บทที่ 1
ฟังก์ชันของหลายตัวแปร

1.1 ความนำ

ในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นได้ศึกษาแคลคูลัสของฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร สำหรับแคลคูลัสขั้นสูงจะเป็นการศึกษาถึงปัญหาและเทคนิคต่าง ๆ ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น ในบทแรกนี้จะศึกษาฟังก์ชันของหลายตัวแปร การหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน และฟังก์ชันอื่นซึ่งนิยามจากอินทิกรัล ฟังก์ชันของหลายตัวแปรนี้จะพบเสมอโดยเฉพาะอย่างยิ่งในคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น การบอกตำแหน่งของเส้นลวดซึ่งสั่นขึ้นลงเป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร การกล่าวถึงอุณหภูมิของวัตถุใน 3 มิติ ซึ่งอุณหภูมิแปรตามเวลาจะเป็นฟังก์ชันของสี่ตัวแปร จะเห็นว่าความคิดต่าง ๆ ตลอดจนทฤษฎีบทและการพิสูจน์ก็ขยายมาจากฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรเป็นส่วนใหญ่ ในกรณีที่ยุ่งยากมากขึ้นก็อาจจะศึกษาข้อเท็จจริงจากฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยภาพได้

การเริ่มต้นศึกษาถึงฟังก์ชันของหลายตัวแปร ก็จะศึกษาเกี่ยวข้องกับปริภูมิที่มีมิติสูงกว่าสาม ในกรณีอย่างนี้ถ้าสามารถใช้เงื่อนไขทางเรขาคณิตและความคิดความเข้าใจก็จะช่วยได้มาก นอกจากนี้การศึกษาปริภูมิที่มีมิติสูงกว่าสามจะใช้การวิเคราะห์และใช้พีชคณิตเป็นเครื่องมือในการศึกษามากกว่าจะใช้ศึกษาจากการเขียนกราฟ ดังนั้น จึงเริ่มศึกษาถึงจุดในปริภูมิ n มิติ คุณสมบัติทางโทโพโลยีของจุด ตลอดจนลักษณะของเซตใน n มิติ แล้วจึงเริ่มต้นพิจารณาฟังก์ชันของหลายตัวแปร โดเมน เรนจ์ ลิมิตและความต่อเนื่อง เหมือนในเรื่องฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

1.2 ปริภูมิ n มิติ (n-space)

ดังได้ทราบแล้วว่าจุดในระนาบหรือปริภูมิใด ๆ จะแทนด้วยอักษรตัวเดียว **เช่น**

P, Q แต่ถ้ากำหนดแน่นอนว่าเป็นจุดในระนาบจะเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง เช่น P = (x, y), Q = (a, b) ถ้าจุด P, Q อยู่ในปริภูมิ 3 มิติ จะกำหนดให้เป็น P = (x, y, z), Q = (a, b, c) เป็นต้น และจะเรียกตัวแรกของคู่อันดับ เช่น (x, y) ว่าพิกัดที่หนึ่ง เรียก y ว่าพิกัดที่สองของจุด (x, y) สำหรับในปริภูมิ 3 มิติก็เช่นเดียวกัน ดังนั้น การกล่าวถึงจุดในปริภูมิ 4 มิติก็จะได้ว่า P = (x, y, z, w) และถ้าจุดในปริภูมิ 5 มิติก็คือ Q = (a, b, c, d, e) เป็นต้น การขยายความคิดนี้ไปถึงปริภูมิ n มิติ จะให้จุด $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และเซตของจุดต่าง ๆ ในระนาบจะใช้สัญลักษณ์ E^2 สำหรับปริภูมิ n มิติ แทนด้วย E^n

นิยาม ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก x_i เป็นเลขจำนวนจริงสำหรับทุก $i = 1, \ldots, n$ จะเรียก $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ว่าจุดในปริภูมิ n มิติ ให้

$$E^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in R\}$$

เรียก E^n ว่า **ปริภูมิ n มิติ**

ดังนั้น จะได้ว่า E^1 คือปริภูมิ 1 มิติซึ่งเป็นเส้นจำนวนจริง และ E^2 คือปริภูมิ 2 มิติซึ่งเป็นระนาบ และ E^3 คือปริภูมิ 3 มิตินั่นเอง

เนื่องจากนิยามของจุดประกอบไปด้วยเลขจำนวนจริง x_i ดังได้เห็นแล้วว่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของเลขจำนวนจริงนั้นมีอยู่ในทฤษฎีของแคลคูลัสมากมาย คุณสมบัติที่สำคัญนี้ คือคุณสมบัติทางพีชคณิต และทางโทโพโลยี (topology) ในที่นี้จะพิจารณาคุณสมบัติทางพีชคณิตก่อน จะเห็นว่าคุณสมบัติการบวกเลขจำนวนจริง สามารถขยายความคิดในทำนองเดียวกันได้บน E^n แต่คุณสมบัติการคูณไม่ได้อาศัยวิธีของเลขจำนวนจริงโดยตรง ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม ถ้า x, y เป็นจุดใน E^n ดังนั้น $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ จะได้

1) $x = y$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$
2) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
3) $c \in R$, $cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$
4) $-x = (-1)x$
5) $x - y = x + (-y)$
6) $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$

ระยะทาง (Distance)

ในระนาบระยะทางระหว่างจุด (x, y) กับ (0, 0) คือ $\sqrt{x^2+y^2}$ สำหรับใน E^n ถ้า $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะนิยามระยะทางระหว่าง x และ 0 เรียกว่า **ค่าประจำของ** x (norm of x) และใช้สัญลักษณ์ $\|x\|$ ซึ่งหมายถึง

$$\|x\| = (x\cdot x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ถ้า x และ y เป็นจุด 2 จุดใน E^n และ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

ซึ่งเป็นระยะทางระหว่างจุด x และ y นั่นเอง

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ถ้า x, y เป็นจุดใน E^n แล้ว

1) $\|x\| \geqslant 0$ และ $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ x = id, 0, ... 0)

2) $\|cx\| = |c|\ \|x\|$ เมื่อ $c \in R$

3) $\|x-y\| = \|y-x\|$

4) $|x\cdot y| \leqslant \|x\|\ \|y\|$ (Schwarz inequality)

5) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (Triangle inequality)

พิสูจน์ สำหรับข้อ 1) – 3) การพิสูจน์อาศัยนิยามโดยตรง

4) ถ้า $\alpha, \beta \in R$ ให้ $Q = \alpha x - \beta y$

ดังนั้น $\|Q\| \geqslant 0$ (จากข้อ (1))

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|Q\|^2 &= Q\cdot Q \\ &= Q\cdot(\alpha x - \beta y) \\ &= \alpha Q\cdot x - \beta Q\cdot y \\ &= \alpha(\alpha x-\beta y)\cdot x - \beta(\alpha x - \beta y)\cdot y \\ &= \alpha^2 x\cdot x - \alpha\beta y\cdot x - \beta\alpha x\cdot y + \beta^2 y\cdot y \end{aligned}$$

$$\therefore\ 0 \leqslant \alpha^2\|x\|^2+\beta^2\|y\|^2 - 2\alpha\beta x\cdot y$$

หรือ $$2\alpha\beta x\cdot y \leqslant \alpha^2\|x\|^2+\beta^2\|y\|^2$$

ซึ่งเป็นจริงเสมอสำหรับ α, β ใด ๆ

ถ้าเลือกให้ $\alpha = \|y\|$ และ $\beta = \|x\|$

$$2\|x\|\cdot\|y\|(x\cdot y) \leqslant \|y\|^2\|x\|^2+\|x\|^2\|y\|^2 = 2\|x\|^2\|y\|^2$$

ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ ดังนั้น $\|x\| \neq 0$ และ $\|y\| \neq 0$

หารตลอดด้วย $2\|x\|\cdot\|y\|$

$$\therefore \quad x\cdot y \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$$

นั่นคือ $$|x\cdot y| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$$

5)
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y)\\ &= x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y\\ &= \|x\|^2+\|y\|^2+2x\cdot y\\ &\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\cdot\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$

1.3 เซตจุดในปริภูมิ n มิติ (Point sets in the n-space)

คุณสมบัติของจุดต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงอีกทางหนึ่ง คือ ทางโทโพโลยี ซึ่งจะทำให้ได้ความคิดเกี่ยวกับจุดข้างใน จุดข้างนอก เป็นต้น นิยามแรกที่จะพิจารณาถึงคือ ย่านของจุด จะเห็นว่าในปริภูมิ 1 มิติ หรือ E^1 ได้ศึกษาเกี่ยวกับช่วงเปิด ซึ่งอยู่ในรูป $(a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon)$ เมื่อ $\varepsilon > 0$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งเป็นเซตของจุดซึ่งอยู่ห่างจาก a น้อยกว่า ε สำหรับใน E^n เซตดังกล่าวเรียกว่าเซตกลมเปิด หรือย่านของจุดนั้นเอง

นิยาม ถ้า r เป็นเลขจำนวนจริงบวก และ $p \in E^n$ **เซตกลมเปิด** (open ball) ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ p และรัศมี r คือ $B(p; r)$

$$B(p;\ r) = \{x|x\in E^n,\ \|x-p\| < r\}$$

$B(p;\ r)$ อาจจะเรียกว่าเป็น **ย่านของจุด** p (neighbourhood of the point p) รัศมี r และใช้สัญลักษณ์ $N_r(p)$

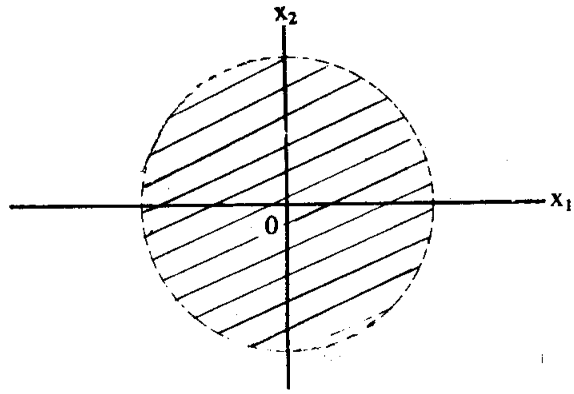
ตัวอย่าง 1. ใน R, $B(p; r)$ คือช่วงเปิด $(p-r,\ p+r)$

2. ใน R^2 ถ้า $x = (x_1, x_2)$

$$B\big((0,0);\ 1\ \big) = \{x|x\in R^2, \sqrt{x_1^2+x_2^2} < 1\}$$

จะเห็นว่า $B\big((0,\ 0);\ 1\big)$ คือ วงกลมจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) รัศมี 1 (ไม่รวมขอบ) ดัง

รูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1

3. [0, 1) ไม่ใช่ย่านของจุด 0 ใน R

นิยาม ถ้า $S \subseteq E^n$ S เรียกว่า **เซตเปิด** (open set) ก็ต่อเมื่อสำหรับสมาชิก p ทุกตัวในเซต S มี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $B(p; r) \subseteq S$

ตัวอย่าง 1. ใน R สำหรับ $a, b \in R$ และ $a < b$ จะได้ว่า ช่วงเปิด (a, b) เป็นเซตเปิด

2. ช่วง [1, 2) ไม่ใช่เซตเปิด

ถ้าพิจารณาจุด p ใด ๆ ในเซต S จุด p จะมีความสัมพันธ์กับ S หนึ่งในสามลักษณะดังนี้คือ จุด p อาจจะเป็น**จุดข้างใน** (interior point) **จุดข้างนอก** (exterior point) หรือเป็น**จุดขอบ** (boundary point) ของ S ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม ถ้า $S \subseteq E^n$, $p \in S$ แล้ว p จะเรียกว่าเป็น**จุดข้างใน**ของ S ก็ต่อเมื่อมี $r > 0$ ซึ่ง $B(p; r) \subseteq S$

สับเซตของ S ซึ่งประกอบด้วยจุดข้างในทั้งหมดของ S เรียกว่า **เซตข้างใน**ของ S แทนด้วยสัญลักษณ์ Int(S) หรือ S^0

ตัวอย่าง ใน R ถ้า $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

0 เรียกว่า เป็นจุดข้างในของ S

และ $\text{Int}(S) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ข้อสังเกต **จะเห็นว่านิยามของเซตเปิด** อาจจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ S เรียกว่าเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $Int(S) = S$

นิยาม ถ้า $S \subseteq E^n$, $p \in E^n$ แล้ว p จะเรียกว่าเป็น**จุดข้างนอก**ของ S ก็ต่อเมื่อ $p \notin S$ และมี $r > 0$ ซึ่ง $S \cap B(p; r) = \phi$

สับเซตของ S ซึ่งประกอบด้วยจุดข้างนอกทั้งหมดของ S เรียกว่า **เซตข้างนอกของ S** แทนด้วยสัญลักษณ์ $Ext(S)$

ตัวอย่าง จากตัวอย่าง $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1 เป็นจุดข้างนอกของ S

$$Ext(S) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

นิยาม ถ้า $S \subseteq E^n$ และ $p \in E^n$ แล้ว p จะเรียกว่า**จุดขอบของ** S ก็ต่อเมื่อ p ไม่เป็นทั้งจุดข้างนอกและจุดข้างในของ S

เซตซึ่งประกอบไปด้วยจุดขอบของ S แทนด้วยสัญลักษณ์ $Bd(S)$ หรือ ∂S

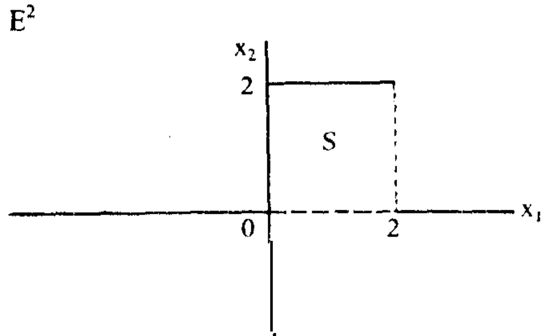
จากตัวอย่าง $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ จะเห็นว่า $Bd(S) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

นิยาม $\bar{S} = S \cup Bd(S)$

$\bar{S}$ เรียกว่า **เซตโคลเชอร์** (closure set)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $S = \{(x_1, x_2) | 0 \leqslant x_1 < 2, \; 0 < x_2 \leqslant 2\}$

ดังนั้น $S \subseteq E^2$



รูปที่ 1.2

ในที่นี้จะเห็นว่า

$$\text{Int}(S) = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 2, 0 < x_2 < 2\}$$

$$\text{Ext}(S) = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)\}$$

และ $$\text{Bd}(S) = \{(0, x_2), (2, x_2), (x_1, 0), (x_1, 2) | 0 < x_1 \leqslant 2, 0 \leqslant x_2 \leqslant 2\}$$

นั่นคือ Int(S) เป็นเซตของจุดภายในสี่เหลี่ยมทั้งหมดไม่รวมขอบ

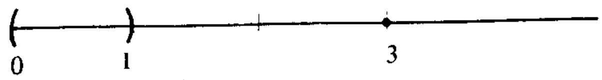
Ext(S) เป็นเซตของจุดภายนอกสี่เหลี่ยมทั้งหมดไม่รวมขอบ

และ Bd(S) เป็นเซตของจุดทั้งหลายบนเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

นิยาม ถ้า $p \in E^n$, $r > 0$

p เรียกว่า **จุดลิมิตหรือจุดเกาะกลุ่ม** (limit point or accumulation point) ของเซต S ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $B(p; r)$ จะได้ว่า $B(p; r) \cap (S - \{P\}) \neq \phi$ และเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S ใช้สัญลักษณ์ S'

ตัวอย่างที่ 1 $A = (0, 1) \cup \{3\}$



$0 \notin A$ แต่ 0 เป็นจุดลิมิตของ A

3 ไม่ใช่จุดลิมิตของ A เพราะว่ามีช่วงเปิด $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ซึ่งทำให้

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) \cap \left(A - \{3\}\right) = \phi$$

และ $A' = [0, 1]$

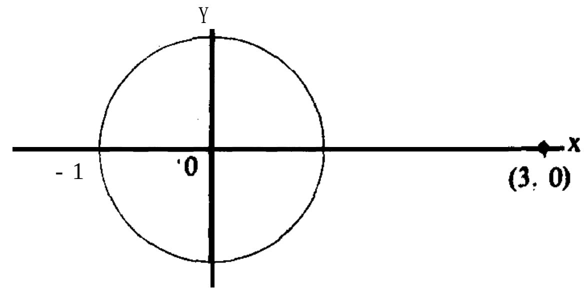
ตัวอย่างที่ 2 $B = \{p \in E^2 | 0 < \|p\| \leqslant 1\} \cup \{(3, 0)\}$

จะเห็นว่า $$\text{Int}(B) = \{p | 0 < \|p\| < 1\}$$

$$\bar{B} = \{p | \|p\| \leqslant 1\} \cup \{(3, 0)\}$$

(0, 0) เป็นจุดลิมิต แต่ (3, 0) ไม่ใช่จุดลิมิต

$$B' = \{p | \|p\| \leqslant 1\}$$



รูปที่ 1.3

นิยาม กำหนดให้ $S \subseteq E^n$ S เป็น**เซตปิด** (closed set) ก็ต่อเมื่อ ถ้า p เป็นจุดเกาะกลุ่มของ S แล้ว $p \in S$

ตัวอย่าง 1) $[-2, 3]$ เป็นเซตปิด

2) $\{p \in E^2 \mid \|p\| \leqslant 1\}$ เป็นเซตปิด

จากนิยามของเซตเปิดและเซตปิดจะได้ทฤษฎีบทของความสัมพันธ์กันดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.2 $S \subseteq E^n$ S เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $E^n - S$ (คอมพลีเมนต์ของ S) เป็นเซตปิด

จะเห็นว่าเซตที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดคือ ϕ และ E^n นั่นเอง

นิยาม $S \subseteq E^n$, S เป็น**เซตมีขอบเขต** (bounded set) ถ้ามี M (มากพอ) ซึ่งทำให้ $\|p\| < M$ สำหรับทุกค่า $p \in S$

ถ้าทุกค่า M มี $p \in S$ ซึ่งทำให้ $\|p\| \geqslant M$ จะกล่าวว่า S เป็นเซตที่**ไม่มีขอบเขต** **(unbounded set)**

ตัวอย่าง 1) $R = \{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ เป็นเซตปิดและไม่มีขอบเขต

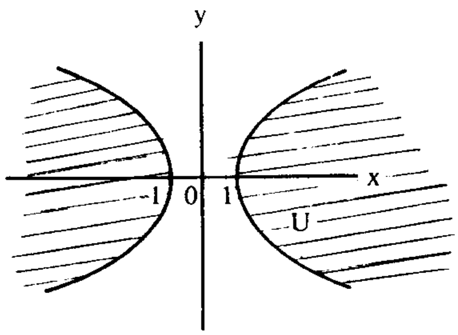
2) $S = \{p \in E^2 \mid 1 \leqslant \|p\| \leqslant 2\}$ เป็นเซตปิด, มีขอบเขต

3) เซต E^2 เป็นเซตเปิด เซตปิด ไม่มีขอบเขต และ $Bd(E^2) = \phi$

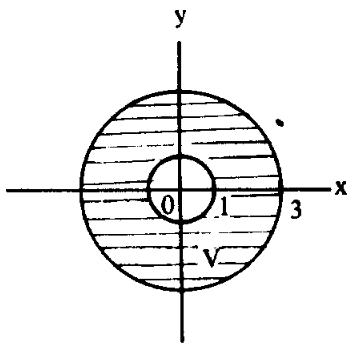
ตัวอย่าง ให้ $U = \{(x, y) \mid (x, y) \in E^2$ และ $x^2 - y^2 \geqslant 1\}$

และ $V = \{(x, y) \mid (x, y) \in E^2$ และ $1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\}$

จะเห็นว่าเซต U จะถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน แต่เซต V เป็นวงแหวนที่ติดต่อกันส่วนเดียว ดังรูป



รูปที่ 1.4



รูปที่ 1.5

ถ้าพิจารณาคุณสมบัติของเซตไม่ขาดตอน จะได้ว่า

นิยาม เซต $S \in E^n$ กล่าวว่าเป็น**เซตไม่ขาดตอน** (connected set) ถ้าไม่สามารถหาเซตเปิด A, B ซึ่ง $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$ ซึ่งมีคุณสมบัติ

1) $S \subseteq A \cup B$

2) $S \cap A \neq \phi$ และ $S \cap B \neq \phi$

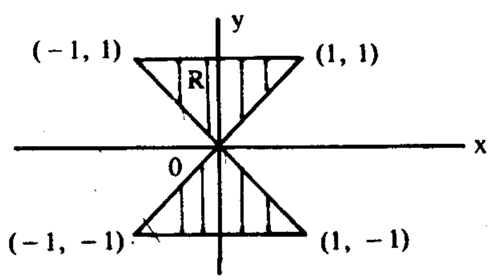
3) $S \cap (A \cap B) = \phi$

และกล่าวว่า S เป็น**เซตขาดตอน** (disconnected set) ถ้าสามารถหาเซต A, B ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว

จะเห็นว่าเซต U เป็นเซตขาดตอน และเซต V เป็นเซตไม่ขาดตอน

ตัวอย่าง ให้ $R = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1$ และ $|x| \leqslant |y| \leqslant 1\}$

จะเขียนเซต R ได้ดังรูป



รูปที่ 1.6

เซต R เป็นเซตไม่ขาดตอน เนื่องจากไม่สามารถหา A, B ซึ่งมี $R \subseteq A \cup B$ $S \cap A \neq \phi$ และ $S \cap B \neq \phi$ นอกจากนั้น $S \cap (A \cap B) = \phi$ ด้วย

แต่ถ้าเอาจุด (0, 0) ออกจากเซต R จะได้เซตที่ขาดตอน เนื่องจากสามารถหาเซต $A = \{(x, y) | y > 0\}$ และ $B = \{(x, y) | y < 0\}$ ซึ่งเป็นเซตเปิด และมีคุณสมบัติตามนิยาม 1) – 3) ได้

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงแสดงว่า $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$

2. จงพิจารณาคุณสมบัติต่าง ๆ ของเซตจุดในปริภูมิ n มิติ ของเซตซึ่งกำหนดให้ ให้ (x, y) คล้องตามสมการ

   2.1 $x^2 + y^2 = 1$

   2.2 $xy > 0$

   2.3 $|x| = |y|$

   2.4 $x^2 - y^2 \geqslant 1$

3. ถ้า $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$ จงพิจารณาคุณสมบัติต่าง ๆ ของเซตจุดในปริภูมิ n มิติ

4 . ให้ $S = \{(x, y) | x$ และ y เป็นจำนวนตรรกยะ$\}$

   3 . 1 จงหา Int(S)

   3.2 Bd(S) มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทที 1.2

6. จงพิสูจน์ว่า S เป็นเซตเปิดก็ต่อเมื่อ $S \cap Bd(S) = \phi$

7. จงพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $Bd(S) \subset S$

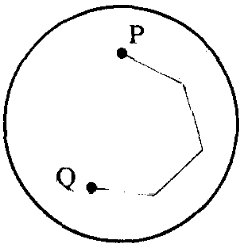
1.4 โดเมนและบริเวณ (Domain and Regions)

ฟังก์ชันตัวแปรเดียวส่วนใหญ่จะนิยามได้บนช่วงปิด เช่น ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อ $a \leqslant x \leqslant b$ และ a, b เป็นเลขจำนวนจริง ถ้าเป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร เช่น $z = f(x, y)$ จะนิยามได้บนสี่เหลี่ยมผืนผ้า $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$ เป็นต้น แต่มีฟังก์ชันเป็นจำนวนมากที่อาจจะนิยามได้บนเซตที่ยุ่งยากขึ้น เพื่อที่จะให้คลุมกรณีอื่น ๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นได้ จึงจำเป็นที่จะต้องศึกษาถึงความหมายของโดเมน

นิยาม ถ้า D เป็นเซตเปิดซึ่ง $D \neq \phi$ D เรียกว่าเป็น**โดเมน** ถ้ามีจุด P, Q ใด ๆ ใน D, P และ Q จะสามารถเชื่อมต่อกันได้โดย**เส้นขาด** (broken line) ซึ่งอยู่ภายในเซต D ทั้งหมด

กล่าวอีกนัยหนึ่งโดเมนก็คือเซตเปิดที่ไม่ขาดตอน (connected open set) นั่นเอง

ตัวอย่าง 1) เซตข้างในของวงกลมคือโดเมนนั่นเอง



รูปที่ 1.7

2) $E = \{x \ |x| > 0\}$

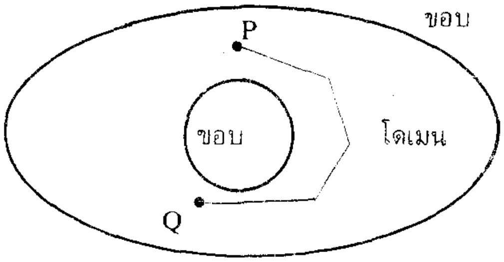
หรือ $E = \{x|x > 0\} \cup \{x|x < 0\}$

E เป็นเซตเปิด แต่ไม่เป็นโดเมนเพราะว่ามีจุด (−1, 0) และ (1, 0) อยู่ในเซต E แต่ไม่สามารถเชื่อมกันด้วยเส้นขาดใน E ได้

นิยาม ถ้า R เป็นเซตเปิดซึ่ง $R \neq \phi$ R เรียกว่าเป็น**บริเวณ** (regions) ก็ต่อเมื่อ R เป็นเซตที่ประกอบด้วยโดเมนซึ่งอาจจะรวมทั้งจุดขอบบางจุดหรือทั้งหมดก็ได้

ดังนั้น บริเวณอาจจะคือโดเมนถ้าไม่มีจุดขอบอยู่เลย แต่ถ้าบริเวณที่รวมจุดขอบทั้งหมดจะเรียกว่า **บริเวณปิด** (closed region) ซึ่งจะเป็นเซตปิด

ถ้าแทนด้วยภาพจะได้ดังนี้



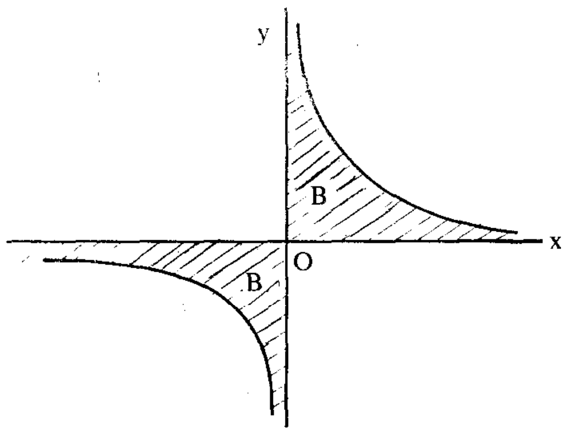
รูปที่ 1.8

ตัวอย่าง 1) $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

จะเห็นว่าเซต A คือเซตของจุดซึ่งอยู่ภายในวงกลมรัศมี 1 หน่วย รวมทั้งขอบด้วย ดังนั้น A เป็นบริเวณปิด

2) $B = \{(x, y) | xy \leqslant 1\}$

กราฟของ B เขียนได้ดังนี้



รูปที่ 1.9

ดังนั้น B เป็นบริเวณปิด

3) $C = \{(x, y) | xy < 1\}$

ในที่นี้ C เป็นโดเมน

4) $D = \{(x, y) | xy = 1\}$

จะได้ D เป็นเซตจุดขอบ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าปัญหาต่าง ๆ นั้น โดเมนจะมีอสมการหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งอสมการ ดังตัวอย่างข้างบน C เป็นโดเมน และขอบของโดเมนจะนิยามโดยมีหนึ่งสมการหรือมากกว่าหนึ่งสมการ ในขณะที่บริเวณปิดจะเป็นอสมการซึ่งเกิดจากโดเมนหรือขอบ

ฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร

ถ้า $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$ และ $n > 1$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง หรือเป็น**ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร**

ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันที่จุด x คือ f(x) หรือ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แต่ $f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ เพื่อความสะดวกจึงใช้ค่าของฟังก์ชันแทนฟังก์ชัน เช่น เมื่อ $n = 2$ เรากล่าวว่าพิจารณาฟังก์ชัน $f(x, y) = xy$ แทนการกล่าวว่า พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งค่าของฟังก์ชันคือ $f(x, y) = xy$ เป็นต้น

ในการกล่าวถึงฟังก์ชันจะเห็นว่ามีตัวแปรอยู่ 2 ชนิดคือ ตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม **ตัวแปรอิสระ** คือตัวแปร x ที่แทนจุดในโดเมน ส่วน**ตัวแปรตาม** คือตัวแปรที่ใช้แทนจุดในเรนจ์ เช่น $u = f(x, y, z)$ ในที่นี้ x, y, z เป็นตัวแปรอิสระ และ u เป็นตัวแปรตาม

การนิยามฟังก์ชันนั้นจะนิยามในโดเมน ถ้าไม่ได้กำหนดโดเมนไว้ ให้คิดว่าโดเมนเป็นสับเซตที่ใหญ่ที่สุดของ R^n ที่ทำให้การหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นเป็นไปได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$, $x, y \in R$

ดังนั้น โดเมนของ f ซึ่งทำให้ค่าของฟังก์ชันเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ $x^2 + y^2 \neq 0$ นั่นคือ

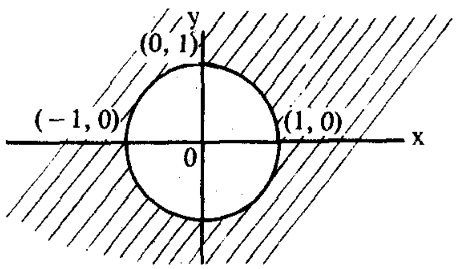
โดเมนของ
$$f = D_f = \{(x, y) | (x, y) \in R^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$$
$$= R^2 - \{(0, 0)\}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ จงเขียนรูปแสดงโดเมนของ f

ถ้า D_f คือโดเมนของ f จะได้ว่า

$$D_f = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 1 > 0\}$$
$$= \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$$

ดังนั้น โดเมนของ f จะเป็นเซตของจุดในระนาบ xy ซึ่งอยู่นอกวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และไม่รวมขอบดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาโดเมน เรนจ์ ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \arcsin(x+y-1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $|\sin\theta| \leqslant 1$ เมื่อ θ เป็นมุมใด ๆ

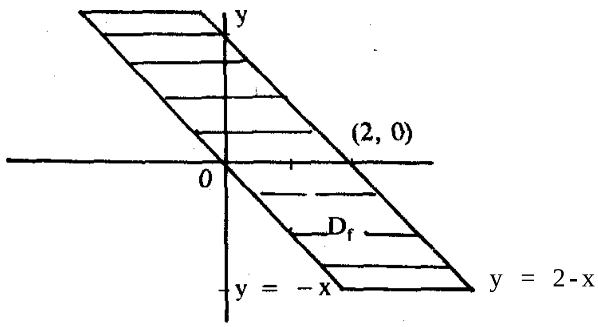
ดังนั้น $|x+y-1| \leqslant 1$ จึงจะทำให้ $f(x, y)$ หาค่าได้

ถ้า D_f เป็นโดเมนของ f และ R_f เป็นเรนจ์ของ f

$$D_f = \{(x, y) \mid -x \leqslant y \leqslant 2-x\}$$

และ

$$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



รูปที่ 1.11

สำหรับฟังก์ชันของ n ตัวแปร เราสามารถจะเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ต่อเมื่อ $n \leqslant 2$ เท่านั้น เช่น เมื่อ $n = 2$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันของ x, y กราฟของ f ก็คือกราฟของสมการ $z = f(x, y)$ ใน 3 มิตินั่นเอง

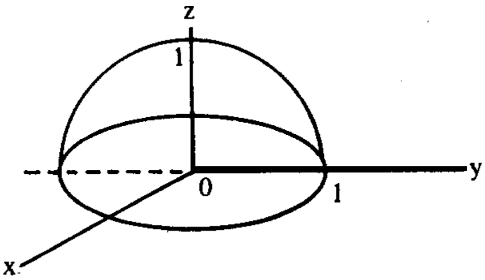
ตัวอย่าง จงพิจารณาโดเมน เรนจ์ และกราฟของฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

วิธีทำ กราฟของ f คือเซต $\{(x, y, z) \mid z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ และ $1-x^2-y^2 \geqslant 0\}$

โดเมนของ f $= \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$

เรนจ์ของ f $= \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

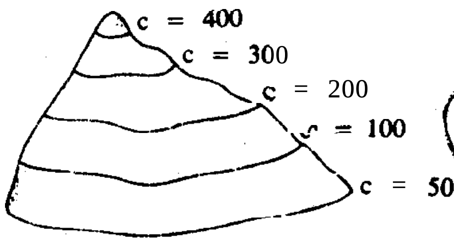
กราฟของ f คือผิวทรงกลมส่วนที่อยู่เหนือระนาบ xy ดังรูป 1.12



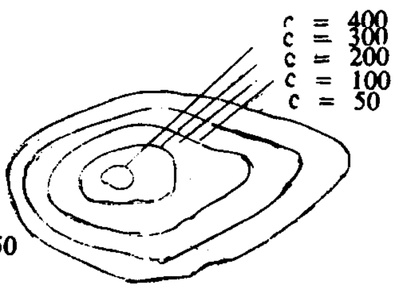
รูปที่ 1.12

1.5 เส้นโค้งระดับและพื้นผิวระดับ (Level curve and level surface)

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร มีวิธีนำการเขียนกราฟมาใช้อธิบายลักษณะของฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่ง โดยการเขียนกราฟในระนาบ xy ด้วยสมการ $f(x, y) = c_1$, $f(x, y) = c_2$, ... สำหรับค่าคงตัว $c_1, c_2, \ldots$ ใด ๆ กราฟ $f(x, y) = c$ นี้เรียกว่า **เส้นโค้งระดับ**ของ $f(x, y)$ เทคนิคนี้นำไปใช้ในการเขียนแผนที่ของภูมิประเทศซึ่งมีผิวขรุขระอยู่เสมอ ๆ เช่น ให้ $f(x, y)$ เป็นระยะสูงของจุด (x, y) หน่วยเป็นฟุต ซึ่งวัดในแนวนอนเป็นระยะ x และวัดตามแนวดิ่งเป็นระยะ y ถ้าเนินเขาวัดตามความสูงที่ระยะ c = 50, 100, 200, 300 และ 400 ฟุตตามลำดับ ดังรูป 1.13 ถ้าคนเดินตามเส้นกราฟใดรอบเนินเขาก็จะอยู่ในระดับที่มีความสูงเท่ากันตลอดเส้น รูป 1.13 เป็นรูป 3 มิติ และจะเห็นว่ารูปใน 2 มิติจะได้ดังรูปที่ 1.14 ซึ่งเป็นรูปของเส้นโค้งระดับตามค่า c ต่าง ๆ กัน และจะเห็นว่าภาพ 1.14 ก็เหมือนกับภาพซึ่งเรามองดูเนินเขาจากเครื่องบินนั่นเอง



รูปที่ 1.19



รูปที่ 1.14

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x, y) = 9-x' - y^2$ เมื่อ $D_f = [(x. y)|x^2 + y^2 \leq 9)$

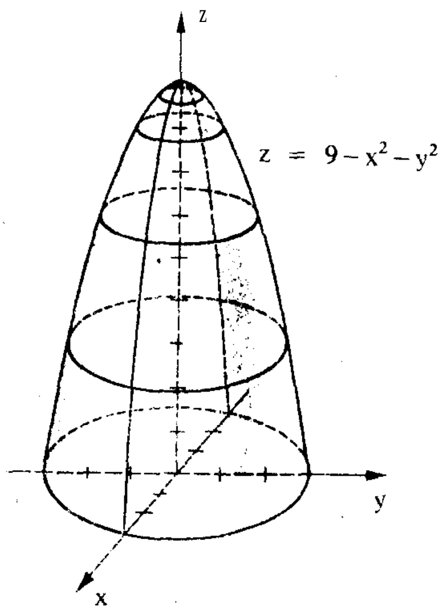
1) จงเขียนกราฟ f(x, y)

2) จงเขียนเส้นโค้งระดับ

วิธีทำ 1) กราฟของ f คือเซต $\{(x, y, z) | z = 9 - x^2 - y^2\}$

โดเมนของ $f = D_f = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

ดังนั้น กราฟนี้ก็คือ

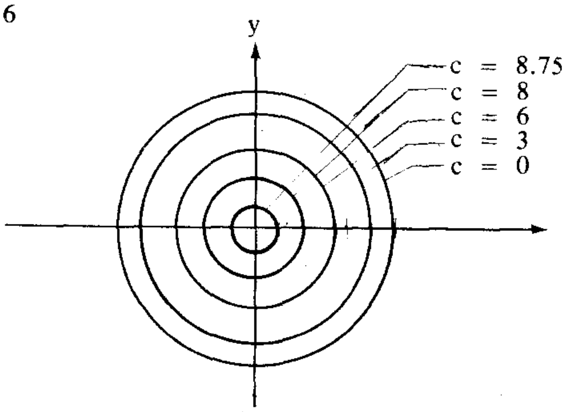


รูปที่ 1.15

2) เส้นโค้งระดับคือทางเดินของจุด $f(x, y) = c$

นั่นคือ
$$9 - x^2 - y^2 = c$$
$$x^2 + y^2 = 9 - c$$

ซึ่งมีกราฟใน 2 มิติเป็นรูปวงกลม เมื่อ $0 \leqslant c < 9$ และเส้นโค้งระดับเมื่อ $c = 0, 3, 6,$ 8 และ 8.75 ดังรูปที่ 1.16



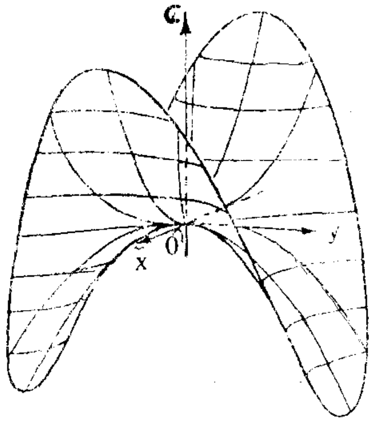
รูปที่ 1.16

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของ $f(x, y) = x^2 - y^2$ และกราฟของเส้นโค้งระดับ

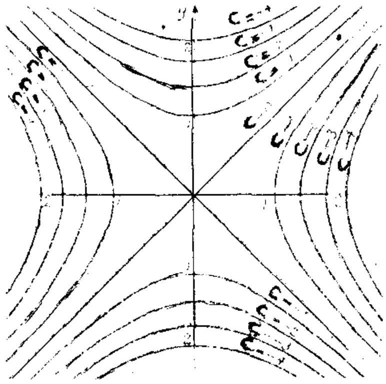
วิธีทำ กราฟของ $f(x, y) = x^2 - y^2$ คือกราฟของไฮเพอร์โบลิก พาราโบลอยด์ ดังรูป 1.17 และกราฟของเส้นโค้งระดับคือ กราฟ

$$x^2 - y^2 = c$$

ซึ่งเขียนใน 2 มิติ คือรูปไฮเพอร์โบลา ดังรูป 1.18

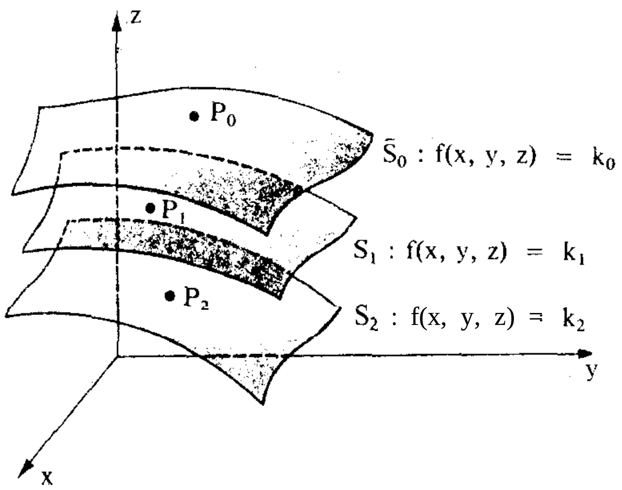


รูปที่ 1.17 2 1



รูปที่ 1.18

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x, y และ z กราฟของ $f(x, y, z) = c$ เรียกว่า **พื้นผิวระดับ** ของ f เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ดังนั้นถ้าให้ $c = k_0, k_1$ และ k_2 จะได้พื้นผิว S_0, S_1 และ S_2 ตามลำดับดังรูปที่ 1.19



รูปที่ 1.19

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิจารณาว่าเซต $S = \{(x, y) | x^2 - y^2 < 0\}$ เป็นโดเมนหรือไม่ และพิจารณาว่าเป็นบริเวณปิดหรือบริเวณเปิด
2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

   2.1 $f(x, y) = x - y$

   2.2 $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x,y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + 1}$

   3.2 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$

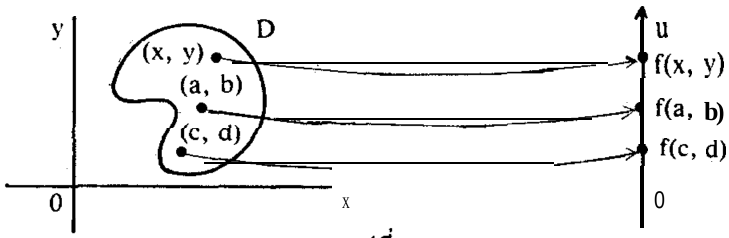
   3.3 $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$
4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ และเขียนเส้นโค้งระดับด้วย

   3.1 $z = \sin(x + y)$

   4.2 $z = x^2 + y^2 + 1$
5. จงอธิบายรูปพื้นผิวระดับของ $u = x^2 + y^2 + z^2$
6. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งระดับของ $f(x, y) = x^2y + x^2 + 2y^2$

1.6 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันใน R^n

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร สิ่งสำคัญที่ควรจะศึกษาคือ การเปลี่ยนแปลงของ $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) มีค่าเปลี่ยนไปในโดเมน D ของ f เช่น ในทางฟิสิกส์พิจารณาแผ่นโลหะบาง ๆ ซึ่งมีรูปของบริเวณ D ดังรูป 1.20



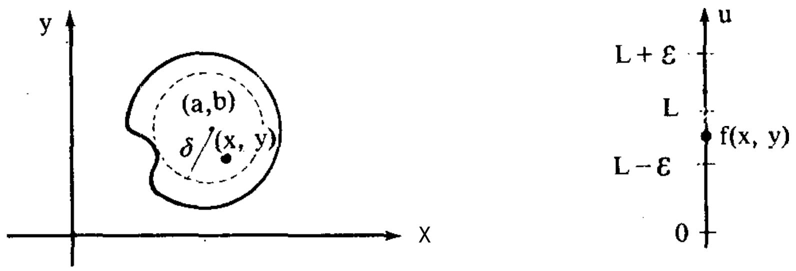
รูปที่ 1.20

สำหรับแต่ละจุด (x, y) บนแผ่นโลหะ จะมีอุณหภูมิ f(x, y) ซึ่งสอดคล้องกัน ถูกจดบันทึกไว้บนเทอร์โมมิเตอร์ให้ชื่อว่าแกน u ในขณะที่จุด (x, y) เคลื่อนที่ไปบนแผ่นโลหะ อุณหภูมิอาจจะเพิ่มขึ้น ลดลงหรือคงที่ จุดบนแกน u ซึ่งคล้องตาม f(x, y) ก็จะเคลื่อนที่ไปในทิศทางบวก ทิศทางลบ หรืออยู่กับที่ตามลำดับ ถ้าอุณหภูมิ f(x, y) เข้าใกล้ค่าคงที่ L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้จุดคงที่ (a, b) เราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \qquad \text{..........(1.6.1)}$$

ซึ่งอ่านว่า f **มีลิมิตเท่ากับ** L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (a, b) ถ้าพิจารณาความหมายเหมือนกับฟังก์ชันตัวแปรเดียว จะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ พิจารณาช่วงเปิด $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ บนแกน u ถ้า (1.6.1) เป็นจริง ดังรูปที่ 1.21 จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จุด (x, y) ภายในวงกลมรัศมี δ จุดศูนย์กลาง (a, b) ยกเว้นจุด (a, b) ทำให้ f(x, y) อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ นั่นคือ

$|f(x, y) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$



รูปที่ 1.21

นิยามโดยทั่วไปของลิมิตของฟังก์ชันใน R^n มีดังนี้

นิยาม ถ้า $f : D \to R^m$ โดยที่ $D \subseteq R^n$ ให้ $a \in R^n$ เป็นจุดลิมิตของโดเมนของ f และ L เป็นเลขจำนวนจริง จะกล่าวว่า f(x) มีลิมิตเป็น L เมื่อ x เข้าใกล้ a ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ ถ้า $0 < \|x - a\| < \delta$ และ $x \in D$

ฟังก์ชันซึ่งใช้ในการประยุกต์ ส่วนใหญ่จะเป็นฟังก์ชันค่าจริงของ 2 ตัวแปร ดังนั้น

ถ้า $f : R^2 \to R$ สัญลักษณ์ของลิมิตของ f เท่ากับ L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (a, b) คือ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \quad \text{หรือ} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y) = L$$

ซึ่งหมายถึง กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้จะมี $\delta = \delta(\varepsilon)$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ จะได้ $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ (x, y) ซึ่งทำให้ f(x, y) หาค่าได้

นิยาม $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ หมายถึง สำหรับแต่ละจำนวนจริง N จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > N$ ถ้า $0 < \|x-a\| < \delta$ และ $x \in D$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ หมายถึง สำหรับแต่ละจำนวนจริง N จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) < N$ ถ้า $0 < \|x-a\| < \delta$ และ $x \in D$

นิยาม ถ้า $a \in D_f$, f **มีความต่อเนื่อง**ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในเซต S ซึ่ง S เป็นสับเซตของโดเมนของ f เรากล่าวว่า f มีความต่อเนื่องบน S

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 + 2y$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 5$ และพิจารณาความต่อเนื่องของ f

วิธีทำ โดยนิยามลิมิตจะต้องแสดงว่า ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|x^2 + 2y - 5| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x-1| < \delta$ และ $0 < |y-2| < \delta$

กำหนด $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon/5$

เมื่อ $0 < |x-1| < \delta$ และ $0 < |y-2| < \delta$

ดังนั้น $1-\delta < x < 1+\delta$ และ $2-\delta < y < 2+\delta$

$\therefore \quad 1-2\delta+\delta^2 < x^2 < 1+2\delta+\delta^2$ และ $4-2\delta < 2y < 4+2\delta$

$5-4\delta+\delta^2 < x^2+2y < 5+4\delta+\delta^2$

$-4\delta+\delta^2 < x^2+2y-5 < 4\delta+\delta^2$

ถ้า $\delta \leq 1$ จะได้ $-5\delta < x^2+2y-5 < 5\delta$

นั่นคือ $|x^2+2y-5| < 5\delta = 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y) = 5$

พิจารณาความต่อเนื่องของ f

เนื่องจาก $f(1,2) = 1^2+2(2) = 5$

ดังนั้นโดยนิยาม $f(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่ $(1, 2)$

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมน D, α เป็นจำนวนจริง จะนิยามผลบวก ผลต่าง ผลคูณ ผลหาร ระหว่างสองฟังก์ชัน ผลคูณระหว่างฟังก์ชันกับสเกลาร์ ได้ในทำนองเดียวกันกับที่นิยามในเรื่องฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร ดังนี้

นิยาม สำหรับ x ใด ๆ ใน D

1) $(f\pm g)(x) = f(x)\pm g(x)$

2) $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$

3) $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ถ้า $g(x)\neq 0$

ทฤษฎีบทที่ 1.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน D ร่วมกัน, $D \subseteq R^n$, $\alpha \in R$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

จะได้ว่า

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = b + c$

2) $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = a\,b$

3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)][g(x)] = bc$

4) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ ถ้า $c \neq 0$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทที่ 1.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน D $\alpha \in R$ จะได้ว่าฟังก์ชัน $f \pm g$, αf, fg มีความต่อเนื่องบน D ด้วย และถ้า $g(a) \neq 0$ แล้ว f/g มีความต่อเนื่องที่จุด a ใน D ด้วย

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

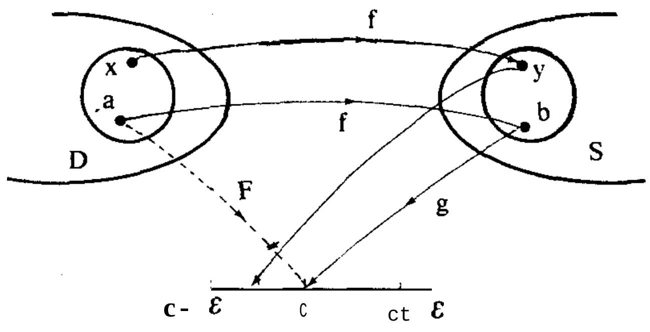
การนำฟังก์ชันที่ต่อเนื่องมาเกี่ยวข้องกัน จะอาศัยคุณสมบัติของฟังก์ชันประกอบ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซต D และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซต S ถ้า $a \in D$ และ $f(a) = b \in S$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบของ f และ g คือ F ซึ่ง

$$F(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

จะมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย

พิสูจน์ ให้ $g(b) = c = F(a)$



รูปที่ 1.22

ให้ ε เป็นจำนวนบวกที่กำหนดให้

เนื่องจาก g มีความต่อเนื่องที่ b ดังนั้น จะมีย่านของจุด b คือ V ซึ่งทำให้ $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ เมื่อ $y \in V$ และ y อยู่ในโดเมน S ของ g

แต่ $f(a) = b$ และ f มีความต่อเนื่องที่จุด a ดังนั้น จะมีย่านของจุด a คือ U ซึ่งทำให้ $f(x) \in V$ สำหรับทุกจุด $x \in U \cap D$

ถ้า $y = f(x)$ จะได้

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ } x \in U \cap D$$

หรือ $|F(x) - F(a)| < \varepsilon$

ดังนั้น F มีความต่อเนื่องที่ a

ตัวอย่าง จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$

1) $\sin(x+y)$

3) $\ell n(x^2+y^2)$

วิธีทำ 1) ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ อยู่ใน R^n

ให้ ε เป็นจำนวนบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \varepsilon$

สำหรับ $x \in R^n$ ถ้า $0 < \|x-a\| < \delta$

นั่นคือ $0 < \|x-a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2} < \delta$

พิจารณา
$$|f(x) - f(a)| = |x_1 - a_1|$$
$$= \sqrt{(x_1-a_1)^2}$$
$$\leqslant \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2} < \delta = \varepsilon$$
$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันทั่ว ๆ ไปซึ่งนิยามในลักษณะเดียวกัน

$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

จะได้ว่า f_i มีความต่อเนื่องบน R^n ทุกค่า i

2) ให้ $f(x, y) = x+y$ และ $g(z) = \sin z$

เนื่องจาก x และ y ต่างก็มีความต่อเนื่อง และโดยทฤษฎีบทที่ 1.4 จะได้ $x+y$ มีความต่อเนื่อง

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องบน R^2

และ g มีความต่อเนื่องบน R

$\therefore$ $(g \circ f)$ มีความต่อเนื่องบน R^2 ด้วย

$(g\circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = \sin(x+y)$

ดังนั้น $\sin(x+y)$ มีความต่อเนื่องบน R^2

3) ให้ $f(x, y) = x^2+y^2$ และ $g(z) = \ln z$

∴ f มีความต่อเนื่องบน R^2 และ $f(x, y) = x^2+y^2 > 0$ เมื่อ $(x, y) \neq (0, 0)$

และ g มีความต่อเนื่องบน $\{z|z \in R$ และ $z > 0\}$

ดังนั้น $(g\circ f)(x, y)$ มีความต่อเนื่องทุกจุดบน R^2 ยกเว้น $(x, y) = (0, 0)$

∴ $\ln(x^2+y^2)$ มีความต่อเนื่องทุกจุด ยกเว้น $(x, y) = (0, 0)$

1.7 ความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuities)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาถึงการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร เพื่อศึกษาถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จะเห็นว่าจากนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ในการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร จะใช้การพิจารณาค่าลิมิตทางขวามือและลิมิตทางซ้ายมือ ซึ่งมีเพียงสองทางเท่านั้นที่ x จะเข้าใกล้ a แต่สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปรมีทางเป็นไปได้จำนวนนับไม่ถ้วนที่ x จะเข้าใกล้ a ดังนั้นจะพิจารณาโดยดูจากนิยามและทฤษฎีต่อไปนี้

นิยาม ถ้า $f : R^n \to R^m$ และ S เป็นสับเซตของโดเมนของ f ถ้า a เป็นจุดลิมิตของ S และ $L \in R^m$ จะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้บน S และมีค่าเท่ากับ L ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in S}} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละค่า $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $\|f(x)-L\| < \varepsilon$

ถ้า $x \in S$ และ $0 < \|x-a\| < \delta$

ถ้า S เป็นส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้งซึ่งมี a เป็นจุดปลาย จะเกิดกรณีพิเศษที่สำคัญคือ การหาลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a บน S จะเป็นการคำนวณหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เช่นให้เส้นโค้งมีสมการพาราเมตริก คือ

$$x = \phi(t),\ y = \Psi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to 0^+} \phi(t) = x_0$ และ $\lim\limits_{t\to 0^+} \Psi(t) = y_0$

เมื่อ (x_0, y_0) เป็นพิกัดของ a

ให้ $$g(t) = f(\phi(t), \Psi(t))$$

จะเห็นว่า $$\lim_{\substack{(x, y)\to(x_0, y_0)\\ (x, y)\in S}} f(x, y) = \lim_{t\to 0} g(t)$$

แสดงให้เห็นว่าลิมิตของ f(x, y) เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (0, 0) ตามแกนนอนจากทางขวา คือ $\lim_{x \to 0^+} f(x, 0)$ และลิมิตตามแกนตั้งจากทางต่ำกว่าคือ $\lim_{y \to 0^-} f(0, y) = \lim_{t \to 0^+} f(0, -t)$ ถ้า (x, y) เข้าใกล้ (0, 0) ตามแนวซึ่งมีความชันเท่ากับ 1 จะได้ค่าเท่ากับ $\lim_{t \to 0^+} f(t, t)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ใช้ตรวจสอบความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ จากนิยามจะได้ความสัมพันธ์ของ $\lim_{x \to a} f(x)$ และ $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x)$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.6 กำหนดให้ $f : R^n \to R^m$, S เป็นสับเซตของโดเมนของ f, a เป็นจุดลิมิตของ S และ $L \in R^m$

ถ้า $$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{จะได้ว่า} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = L$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ เส้นโค้ง S ที่ผ่านจุด a ถ้าสามารถหาเส้นโค้ง S_1 และ S_2 ซึ่งทำให้ $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in S_2}} f(x)$ ย่อมสรุปได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$

วิธีทำ ในที่นี้โดเมนของ f คือ $R^2 - \{(0, 0)\}$ และ (0, 0) เป็นจุดลิมิตของโดเมนของ f

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$

ให้ $(x, y) \in D_f$ ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$

$$\|(x, y)\|^2 < \delta^2$$

$$x^2 + y^2 < \delta^2$$

พิจารณา $$\left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3|\ |y|}{x^2 + y^2} = \frac{|x^2|^{\frac{3}{2}}\ |y^2|^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2}$$

$$< \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

จงพิจารณา $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$

วิธีทำ พิจารณาบนเส้นตรง $x = 0$ (แกน y)

เมื่อ (x, y) อยู่บนเส้นตรง $x = 0$ และ $(x, y) \neq (0, 0)$ จะได้ $x = 0, y \neq 0$

ดังนั้น $$f(x, y) = 0$$

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0 \text{ บนเส้นตรง } x = 0$$

พิจารณาบนเส้นตรง $y = x$

$$f(x, x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0 \text{ บนเส้นตรง } y = x$$

จะเห็นว่าการได้ผลเช่นนี้ไม่ช่วยให้ข้อสรุปใด ๆ เกี่ยวกับ $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ เลย แต่ถ้า

พิจารณา $|x| \leqslant |\sqrt{x^2+y^2}|$ และ $|y| \leqslant |\sqrt{x^2+y^2}|$ จะได้

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$

สำหรับ $(x, y) \in D_f$ ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

จะได้ $$|f(x, y) - (0,0)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้น จากนิยามสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0, 0)} f(x,y) = 0$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x, y) \neq (0,0)$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0, 0)} f(x, y)$ (ถ้าหาได้)

วิธีทำ ให้ S_1 คือเส้นตรงซึ่งมีสมการ $y = x$

$$S_1 = \{(x, y) | y = x\}$$

ให้ S_2 คือเส้นตรงซึ่งมีสมการ $y = -x$

$S_2 = \{(x, y) | y = -x\}$

ดังนั้น (0, 0) อยู่ใน S_1 และ S_2

เมื่อ $(x, y) \in S_1$

จะได้ $$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\(x, y)\in S_1}} f(x, y) = \frac{1}{2}$$

เมื่อ $(x, y) \in S_2$

จะได้ $$f(x, y) = \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\(x, y)\in S_2}} f(x, y) = -\frac{1}{2}$$

จะเห็นว่า $$\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\(x, y)\in S_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\(x, y)\in S_2}} f(x, y)$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จงหา $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$

วิธีทำ ให้ $S_1 = \{(x, y) | y = mx\}$

$S_2 = \{(x, y) | y = x^2\}$

เมื่อ $(x, y) \in S_1$ จะได้

$$f(x, y) = \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}$$

$$= \frac{mx}{x^2+m^2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\(x, y)\in S_1}} f(x, y) = 0$$

เมื่อ $(x, y) \in S_2$ จะได้

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

ถ้าพิจารณาลิมิตซ้อน (iterated limit) ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (a, b) โดยการหาค่าลิมิตของตัวแปรอิสระทีละตัว เมื่อ x เข้าใกล้ a หรือเมื่อ y เข้าใกล้ b ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x, y)$ จะมีลิมิตซ้อน 2 รูปคือ $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ และ $\lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ และถ้าฟังก์ชันของสามตัวแปร $f(x, y, z)$ จะมีลิมิตซ้อนอยู่ 6 รูป โดยทั่วไปสำหรับฟังก์ชันซึ่งมี n ตัวแปรอิสระ จะมีลิมิตซ้อน $n!$ รูป

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4 ได้แสดงแล้วว่า

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

แต่ถ้าพิจารณาลิมิตซ้อนจะได้

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

และ
$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่าถึงแม้ $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

แต่ไม่ได้ข้อสรุปว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงพิจารณาลิมิตซ้อน

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{-y^2}{y^2} \right) = -1$$

ดังนั้น $$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) \neq \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$$

และจะเห็นว่า $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin \dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

จงพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน ลิมิตซ้อน

วิธีทำ กำหนด $\varepsilon > 0$

ให้ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

สำหรับ (x, y) ซึ่ง $\|x\| < \delta, \|y\| < \delta$

พิจารณา $\|f(x, y) - (0, 0)\| = \|x + y \sin \dfrac{1}{x}\|$

$$6 \quad \|x\| + \|y\| < 2\delta = \varepsilon$$

ดังนั้น $$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = 0$$

พิจารณา $$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} x = 0$$

แต่ $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + y \sin \dfrac{1}{x} \right)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $y \neq 0$

ข้อสังเกต ตัวอย่างที่ 3 แสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ว่า $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ และ $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ จะหาค่าได้และมีค่าเท่ากัน แต่ไม่จำเป็นจะต้องสรุปว่าลิมิตซ้อนที่เหลืออยู่คือ $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ จะหาค่าได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาลิมิตซ้อนของ $f(m, n) = \dfrac{m - n}{m + n}$ เมื่อ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก เมื่อ $m, n \to +\infty$

วิธีทำ

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \frac{m - n}{m + n} = \lim_{m \to +\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \frac{m - n}{m + n} = \lim_{n \to +\infty} (I) = 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{m-n}{m+n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{m-n}{m+n}$

ข้อสังเกต ตัวอย่างที่ 4 นี้แสดงให้เห็นว่าลิมิตซ้อนอาจจะหาค่าได้ แต่มีค่าไม่เท่ากัน เหมือนตัวอย่างที่ 2 ซึ่งสามารถสรุปได้โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบทที่ 17 พิจารณาลิมิต

(1) $\lim\limits_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$

(2) $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ และ

(3) $\lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$

ถ้า (1) หาค่าได้ (ค่านับได้หรือค่าอนันต์) และ (2) [หรือ (3)] หาค่าได้ จะได้ว่า (2) [หรือ (3)] จะต้องเท่ากับ (1) และถ้าลิมิต (1), (2), (3) หาค่าได้ จะได้ว่า (1), (2), (3) จะต้องเท่ากัน

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ฟังก์ชันที่มีความไม่ต่อเนื่องที่จุด a จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่มีความต่อเนื่อง ซึ่งความไม่ต่อเนื่องนี้จะใช้ได้ใน 2 ทางคือ อย่างแรกคือ ฟังก์ชันนิยามที่จุด a ได้ แต่ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดนั้น เช่น กำหนด f(x, y) ดังนี้

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{เมื่อ } \|(x, y)\| \leqslant 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \|(x, y)\| > 1 \end{cases}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องทุกจุด ยกเว้นที่ (x, y) ซึ่ง $\|(x, y)\| = 1$ นั้นคือ ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดในวงกลมจุดศูนย์กลาง (0, 0) รัศมี 1 แต่ถ้าพิจารณา f บนเซต D ซึ่ง

$$D = \{(x, y) \mid \|(x, y)\| \leqslant 1\}$$

จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องทุกจุดใน D

ความไม่ต่อเนื่องที่ใช้ในอีกทางหนึ่งคือ จะใช้ในกรณีที่ฟังก์ชันนิยามที่จุดนั้นไม่ได้ เช่น ถ้าเป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร ให้

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันนี้นิยามที่ x = 0 ไม่ได้

ดังนั้น จะได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 0

นอกจากนั้น ความไม่ต่อเนื่องอาจจะจำแนกลักษณะของความไม่ต่อเนื่องได้ 2 ชนิด

คือ **ความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้** (removable discontinuity) ซึ่งหมายถึง ถ้า $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าได้ แต่ค่าฟังก์ชันที่ a หาไม่ได้ หรือหาได้แต่ไม่เท่ากับค่าลิมิต ความไม่ต่อเนื่องอีกชนิดหนึ่งเรียกว่า **ความไม่ต่อเนื่องแบบเอสเซนเชียล** (essential discontinuity) ถ้า $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ดังได้แสดงในตัวอย่างแล้วว่า $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น ฟังก์ชันนี้มีความไม่ต่อเนื่องแบบเอสเซนเชียล

ตัวอย่างที่ 2
$$g(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

จะเห็นว่า $g(0, 0)$ หาไม่ได้ แต่ $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y)$ หาค่าได้เท่ากับ 0 เพราะว่าถ้าให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

ให้ (x, y) อยู่ในโดเมนของ g ซึ่ง

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$
$$x^2 + y^2 < \delta^2$$

พิจารณา $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} - 0\right| = \dfrac{|x^2y^2|}{x^2 + y^2} \leqslant \dfrac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$

ดังนั้น $g(x, y)$ มีความไม่ต่อเนื่องที่ขจัดได้

แบบฝึกหัด 1.3

จงพิจารณาว่าลิมิตของฟังก์ชันเหล่านี้หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้ให้พิสูจน์

1. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$
2. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \sqrt{xy}$
3. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$
4. $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x=-y^*}{x^2 + y^2}$

5. ถ้า $f(x, y) = 3x - 2y$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x, y)\to(4, -1)} f(x, y) = 14$

6. ถ้า $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของ f

7. กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ ถ้า $x + y \neq 0$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = 1$ และ $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = -1$

และพิจารณาว่า $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ หาค่าได้หรือไม่

8. กำหนดให้ $f(x, y) = x + y\sin\dfrac{1}{x}$ ถ้า $x \neq 0$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) \neq \lim\limits_{y\to 0}$ 'Iii $f(x, y,)$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันต่อไปนี้ ข้อ 9 - 13

9. $\sin(x^2y)$

10. $\dfrac{e^{x+y}}{x+y}$

11. $\ell n(x - y)$

12. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{X-Y} & \text{เมื่อ } x \neq y \\ x - y & \text{เมื่อ } x = y \end{cases}$

13. $f(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$ เมื่อ $(x, y) \neq (0, 0)$

14. 14.1 ถ้า $\lim\limits_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ หาค่าได้ และ $\lim\limits_{x\to a} (\lim\limits_{y\to b} f(x, y))$ หาค่าได้

(หรือ $\lim\limits_{y\to b} (\lim\limits_{x\to a} f(x, y))$ หาค่าได้)

จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x, y))$$

(หรือ $$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x, y))$$)

14.2 จงแสดงว่าถ้า $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, $\lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x, y))$, $\lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x, y))$ หาค่าได้แล้ว ลิมิตทั้งสามนี้จะเท่ากัน

14.3 จงใช้ข้อ 14.2 แสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

บทสรุป

จะเห็นว่าจุดในปริภูมิ n มิติ จะมีนิยามต่าง ๆ ขยายจากนิยามของจุดใน E^1 หรือ E^2 นั่นเอง เช่น สูตรระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ใน E^n คือ

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

ถ้าพิจารณาใน E^2 จะได้ $\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ ซึ่งเราทราบมาแล้ว นอกจากนั้นคุณสมบัติของจุดต่าง ๆ ทางโทโพโลยี ทำให้ได้ความคิดเกี่ยวกับจุดใน E^n หรือลักษณะของเซตต่าง ๆ ใน E^n สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปรก็พิจารณาโดเมนและเรนจ์เช่นเดียวกับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร แต่จะสามารถเขียนกราฟได้เฉพาะเมื่อ $n \leqslant 2$ เท่านั้น เส้นโค้งระดับและพื้นผิวระดับ ใช้อธิบายลักษณะของฟังก์ชันได้อีกวิธีหนึ่ง ซึ่งมีประโยชน์ใช้ในทางประยุกต์

เมื่อทราบถึงลักษณะจุด, เซต และฟังก์ชันใน E^n แล้ว ก็พิจารณาต่อไปถึงลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่อง นิยามลิมิตของฟังก์ชันใน E^n ก็คล้ายกับใน E^1 หรือใน R ซึ่งเคยทราบมาแล้วจากแคลคูลัสเบื้องต้น เพียงแต่ระยะทางใน E^n ใช้ในรูปของค่าประจำเท่านั้น สำหรับความต่อเนื่องของฟังก์ชันก็นิยามเหมือนกับใน R แต่ในการพิจารณา $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ นั้น การที่ x เข้าใกล้ a ใน E^n มีทางเป็นไปได้จำนวนนับไม่ถ้วน จึงต้องพิจารณาถึง $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้บนเซต S เมื่อ $S \subseteq D(f)$

ดังนั้น ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันมีความไม่ต่อเนื่องก็จะหาเซต S_1 และ S_2 ซึ่งทำให้ $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in S_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in S_2}} f(x)$ นั่นเอง นอกจากนั้นการพิจารณาว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ถ้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปร จะพิจารณาลิมิตซ้อน 2 รูป จะไม่เท่ากัน เช่น $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ ก็จะได้ลิมิตซ้อน คือ $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y)$ และ $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$

แบบฝึกหัดระคนบทที่ 1

1. เซตใดเป็นเซตเปิด และเซตใดเป็นเซตปิด

   1.1 $A = \{(x, y) | 0 < y < 2x-3\}$

   1.2 $B = \{(x, y) | (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4\}$

   1.3 $C = \{(-2, 1), (-2, 4)\}$

2. ถ้า A, B เป็นสับเซตของ R^n จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $Bd(B-A) \subseteq Bd(A) \cup Bd(B)$

3. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x, y) = \dfrac{(xy-5)}{2\sqrt{y-x^2}}$

4. จงเขียนเส้นโค้งระดับของ

   4.1 $f(x, y) = y^2 - x^2$

   4.2 $f(x, y) = y - \sin x$

5. จงเขียนพื้นผิวระดับของ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

6. จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x, y) \to (1, 2)} \dfrac{y-2x}{4x^2-y^2}$

7. จงพิจารณาว่าลิมิตหาค่าได้หรือไม่

   7.1 $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

   7.2 $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

8. ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องหรือไม่

   8.1 $f(x, y) = \ln(x+y-1)$

   8.2 $f(x, y, z) = 2x + ye^z$