial T}{\partial p} - T\dfrac{\partial V}{\partial U} + p\dfrac{\partial(V, T)}{\partial(U, p)} = 0$ (U, p เป็นตัวแปรอิสระ)

   5 . 3 $T - p\dfrac{\partial T}{\partial p} + \dfrac{\partial(T, U)}{\partial(V, P)} = 0$ (V, p เป็นตัวแแปรอิสระ)

บทสรุป

1. การหาอนุพันธ์ระบุทิศทางนั้น อาจจะหาโดยตรงจากนิยาม คือ

$$(D_v f)(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$$

หรือหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทซึ่งใช้ดิฟเฟอเรนเชียล คือ

$$(D_v f)(p) = df(p) \cdot v$$

2. การประมาณค่าของฟังก์ชันจะใช้ทฤษฎีบทการประมาณค่า จะได้ว่า

$$f(p_0 + \Delta p) \approx f(p_0) + df(p_0) \cdot \Delta p$$

3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ อาจจะหาจากรูปภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ

4. อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยนัย หาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการเทียบกับตัวแปรอิสระแล้วแก้สมการ หรืออาจจะจำสูตร ถ้ามี

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{และ} \quad G(x, y, u, v) = 0$$

ในที่นี้ x, y เป็นตัวแปรอิสระ u, v เป็นตัวแปรตาม จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \Big/ \frac{a \quad -}{\partial(u, v)}$$

และ $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$$

สำหรับ $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ก็หาได้ในทำนองเดียวกัน

5. การเปลี่ยนตัวแปรที่มีประโยชน์ คือเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว คือเปลี่ยนจาก (x, y) เป็น (r, θ) โดย $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

แบบฝึกหัดระคนบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x, y) = e^x \tan y + 2x^2y$ ที่จุด $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ในทิศทาง $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. ถ้า $w = \frac{x^2}{y^2+z^2}$ จงหา $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2}$

3. กำหนดให้ $w = \cos(x-y) + \ln(x+y)$ จงแสดงว่า $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

4. จงหาค่าโดยประมาณของ $\sqrt[3]{26.98}$

5. ถ้าด้านของรูปทรงตันซึ่งมีหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (หน่วยเป็นนิ้ว) เปลี่ยนไปจาก 9, 6 และ 4 เป็น 9.02, 5.97 และ 4.01 ตามลำดับ จงใช้การประมาณโดยดิฟเฟอเรนเชียลหาปริมาตรที่เปลี่ยนไป เปรียบเทียบกับปริมาตรที่เปลี่ยนไปจริง ๆ

6. จงเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์และหาอนุพันธ์ $\frac{\partial w}{\partial u}$

$$w = f(x, y, z), \quad x = g(u, y), \quad y = h(u)$$

7. ถ้า $z = f(x, y)$ คล้องตามสมการ

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 3yz + 1 = 0$$

จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

8. ถ้า $z = f(x^2+y^2)$ จงแสดงว่า $y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$

9. กำหนดให้ $f(x, y) = u$ เมื่อ $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$

จงหา $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ในเทอมของ u_r และ u_θ

10. กำหนดให้

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \sin u \cos v + z &= 0 \end{aligned}$$

จงหา $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v$ ที่จุด $x = 1, \ y = 1, \ u = \frac{\pi}{2}, \ v = 0, \ z = 0$
