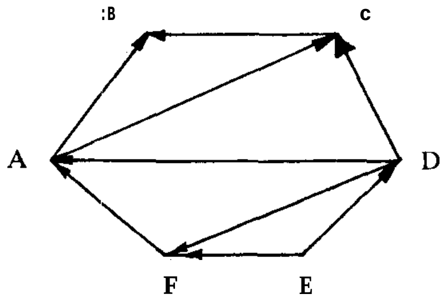
บทที่ 4
เวกเตอร์สเปซ

1. ให้ ABCDEF เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า มุมเท่า ดังรูป 4.1.1



รูป 4.1.1

1.1) จงหาว่า $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ตอบ $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\overrightarrow{ED}$

1.2) จงหาว่า $\overrightarrow{EF}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ตอบ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$

1.3) จงหาว่า $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ตอบ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

1.4) จงหาว่า $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ตอบ $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$

1.5) จงหาว่า $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}$ เท่ากับเวคเตอร์ใด

ตอบ จาก $\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DA}$

และ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$

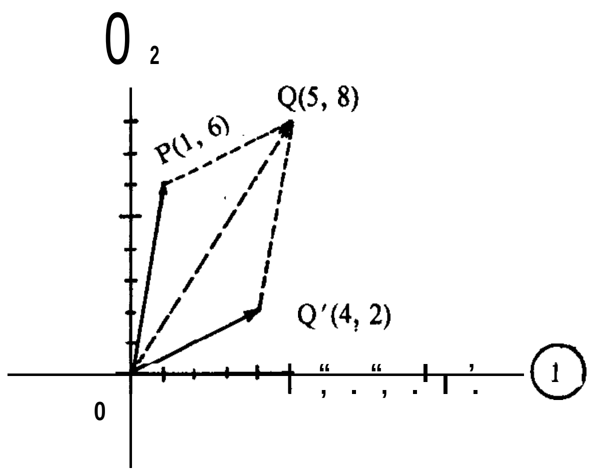
2. ถ้า $\overrightarrow{OP}$ แสดงได้ด้วย ordered n - tuples $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ และ $\overrightarrow{PQ}$ คิดเสียว่าเป็น $\overrightarrow{OQ'}$ แสดงได้ด้วย ordered n-tuples $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ จงหา $\overrightarrow{OQ}$ (หรือ X + Y) สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1) $(x_1, x_2) = (1, 6)$ และ $(y_1, y_2) = (4, 2)$ (เขียนรูปแสดงด้วย)

วิธีทำ

$$\because \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\ (\overrightarrow{OQ'})$$
$$= (1, 6) + (4, 2)$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (5, 8)$$

ดังรูป 4.1.2



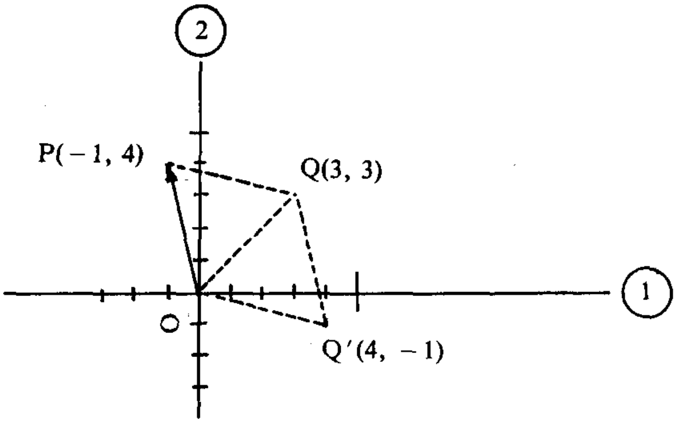
รูป 4.1.2

2.2) $(x_1, x_2) = (-1, 4)$ และ $(y_1, y_2) = (4, -1)$ เขียนรูปแสดงด้วย

วิธีทำ

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\ (\overrightarrow{OQ'})$$
$$= (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$
$$= (-1, 4) + (4, -1)$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (3, 3)$$

ดังรูป 4.1.3



รูป 4.1.3

2.3) $(x_1, x_2) = (0, 0)$ และ $(y_1, y_2) = (4, -2)$

94
วิธีทำ

$$\because \quad \overrightarrow{OQ} = OP + \overrightarrow{PQ} \ (\overrightarrow{OQ'})$$

$$= (0, 0) + (4, -2)$$

$$= (4, -2)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (4, -2)$$

2.4) $(x_1, x_2) = (-2, -5)$ และ $(y_1, y_2) = (-1, 6)$

วิธีทำ

$$\cdot\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \ (\overrightarrow{OQ'})$$

$$= (-2, -5) + (-1, 6)$$

$$= (-3, 1)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (-3, 1)$$

2.5) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -4)$ และ $(y_1, y_2, y_3) = (-4, 1, 2)$

วิธีทำ

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \ (\overrightarrow{OQ'})$$

$$= (2, 1, -4) + (-4, 1, 2)$$

$$= (2 + (-4), 1 + 1, -4 + 2)$$

$$= (-2, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (-2, 2, -2)$$

2.6) $(x_1, x_2\ x_3, x_4) = (1, 3, -1, -3)$ และ $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (3, -2, -4, 2)$

วิธีทำ

$\because \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\ (\overrightarrow{OQ'})$

$\quad\quad = (1, 3, -1, -3) + (3, -2, -4, 2)$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ}\ (4, 1, -5, -1)$

2.7) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

และ $(y_2, y_3, y_4,)\ y_5, = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$

วิธีทำ

$\because \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\ (\overrightarrow{OQ'})$

$\quad\quad = (1, 2, 3, 4, 5, 6) + (6, 5, 4, 3, 2, 1)$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (7, 7, 7, 7, 7, 7)$

3. ถ้าให้ $\overrightarrow{OQ} = c\ \overrightarrow{OP}$ และถ้า $\overrightarrow{OP}$ แสดงได้ด้วย $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จงหา $\overrightarrow{OQ}$ (หรือ cX) ว่าแสดงได้ด้วย ordered n-tuples ใด สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1) $(x_1, x_2) = (6, 2)$ และ $c = 2$ (เขียนรูปแสดงด้วย)

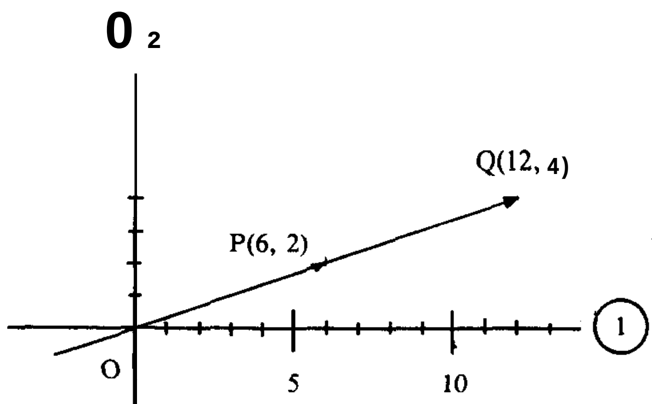
วิธีทำ

$\because \quad \overrightarrow{OQ} = c\ \overrightarrow{OP}$

$\quad\quad = 2\ (6, 2)$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (12, 4)$

ดังรูป 4.1.4



รูป 4.1.4

3.2) $(x_1, x_2) = (-6, 2)$ และ $c = -3$ (เขียนรูปแสดงด้วย)

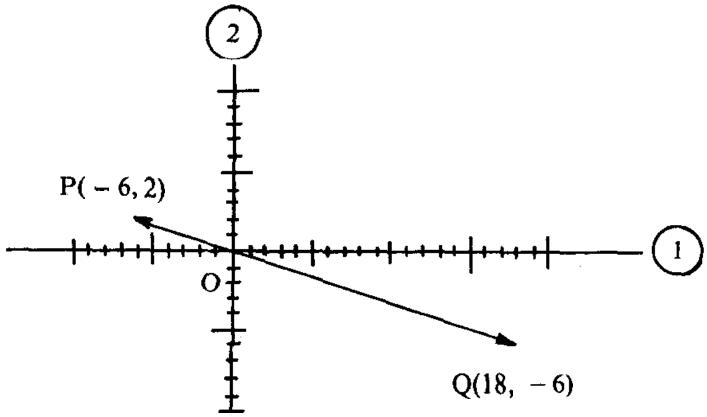
วิธีทำ

$\because \quad \overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$

$= -3\,(-6, 2)$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (18, -6)$

ดังรูป 4.1.5



รูป 4.1.5

3.3) $(x_1, x_2\ x_3) = (1, 0, -5)$ และ $c = 5$

วิธีทำ

$\overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$

$= 5(1, \ 0, \ -5)$

$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (5, \ 0, \ -25)$

3.4) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, 4, 2, 6)$ และ $c = \frac{1}{2}$

วิธีทำ

$\because \quad \overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$

$$= \frac{1}{2}(-2, 0, 4, 2, 6)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (-1, 0, 2, 1, 3)$$

3.5) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (8, 3, 2, 1, 4, -6, -2)$ และ $c = 8$

วิธีทำ

$$\because \quad \overrightarrow{OQ} = c\,\overrightarrow{OP}$$

$$= 8(8, 3, 2, 1, 4, -6, -2)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OQ} = (64, 24, 16, 8, 32, -48, -16)$$

4. จงหาค่าของ x และ y ถ้า

4.1) $(x, x + y) = (y - 2, 6)$

วิธีทำ

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$$x = y - 2 \quad \text{..........(1)}$$

$$x + y = 6 \quad \text{..........(2)}$$

แทนค่า x ลงใน (2) จะได้ว่า

$$y - 2 + y = 6$$

$$\therefore y = 4$$

แทน y ลงใน (1) จะได้ $x = 2$

ดังนั้น จึงได้ว่า $x = 2,\ y = 4$

4.2) $y(1, 3) = -5(-4, 3)$

วิธีทำ

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$y = 20$ และ $3y = -15$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ทั้งสองค่า

จึงกล่าวได้ว่า ไม่มีค่า y ที่สอดคล้อง

4.3) $x(2, y) = y(1, -2)$

วิธีทำ

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$2x = y$ .... (1)

และ $xy = -2y$ .... (2)

จาก (1) จะได้ว่า $x = \frac{y}{2}$ .... (3)

แทนค่า x ลงใน (2) จะได้

$$\frac{y}{2}(y) = -2y$$

$$\therefore\ y^2 + 4y = 0$$

$$y(y + 4) = 0$$

$\therefore$ $y = 0$ หรือ $y = -4$

จาก (1) จะได้ว่า ถ้า $y = 0$ แล้ว $x = 0$ ด้วย

และ ถ้า $y = -4$ แล้ว $x = -2$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า $x = 0, y = 0$ กับ $x = -2, y = -4$

5. จงหาค่า x, y และ z ถ้า

5.1) $(-1, 3, 3) = x(1, 1, 0) + y(0, 0, -1) + z(0, 1, 1)$

วิธีทำ

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$x = -1$ .... (1)

$x + z = 3$ .... (2)

$-y + z = 3$ .... (3)

แทนค่า $x = -1$ ลงใน (2) จะได้ว่า $z = 4$

แทนค่า $z = 4$ ลงใน (3) จะได้ว่า $y = 1$

ดังนั้น จึงได้ว่า $x = -1, y = 1, z = 4$

5.2) $(2, 2, 6) = x(1, 1, 1) + y(1, 0, 3) + z(2, 1, 1)$

วิธีทำ

จากการเท่ากันจะได้ว่า

$x + y + 2z = 2$ ....(1)

$x + z = 2$ ....(2)

$x + 3y + z = 6$ ....(3)

(3) – (2) จะได้ $3y = 4$

$\therefore y = \frac{4}{3}$

(3) – (1) จะได้ $2y - z = 4$ ....(4)

แทนค่า $y = \frac{4}{3}$ ลงใน (4) จะได้ $z = \frac{20}{3}$

unu $z = \frac{20}{3}$ ลงใน (2) จะได้ $x = \frac{-14}{3}$

ดังนั้น เราได้จึงได้ $x = -\frac{14}{3}$, $y = \frac{4}{3}$ และ $z = \frac{20}{3}$

6. ให้ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ จงแสดงว่า สำหรับเวคเตอร์ $X = (x_1, x_2, x_3)$ ใน $R^{(3)}$ ใด ๆ จะได้ว่า $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

ให้ $X = (x_1, x_2, x_3)$ เป็นเวคเตอร์ใน $R^{(3)}$ ใด ๆ

พิจารณา
$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$
$$= (x_1, x_2, x_3)$$
$$= X$$

นั่นแสดงว่า $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ตามต้องการ

7. ถ้า X, Y, Z เป็น ordered n-tuple และ c, d เป็นจำนวนจริงแล้ว จงพิสูจน์ว่า

1.1) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

พิสูจน์

ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

และ $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ได้ว่า

$$Y + Z = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$= (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$$

$$\therefore X + (Y + Z) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n + z_n)$$

และ $X + Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\because (X + Y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n + z_n)$$

นั่นแสดงว่า $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

7.2) $X + 0 = X = 0 + X$ โดย $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ อยู่ใน $R^{(n)}$

พิสูจน์

ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

และ $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ จะได้ว่า

$$X + 0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$$
$$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= X$$

$\therefore X + 0 = X$

และ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$$= (0 + x_1, 0 + x_2, \ldots, 0 + x_n)$$
$$= (0, 0, \ldots, 0) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= 0 + X$$

นั่นแสดงว่า

$$X + 0 = X = 0 + X$$

7.3) $x + (-X) = 0 = (-X) + x$ โดย $-x$ ก็คือ $(-1)X$

พิสูจน์

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

และ $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ จะได้ว่า

$$x + (-X) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots, x_n - x_n)$$
$$= (0, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$= 0$$
$$\therefore X + (-X) = 0$$

และ
$$(-X) + x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2, \ldots, -x_n + x_n)$$
$$= (0, 0, \ldots, 0)$$
$$= 0$$
$$\therefore (-X) + x = 0$$

นั่นแสดงว่า

$$x + (-X) = 0 = (-X) + x$$

7.4) $1x = x = x1$

พิสูจน์

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะได้

$$1x = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= x$$
$$\therefore 1X = x$$

และ
$$x1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)1$$
$$= (x_1 1, x_2 1, \ldots, x_n 1)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= x$$
$$\therefore x1 = x$$

นั่นแสดงว่า

$$1X = X = X1$$

7.5) $c(dX) = (cd)X$

พิสูจน์

ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dX &= d(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= (dx_1, dx_2, \ldots dx_n) \\ \therefore c(dX) &= c(dx_1, dx_2, \ldots dx_n) \\ &= (cdx_1, cdx_2, \ldots cdx_n) \\ &= cd(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= (cd)X \end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า

$$c(dX) = (cd)X$$

7.6) $c(X + Y) = cX + cY$

พิสูจน์

ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

$Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$

และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1, x_2, \ldots x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \\ \therefore c(X + Y) &= c(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \\ &= (cx_1 + cy_1, cx_2 + cy_2, \ldots cx_n + cy_n) \\ &= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) + (cy_1, cy_2, \ldots cy_n) \\ &= c(x_1, x_2, \ldots, x_n) + c(y_1, y_2, \ldots y_n) \\ &= cX + cY \end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า

$$c(X + Y) = cX + cY$$

7.7) $(c + d)X = cX + dX$

พิสูจน์

ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(c + d)X &= (c + d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= ((c + d)x_1, (c + d)x_2, \ldots, (c + d)x_n) \\
&= (cx_1 + dx_1, cx_2 + dx_2, \ldots, cx_n + dx_n) \\
&= (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) + (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \\
&= c(x_1, x_2, \ldots, x_n) + d(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= cX + dX
\end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า

$$(c + d)X = cX + dX$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.2

1. ให้ V เป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงลบทั้งหมด ถ้า $\alpha \odot \beta = \alpha\beta$ (คือการคูณเลขจำนวนจริงแบบธรรมดา) เมื่อ α, β อยู่ใน V แล้ว อยากทราบว่า เราจะกำหนดการกระทำ $\odot$ นี้ให้กับ V ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

เราพบว่า เราไม่สามารถกำหนดการกระทำ $\odot$ ให้เป็นการคูณเลขจำนวนจริงแบบธรรมดาได้ เพราะว่า สำหรับทุก ๆ α, β ที่อยู่ใน V แล้ว $\alpha \odot \beta = \alpha\beta$ ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริงบวก จึงไม่ได้อยู่ใน V นั่นแสดงว่า เราไม่สามารถกำหนดการกระทำ $\odot$ ดังกล่าวให้กับ V ได้

2. จงแสดงว่า $R^{(2)}$ เป็นเวคเตอร์สเปซ

ให้ $\alpha = (a_1, a_2)$

$\beta = (b_1, b_2)$

$\gamma = (c_1, c_2)$

c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

วิธีทำ

(1) $\alpha + \beta = (a_1, ad + (b_1, b_2)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$\therefore a + \beta \in R^{(2)}$

(2) $\alpha + \beta = (a_1, a_2) + (b_1, b_2)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$

$= (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$

$= \beta + \alpha$

(3) $(\alpha + \beta) + \gamma = ((a_1, a_2) + (b_1 + b_2)) + (c_1, c_2)$

$= ((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) + (c_1, c_2)$

$= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)$

$$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$$

$$= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$

$$= (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2))$$

$$= \alpha + (\beta + \gamma)$$

(4) จะเห็นว่า θ คือ (0, 0)

$$\because\ a + \theta = (a_1, a_2) + (0, 0)$$

$$= (a_1 + 0, a2 + 0)$$

$$= (a_1, a_2)$$

$$= a$$

(5) $$a + (-a) = (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2)$$

$$= (a_1 - a_1, a2 - a_2)$$

$$= (0, 0)$$

$$= \theta$$

(6) $$\overline{c_\alpha} = c(a_1, a_2) \text{ เมื่อ } c \in R$$

$$= (ca_1, ca_2) \text{ อยู่ใน } R^{(2)}$$

$\therefore$ ca $\in R^{(2)}$

(7) $$c(\alpha + \beta) = c((a_1, a3 + (b_1, b_2))$$

$$= (c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2))$$

$$= (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2)$$

$$= (ca_1, ca_2) + (cb_1, cbz)$$

$$= c(a_1, a_2) + c(b_1, b_2)$$

$$= c\alpha + c\beta$$

(8) $$(c + d) a = (c + d)(a_1, a_2)$$

$$= ((c + d) a_1, (c + d) a_2)$$

$$= (ca_1 + da_1, ca_2 + da_2)$$

$$= (ca_1, ca_2) + (da_1, da_2)$$

$= c(a_1, a_2) + d(a_1, a_2)$

$= ca + da$

(9) $c(d\alpha) = c(d(a_1, a_2))$

$= c(da_1, da_2)$

$= (cda_1, cda_2)$

$= cd(a_1, a_2)$

$= (cd)\alpha$

(10) $1\alpha = 1(a_1, a_2)$

$= (a_1, a_2)$

$= \alpha$

ดังนั้น เซ็ต $R^{(2)}$ มีคุณสมบัติเป็นเวคเตอร์สเปซ

3. ให้ $V = \{\theta\}$ ซึ่งเป็นเซ็ตที่มีอีลีเมนต์เพียงตัวเดียว คือ เวคเตอร์ศูนย์ และกำหนดให้ $\theta \oplus \theta = \theta$, $c \odot \theta = \theta$ เราสามารถแสดงในทำนองที่คล้ายกันกับข้อ 2 ได้ว่า $V = \{\theta\}$ ก็มีคุณสมบัติเป็นเวคเตอร์สเปซด้วย

4. ให้ V เป็นเซ็ตของจำนวนจริงบวก กำหนดการบวกและการคูณด้วยสกาลาร์ดังนี้ คือ $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$ ($\oplus$ คือ การคูณธรรมดา) และ $c \odot \alpha = \alpha^c$ เมื่อ $\alpha, \beta \in V$ และ $c \in R$ จงแสดงว่า V เป็นเวคเตอร์สเปซ

วิธีทำ

ให้ α, β, γ เป็นเลขจำนวนจริงบวกใด ๆ , c, d เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$ คือ $\alpha\beta$ เป็นเลขจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $\alpha \oplus \beta \in V$

(2) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$

$= \beta\alpha$

$= \beta \oplus \alpha$

(3) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta) \oplus \gamma$

$= (\alpha\beta)\gamma$

$= \alpha(\beta\gamma)$

$= \alpha(\beta \oplus \gamma)$

$= \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$

(4) จะเห็นว่า θ ที่อยู่ใน v คือ 1 ($\theta = 1$)

$\therefore \alpha \oplus 1 = \alpha \cdot 1$

$= 1 \cdot \alpha$

$= a$

$\because \alpha \oplus 1 = a = 1 \oplus \alpha$

(5) $a \oplus (-a) = \alpha(\alpha^{-1})$

$= \alpha(\frac{1}{\alpha})$

$= 1$

$\therefore a \oplus (-a) = \theta$

(6) $c \odot \alpha = \alpha^c$ ซึ่งอยู่ใน V คือเป็นจำนวนจริงบวก

$\therefore c \odot \alpha \in V$

(7) $c \odot (\alpha \oplus \beta) = c \odot (\alpha\beta)$

$= (\alpha\beta)^c$

$= \alpha^c\beta^c$

$= (c \odot a) \oplus (c \odot \beta)$

(8) $(c + d) \odot a = (a)^{c+d}$

$= (a^c)(\alpha^d)$

$= (c \odot a) \oplus (d \odot a)$

(9) $c \odot (d \odot a) = c \odot (a^d)$

$= (\alpha^d)^c$

$= \alpha^{dc}$

$= \alpha^{cd}$

$= cd \odot \alpha$

(10) $\quad 1 \odot \alpha = \alpha^1$

$\qquad\qquad = \alpha$

ดังนั้น เซ็ต V ซึ่งเป็นเซ็ตของจำนวนจริงบวก เป็นเวคเตอร์สเปซ ภายใต้การกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ที่กำหนดให้

5. ให้ U และ W เป็นเวคเตอร์สเปซบนจำนวนจริง ให้ V เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (u,w) เมื่อ u อยู่ใน U และ w อยู่ใน W นั่นคือ $V = \{(u,w) | u \in U, w \in W\}$ จงแสดงว่า V เป็นเวคเตอร์สเปซ ด้วยการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ที่กำหนดให้ คือ $(u, w) \oplus (u', w') = (u + u', w + w')$ และ $c \odot (u, w) = (cu, cw)$ เมื่อ $u, u' \in U$ และ $w, w' \in W$ และ $c \in R$

วิธีทำ

สามารถแสดงวิธีการกระทำได้ในทำนองที่คล้ายกับข้อ 2.

6. ให้ V เป็นเซ็ตของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงแบบต่อเนื่อง สำหรับ f และ g ที่อยู่ใน V กำหนดการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ โดย $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$ และ $(c \odot f)(t) = cf(t)$ สำหรับ- f, g ที่อยู่ใน V และ c เป็นสกาลาร์ จงแสดงว่า V เป็นเวคเตอร์สเปซ

วิธีทำ

(1) $\because (f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงแบบต่อเนื่อง

$\therefore (f \oplus g) \in V$

(2)
$$\begin{aligned} \because (f \oplus g)(t) &= f(t) + g(t) \\ &= g(t) + f(t) \\ &= (g \oplus f)(t) \\ \therefore f \oplus g &= g \oplus f \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} ((f \oplus g) \oplus h)(t) &= (f \oplus g)(t) + h(t) \\ &= (f(t) + g(t)) + h(t) \\ &= f(t) + (g(t) + h(t)) \end{aligned}$$

$$= f(t) + (g \oplus h)(t)$$

$$= \big(f \oplus (g \oplus h)\big)(t)$$

$\therefore (f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$

(4) จะเห็นว่า $\theta \in V$ คือ $\theta(t) = 0$ ซึ่ง

$$(f \oplus \theta)(t) = f(t) + \theta(t)$$

$$= f(t) + 0$$

$$= f(t)$$

$$\therefore f \oplus \theta = f$$

(5) $\because \big(f \oplus (-f)\big)(t) = f(t) + (-f)(t)$

$$= f(t) - f(t)$$

$$= 0$$

$$= \theta(t)$$

$$\therefore f \oplus (-f) = \theta$$

(6) $\because (c \odot f)(t) = cf(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงแบบต่อเนื่อง

$$\therefore c \odot f \in V$$

(7) $\because (c \odot (f \oplus g))(t) = c \odot (f(t) + g(t))$

$$= cf(t) + cg(t)$$

$$= (c \odot f)(t) + (c \odot g)(t)$$

$$= \big((c \odot f) \oplus (c \odot g)\big)(t)$$

$$\therefore c \odot (f \oplus g) = (c \odot f) \oplus (c \odot g)$$

(8) $\because ((c + d) \odot f)(t) = (c + d) f(t)$

$$= cf(t) + df(t)$$

$$= (c \odot f)(t) + (d \odot f)(t)$$

$$= \big((c \odot f) \oplus (d \odot f)\big)(t)$$

$$\therefore (c + d) \odot f = (c \odot f) \oplus (d \odot f)$$

(9) $\because c \odot (d \odot f)(t) = c \odot df(t)$

$$= cdf(t)$$

$$= (cd \odot f)(t)$$

$$\therefore c \odot (d \odot f) = cd \odot f$$

(10) $\because (1 \odot f)(t) = 1f(t)$

$$= f(t)$$

$$\therefore 1 \odot f = f$$

ดังนั้น เซ็ต V ซึ่งเป็นเซ็ตของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงแบบต่อเนื่อง มีคุณสมบัติเป็นเวคเตอร์สเปซ ภายใต้การกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ที่กำหนดให้

7. ให้ $V = \{(a, b) \mid a, b$ เป็นจำนวนจริง $\}$ กำหนดการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ดังนี้คือ

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ และ $k \odot (a, b) = (a, kb)$ สำหรับ a, b, c, d, k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่า V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ

วิธีทำ

เราจะแสดงว่าเหตุที่ V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซนั้น เพราะว่า V ขาดคุณสมบัติข้อที่ 8 (และอาจขาดคุณสมบัติข้ออื่น ๆ ด้วย แต่เราแสดงเพียงข้อเดียวก็เพียงพอแล้ว)

สมมุติให้ $k_1 = 2, k_2 = 5, \alpha = (-2, 4)$ แล้ว

$$(k_1 + k_2) \odot \alpha = (2 + 5) \odot (-2, 4)$$

$$= 7 \odot (-2, 4)$$

$$= (-2, 28)$$

และ $(k_1 \odot \alpha) \oplus (k_2 \odot \alpha) = 2 \odot (-2, 4) \oplus 5 \odot (-2, 4)$

$$= (-2, 8) \oplus (-2, 20)$$

$$= (-4, 28)$$

ดังนั้น $(k_1 + k_2) \odot \alpha \neq (k_1 \odot \alpha) \oplus (k_2 \odot \alpha)$

แสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 8 ไม่สอดคล้อง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ

8. ให้ V เป็นเซ็ตของเลขจำนวนจริงบวก กำหนดการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ให้เป็นการบวกและการคูณเลขจำนวนจริงธรรมดา จงแสดงว่า V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ (บนฟิลด์ของจำนวนจริง)

วิธีทำ

จะแสดงว่า V ขาดคุณสมบัติข้อที่ 6

สมมุติให้ $k = -5, \alpha = 4$

$$\therefore k \odot \alpha = -5 \odot 4$$

$$= -20$$ ซึ่งไม่อยู่ใน V

แสดงว่า V ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อที่ 6

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ

9. ให้ $V = \{(a, b) \mid a, b$ เป็นจำนวนจริง $\}$ กำหนดการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ดังนี้

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ และ $k \odot (a, b) = (ka, 0)$

อยากทราบว่า V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ เพราะขาดคุณสมบัติข้อใด

ตอบ ขาดคุณสมบัติข้อ 10 คือ

$$1 \odot (a, b) = (a, 0)$$

$$\neq (a, b)$$

$$\therefore 1 \odot \alpha \neq \alpha$$

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ

10. ให้ V เป็นเซ็ตของคู่ลำดับ (a, b) โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า V ไม่เป็นเวคเตอร์สเปซ สำหรับการกระทำ $\oplus$ และ $\odot$ ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

วิธีทำ

ในแต่ละข้อเราจะต้องแสดงให้เห็นว่า มีคุณสมบัติบางประการที่ไม่สอดคล้องกับนิยามของคุณสมบัติของเวคเตอร์สเปซ

10.1) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$

และ $k \odot (a, b) = (ka, kb)$

วิธีทำ

สมมุติให้ $(a, b) = (1, 4)$ และ $(c, d) = (-3, 2)$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad (a, b) \oplus (c, d) &= (1, 4) \oplus (-3, 2) \\
&= (1 + 2, 4 - 3) \\
&= (3, 1)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(c, d) \oplus (a, b) &= (-3, 2) \oplus (1.4) \\
&= (-3 + 4, 2 + I) \\
&= (1, 3)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad (a, b) \oplus (c, d) \neq (c, d) \oplus (a, b)$$

นั่นแสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 2 ไม่จริง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซภายใต้การกระทำที่กำหนดให้

10.2) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

และ $k \odot (a, b) = (a, b)$

วิธีทำ

สมมุติให้ $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $(a, b) = (3, 5)$

$$
\begin{aligned}
\cdot \quad (k_1 + k_2) \odot (a, b) &= (2 + 6) \odot (3, 5) \\
&= 8 \odot (3, 5) \\
&= (3, 5)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(k_1 \odot (a, b)) \oplus (k_2 \odot (a, b)) &= (2 \odot (3, 5)) \oplus (6 \odot (3, 5)) \\
&= (3, 5) \oplus (3, 5) \\
&= (3 + 3, 5 + 5) \\
&= (6, 10)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad (k_1 + k_2) \odot (a, b) \neq (k_1 \odot (a, b)) \oplus (k_2 \odot (a, b))$$

นั่นแสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 8 ไม่จริง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซภายใต้การกระทำที่กำหนดให้

10.3) $(a, b) \oplus (c, d) = (0, 0)$

และ $k \odot (a, b) = (ka, kb)$

วิธีทำ

สมมุติให้ $(a, b) = (4, 9), k_1 = 2, k_2 = 7$

. $(k_1 + k_2) \odot (a, b) = (2 + 7) \odot (4, 9)$

$= 9 \odot (4, 9)$

$= (36, 81)$

และ $(k_1 \odot (a, b)) \oplus (k_2 \odot (a, b)) = (2 \odot (4, 9)) \oplus (7 \odot (4, 9))$

$= (8, 18) \oplus (28, 63)$

$= (0, 0)$

$\therefore \quad (k_1 + k_2) \odot (a, b) \neq (k_1 \odot (a, b)) \oplus (k_2 \odot (a, b))$

นั่นแสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 8 ไม่จริง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซภายใต้การกระทำที่กำหนดให้

10.4) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$

และ $k \odot (a, b) = (0, 0)$

วิธีทำ

สมมุติให้ $(a, b) = (-3, 8)$

$1 \odot (a, b) = 1 \odot (-3, 8)$

$= (0, 0)$

$\neq (-3, 8)$

$\therefore \quad 1 \odot (a, b) \neq (a, b)$

นั่นแสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 10 ไม่จริง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซภายใต้การกระทำที่กำหนดให้

10.5) $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd)$

และ $k \odot (a, b) = (kb, ka)$

วิธีทำ

สมมุติให้ $(a, b) = (-2, 3), (c, d) = (4, -5)$ และ $k = 2$

$k \odot ((a, b) \oplus (c, d)) = 2 \odot ((-2, 3) \oplus (4, -5))$

$= 2 \odot (-8, -15)$

$$= (-16,\ -30)$$

และ $(k \odot (a, b)) \oplus (k \odot (c, d)) = (2 \odot (-2, 3)) \oplus (2 \odot (4, -5))$

$$= (-4,\ 6) \oplus (8, -10)$$

$$= (-32,\ -60)$$

$\therefore \quad k \odot ((a, b) \oplus (c, d)) \neq (k \odot (a, b)) \oplus (k \odot (c, d))$

นั่นแสดงว่า คุณสมบัติข้อที่ 7 ไม่จริง

ดังนั้น V จึงไม่เป็นเวคเตอร์สเปซภายใต้การกระทำที่กำหนดให้

เฉลยแบบฝึกหัด 4.3

1. ให้ $V = R^{(3)}$ จงพิจารณาว่า เซ็ต W ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้เป็นสับสเปซของ V หรือไม่?

1.1) W_1 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $b = 1$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (3, 1, 5)$ และ $\beta = (-8, 1, 4)$ ต่างก็อยู่ใน W_1

แต่ $\alpha + \beta = (3, 1, 5) + (-8, 1, 4)$

$= (-5, 2, 9)$ ซึ่งไม่ได้อยู่ใน W_1

ดังนั้น W_1 จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.2) W_2 เป็นเซตของ (a, b, c) โดยที่ $a = 0$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (0, b_1, c_1)$ และ $\beta = (0, b_2, c_2)$ อยู่ใน W_2

$\therefore \quad \alpha + \beta = (0, b_1, c_1) + (0, b_2, c_2)$

$= (0, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_2 ด้วย

และ $c\alpha = c(0, b_1, c_1)$

$= (0, cb_1, cc_1)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_2 ด้วย

ดังนั้น W_2 จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.3) W_3 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $b + c \geqslant 0$

วิธีทำ

ให้ $a = (2, 3, 8)$ อยู่ใน เพราะว่า $3 + 8 \geqslant 0$ และ $c = -2$

. $ca = -2(2, 3, 8)$

$= (-4, -6, -8)$ ซึ่งไม่ได้อยู่ใน W_3 ($\because -6 - 8 \not\geqslant 0$)

ดังนั้น W_3 จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.4) W_4 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $a = b = c$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (m, m, m)$ และ $\beta = (n, n, n)$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน W_4

$\because \quad \alpha + \beta = (m, m, m) + (n, n, n)$

$= (m + n, m + n, m + n)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_4

และ $\quad c\alpha = c(m, m, m)$ สำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ

$= (cm, cm, cm)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_4

ดังนั้น W_4 จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.5) W_5 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $c > 0$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (3, 8, 5)$ อยู่ใน W_5 ($\because 5 > 0$) และให้ $c = -3$

$\because \quad c\alpha = -3(3, 8, 5)$

$= (-9, -24, -15)$ ซึ่งไม่อยู่ใน W_5 ($\because -15 \not> 0$)

ดังนั้น W_5 ไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.6) W_6 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $a + c = b$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (a_1, b_1, c_1)$ และ $\beta = (a_2, b_2, c_2)$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน W_6 คือ $a_1 + c_1 = b_1$ และ $a_2 + c_2 = b_2$

$\therefore \quad \alpha + \beta = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ซึ่งก็เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ใน W_6 ด้วย

เพราะว่า $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + b_2$

และ $\quad c\alpha = c(a_1, b_1, c_1)$ สำหรับสกาลาส์ c ใด ๆ

$= (ca_1, cb_1, cc_1)$ ซึ่งก็เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ใน W_6 ด้วย

เพราะว่า $ca_1 + cc_1 = cb_1$

ดังนั้น W_6 จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.7) W_7 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $a = c$ และ $b = a - c$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (a_1, b_1, c_1)$ และ $\beta = (a_2, b_2, c_2)$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน W_7 คือ $a_1 = c_1, a_2 = c_2$,-

$b_1 = a_1 - c_1, b_2 = a_2 - c_2$

$\because \quad \alpha + \beta = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ซึ่งก็เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ใน W_7

เพราะว่า $a_1 + a_2 = c_1 + c_2$ และ $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 - c_1 - c_2$

และ $\quad c\alpha = c(a_1, b_1, c_1)$ สำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ

$= (ca_1, cb_1, cc_1)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_7 ด้วย

เพราะว่า $ca_1 = cc_1$ และ $cb_1 = ca_1 - cc_1$

ดังนั้น W_7 จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.8) W_8 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $a = b + 1 = c + 2$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (5, 4, 3)$ และ $\beta = (3, 2, 1)$ เป็นเวคเตอร์ใน W_8

$\because \quad \alpha + \beta = (5, 4, 3) + (3, 2, 1)$

$= (8, 6, 4)$ ซึ่งไม่อยู่ใน W_8

เพราะว่า $8 \neq 6 + 1 \neq 4 + 2$

ดังนั้น W_8 จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.9) W_9 เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ a, b, c เป็นศูนย์อย่างน้อย 1 ตัว

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (3, 0, 8)$ และ $\beta = (0, 1, 3)$ เป็นเวคเตอร์ใน W_9

$\because \quad \alpha + \beta = (3, 0, 8) + (0, 1, 3)$

$= (3, 1, 11)$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ที่ไม่อยู่ใน W_9

ดังนั้น W_9 จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.10) W_{10} เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $2a + b = 0$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (a_1, b_1, c_1)$ และ $\beta = (a_2, b_2, c_2)$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน W_{10} (โดย $2a_1 + b_1 = 0$- และ $2a_2 + b_2 = 0$)

$\because \quad \alpha+\beta = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ซึ่งก็เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ใน W_{10}

เพราะว่า $2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = 0$

และ $\quad c\alpha = c(a_1, b_1, c_1)$ สำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ

$= (ca_1, cb_1, cc_1)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_{10} ด้วย

ดังนั้น W_{10} จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.11) W_{11} เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $a \geqslant b \geqslant c$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (8, 5, 3)$ เป็นเวคเตอร์ใน W_{11} และ $c = -2$

$\because \quad c\alpha = -2(8, 5, 3)$

$= (-16, -10, -6)$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ที่ไม่อยู่ใน W_{11}

เพราะว่า $-16 \ngeqslant -10 \ngeqslant -6$

ดังนั้น W_{11} จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.12) W_{12} เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $ac = 0$

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (0, 8, 2)$ และ $\beta = (3, 4, 0)$ เป็นเวคเตอร์ใน W_{12} (โดย $(0)(2) = 0$ และ $(3)(0) = 0$)-

$\because \quad \alpha + \beta = (0, 8, 2) + (3, 4, 0)$

$= (3, 12, 2)$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ที่ไม่อยู่ใน W_{12}

เพราว่า $(3)(2) \neq 0$

ดังนั้น W_{12} จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

1.13) W_{13} เป็นเซ็ตของ (a, b, c) โดยที่ $k_1a + k_2b + k_3c = 0$
เมื่อ k_1, k_2, k_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

วิธีทำ

ให้ $\alpha = (a_1, b_1, c_1), \beta = (a_2, b_2, c_2)$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน W_{13} และ k_1, k_2, k_3 เป็นจำนวน

ใด ๆ (โดย $k_1a_1 + k_2b_1 + k_3c_1 = 0$ และ $k_1a_2 + k_2b_2 + k_3c_2 = 0$)

$\therefore \quad \alpha + \beta = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ ซึ่งก็เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ใน W_{13}

เพราะว่า $k_1 (a_1 + a_2) + k_2 (b_1 + b_2) + k_3 (c_1 + c_2) = k_1a_1 + k_2b_1 + k_3c_1$

$+ k_1a_2 + k_2b_2 + k_3c_2 = 0 + 0 = 0$

และ $ca = c(a_1, b_1, c_1)$ สำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ

$= (ca_1, cb_1, cc_1)$ ซึ่งก็อยู่ใน W_{13} ด้วย

เพราะว่า $k_1ca_1 + k_2cb_1 + k_3cc_1 = c(k_1a_1 + k_2b_1 + k_3c_1) = c(0) = 0$

ดังนั้น W_{13} จึงเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

2. ให้ $R_{2\times2}$ เป็นเซ็ตของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 2×2 จงพิจารณา W ที่เป็นสับเซ็ตของ $R_{2\times2}$ เซ็ตใดบ้างที่เป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$ เซ็ตใดบ้างที่ไม่เป็น เพราะเหตุใด? โดยถ้า W ประกอบด้วยเมตริกซ์ซึ่งเป็น

2.1) ซิมเมตริก เมตริกซ์ (symmetric matrix)

วิธีทำ

ให้ A และ B เป็นซิมเมตริก เมตริกซ์ ที่มีขนาด 2×2

$\therefore$ A + B ก็เป็นซิมเมตริก เมตริกซ์ เพราะว่า $(A + B)' = A' + B' = A + B$

และ cA ก็เป็นซิมเมตริก เมตริกซ์ ด้วย สำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ

เพราะว่า $(cA)' = cA' = cA$

ดังนั้น เซ็ต W ที่ประกอบด้วย ซิมเมตริก เมตริกซ์ จึงเป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.2) สกิว-ซิมเมตริก เมตริกซ์ (Skew-symmetric matrix)

วิธีทำ

ให้ A และ B เป็นสกิว-ซิมเมตริก เมตริกซ์นี้มีขนาด 2×2 ใด ๆ

$\therefore$ A + B ก็จะเป็นสกิว ซิมเมตริก เมตริกซ์ด้วย

เพราะว่า $(A + B)' = A' + B' = -A - B = -(A + B)$ และ cA

ก็จะเป็นสกิว-ซิมเมตริก เมตริกซ์ด้วยสำหรับสกาลาร์ c ใด ๆ เพราะว่า

$(cA)' = cA' = c(-A) = -(cA)$ ดังนั้น เซ็ต W ที่ประกอบด้วย สกิว-ซิมเมตริก-เมตริกซ์ จึงเป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.3) **ไดแอกโกนัล เมตริกซ์** (diagonal matrix)

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็นไดแอกโกนัล

เมตริกซ์ใด ๆ โดย $a_{11}, b_{11}, a_{22}, b_{22}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\because\ A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$ ซึ่งก็เป็นไดแอกโกนัล เมตริกซ์ด้วย

และ $cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & 0 \\ 0 & ca_{22} \end{bmatrix}$$ ซึ่งก็เป็นไดแอกโกนัล เมตริกซ์ ด้วย

ดังนั้น เซ็ต W ที่ประกอบด้วย ไดแอกโกนัล เมตริกซ์ จึงเป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.4) สกาลาร์เมตริกซ์ (scalar matrix)

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ เป็นสกาลาร์ เมตริกซ์ ใด ๆ

โดย a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\because\ A + B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a + b \end{bmatrix}$$ ก็เป็นสกาลาร์เมตริกซ์ ด้วย

และ $cA = c\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ

$= \begin{bmatrix} ca & 0 \\ 0 & ca \end{bmatrix}$ ก็เป็นสกาลาร์ เมตริกซ์ ด้วย

ดังนั้น เซ็ต W ที่ประกอบด้วย สกาลาร์ เมตริกซ์ จึงเป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.5) เมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (upper triangular matrix)

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนใด ๆ

$\because A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$ ก็เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน

และ $cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ

$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ 0 & ca_{22} \end{bmatrix}$ ก็เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนด้วย

ดังนั้น เซ็ต W ที่ประกอบด้วย เมตริกซ์สามเหลี่ยมด้านบนจึงเป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.6) ซิงกิวลาร์ เมตริกซ์ (singular matrix)

วิธีทำ

ให้ A และ B เป็นซิงกิวลาร์ เมตริกซ์

นั่นคือ $\det(A) = 0$ และ $\det(B) = 0$

แต่เนื่องจาก $\det(A + B)$ อาจจะไม่เท่า $\det A + \det B$

ดังนั้น det (A + B) จึงอาจจะไม่เท่ากับศูนย์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

ซึ่งจะเห็นว่า **det (A) = 0, det (B) = 0**

แต่ det (A + B) = 24 $\neq$ 0

ดังนั้น A + B จึงไม่เป็นซิงกิวลาร์ เมตริกซ์

ดังนั้น จึงได้ว่า เซ็ต W ที่ประกอบด้วยซิงกิวลาร์ เมตริกซ์ จึงไม่เป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

2.7) นอนซิงกิวลาร์ เมตริกซ์ (nonsingular matrix)

วิธีทำ

ให้ A และ B เป็นนอนซิงกิวลาร์ เมตริกซ์

นั่นคือ det A $\neq$ 0 และ det B $\neq$ 0

แต่เนื่องจาก det (A + B) อาจจะไม่เท่ากับ det A + det B

ดังนั้น det (A + B) จึงอาจจะเป็นศูนย์ก็ได้

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

และ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ซึ่งจะเห็นว่า **det A $\neq$ 0, det B $\neq$ 0**

แต่ **det (A + B) = 0**

ดังนั้น A + B จึงไม่เป็นนอนซิงกิวลาร์ เมตริกซ์

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เซ็ตของจำนวนซิงกิวลาร์ เมตริกซ์ ไม่เป็นสับสเปซของ $R_{2\times2}$

3. ให้ V เป็นเวคเตอร์สเปซ และให้ α, β เป็นเวคเตอร์ใน V จงพิสูจน์ว่า W ที่เป็นสับเซ็ตของ V ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เขียนอยู่ในรูป $a\alpha + b\beta$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ย่อมเป็นสับสเปซของ V

วิธีทำ

ให้ $\gamma_1, \gamma_2 \in W$

โดย $\gamma_1 = a_1\alpha + b_1\beta$

และ $\gamma_2 = a_2\alpha + b_2\beta$ โดย a_1, b_1, a_2, b_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$\therefore \gamma_1 + \gamma_2 = (a_1 + a_2)\alpha + (b_1 + b_2)\beta$ เมื่อ $a_1 + a_2$ และ $b_1 + b_2$ เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า $\gamma_1 + \gamma_2 \in W$

และให้ $\gamma \in W$ โดย $\gamma = a\alpha + b\beta$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ

$c\gamma = (ca)\alpha + (cb)\beta$ โดย ca และ cb เป็นจำนวนจริง

$\therefore c\gamma \in W$

ดังนั้น W จึงเป็นสับสเปซของ V

4. จงอธิบายว่า เซ็ต $R^{(2)}$ จะเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ

$R^{(2)}$ ไม่สามารถเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ได้ ทั้งนี้เพราะว่า

$R^{(2)}$ ไม่สามารถเป็นสับเซ็ตของ $R^{(3)}$ จึงกล่าวได้อย่างแน่นอนว่า

$R^{(2)}$ ไม่สามารถเป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.4

1. จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ β ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเขียนเป็นการรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ที่กำหนดให้ได้หรือไม่

   1.1) $\beta = (2,1,3)$, $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (0,1,0)$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$

นั่นคือ $(2,1,3) = a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(0,1,0)$

$$= (a_1 + a_2,\ a_1 + 2a_2 + a_3,\ a_1 + 3a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$a_1 + a_2 = 2$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 1$$

$$a_1 + 3a_2 = 3$$

จะต้องหาค่า $a_1, a_2, a3$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วยแถวที่สอง และลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$-2a_3 = 3$$

$$a_3 = -\frac{3}{2}$$

และ $a_2 + a_3 = -1$

$$\therefore a_2 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

และ $a_1 - a_3 = 3$

$$\therefore\ a_1 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

นั่นคือ $\beta = \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3$

แสดงว่า β เขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1, α_2 และ α_3 ได้

1.2) $\beta = (1,2,4)$, $\alpha_1 = (1,3,2)$, $\alpha_2 = (2,1,3)$, $\alpha_3 = (0,0,0)$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$

$$\therefore\ (1,2,4) = a_1(1,3,2) + a_2(2,1,3) + a_3(0,0,0)$$

$$= (a_1 + 2a_2,\ 3a_1 + a_2,\ 2a_1 + 3a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้

$$a_1 + 2a_2 = 1$$

$$3a_1 + a_2 = 2$$

$$2a_1 + 3a_2 = 4$$

พิจารณา $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่หนึ่งด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม และบวกแถวที่สองด้วย 5 เท่าของแถวที่สาม จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

จะเห็นว่าระบบสมการนี้ไม่มีค่าราก

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า β ไม่สามารถเขียนเป็น

การรวมเชิงเส้นของ α_1, α_2 และ α_3

1.3) $\beta = (1,0,0)$, a, = (- 1,2,3), $\alpha_2 = (1,2,3)$ และ $\alpha_3 = (2,3,4)$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$

$$\therefore \quad (1,0,0) = a_1(-1,2,3) + a_2(1,2,3) + a_3(2,3,4)$$

$$= (-a_1 + a_2 + 2a_3,\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3,\ 3a_1 + 3a_2 + 4a_3)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$-a_1 + a_2 + 2a_3 = 1$$

$$2a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

$$3a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0$$

จากระบบสมการข้างต้น จะได้ว่า $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, และ $a_3 = 0$

นั่นคือ $\beta = -\frac{1}{2}$ a, $+ \frac{1}{2}\alpha_2 + 0$ a3

แสดงว่า β เขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1, α_2 และ α_3 ได้

1.4) $\beta = (1,7,-4)$, $\alpha_1 = (1,-3,2)$, $\alpha_2 = (2,-1,1)$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$$\therefore \quad (1,7,-4) = a_1(1,-3,2) + a_2(2,-1,1)$$

$$= (a_1 + 2a_2,\ -3a_1 - a_2,\ 2a_1 + a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$a_1 + 2a_2 = 1$$

$$-3a_1 - a_2 = 7$$

$$2a_1 + a_2 = -4$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

หารแถวที่สองด้วย 5 และหารแถวที่สามด้วย -3 ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง และลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $a_1 = -3$ และ $a_2 = 2$

นั่นคือ $\beta = -3\alpha_1 + 2\alpha_2$

นั่นแสดงว่า β สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1 และ α_2 ได้

1.5) $\beta = (2,-5,4)$, $\alpha_1 = (1,-3,2)$, $\alpha_2 = (2,-1,1)$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$\therefore\ (2,-5,4) = a_1(1,-3,2) + a_2(2,-1,1)$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 2 \\ -3a_1 - a_2 &= -5 \\ 2a_1 + a_2 &= 4 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\ 001 \quad -3^{5} \quad 212 \mid 10^{1}\ \right]$$

หารตลอดแถวที่สามด้วย -3

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม และลบแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

จะพบว่าระบบสมการนี้ไม่มีค่าราก

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า β ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1 และ α_2

2. จงเขียน β ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของโพลิโนเมียล เมื่อ

a, $= 2t^2+3t-4$ และ $\alpha_2 = t^2-2t-3$ และ

2.1) $\beta = 4t^2 - 6t - 1$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$$\therefore\ 4t^2 - 6t - 1 = a_1(2t^2 + 3t - 4) + a_2(t^2 - 2t - 3)$$

$$= (2a_1 + a_2)t^2 + (3a_1 - 2a_2)t - (4a_1 + 3a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้

$$2a_1 + a_2 = 4$$

$$3a_1 - 2a_2 = -6$$

$$4a_1 + 3a_2 = 1$$

พิจารณา $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$

หารแถวที่หนึ่งด้วย 2 จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ 0 & -\frac{1}{\;} & -1 \\ & & -7 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย $\frac{7}{2}$ เท่าของแถวที่สาม จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{73}{2} \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

จะพบว่าระบบสมการนี้ไม่มีค่าราก

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า β ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1 และ α_2

2.2) $\beta = 3t^2 + 8t - 5$

วิธีทำ ให้ $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$$\therefore \; 3t^2 + 8t - 5 = a_1(2t^2 + 3t - 4) + a_2(t^2 - 2t - 3)$$

$$= (2a_1 + a_2)t^2 + (3a_1 - 2a_2)t - (4a_1 + 3a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้

$$2a_1 + a_2 = 3$$

$$3a_1 - 2a_2 = 8$$

$$4a_1 + 3a_2 = 5$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

หารแถวที่หนึ่งด้วย 2 จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ 4 & 3 & \bar{2} & 1 & 8 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย $\frac{1}{2}$ เท่าของแถวที่สาม และบวกแถวที่สองด้วย $\frac{7}{2}$ เท่าของแถวที่สาม ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $a_1 = 2$ และ $a_2 = -1$

นั่นคือ $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2$

นั่นแสดงว่า β สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1 และ α_2 ได้

3. จงเขียน $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ให้ $E = xA + yB + zC$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+y+z & x+y-z \\ -Y & -X \end{bmatrix}$$

จากการเท่ากันของเมตริกซ์ จึงได้ว่า

$x+y+z = 2$ ------------ (1)

$x+y-z = 4$ ------------ (2)

$-y = -1$ ------------ (3)

$-x = -2$ ------------ (4)

ดังนั้นจึงได้ว่า $x = 2, y = 1$

แทน $x = 2, y = 1$ ใน (1) จะได้ว่า $z = -1$

แทน x, y, z ลงใน (2) จะได้ว่าสมการเป็นจริง

ดังนั้นจึงได้ว่า $E = 2A+B-C$

แสดงว่า E เขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ A, B และ C ได้

4. จงหาค่าของ **c** ถ้า (1,c,5) เขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\alpha_1 = (1, -3,2)$, $\alpha_2 = (2, -1.1)$ ได้

วิธีทำ ให้ $(1,c,5) = a_1(1,-3,2)+a_2(2,-1,1)$

$$= (a_1+2a_2,\ -3a_1-a_2,\ 2a_1+a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้

$$a_1+2a_2 = \ , \text{ ---------------- } (1)$$

$$-3a_1-a_2 = c \text{ ---------------- } (2)$$

$$2a_1+a_2 = 5 \text{ ---------------- } (3)$$

จาก (1) และ (3) เราหาค่ารากของสมการได้เป็น $a_1 = 3$ และ **a2 = 1** แทนค่า $a_1 = 3$ และ $a_2 = -1$ ลงใน (2) จะได้ $c = -$ **8**

ดังนั้น **c = -8**

5. ถ้า $\beta = (a,b,c)$ จงหาเงื่อนไขของ a, b และ c ที่ทำให้ β เขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\alpha_1 = (1,-3,2)$ และ $\alpha_2 = (2,-1,1)$ ได้

วิธีทำ สมมุติว่า β สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ α_1 และ α_2 ได้

นั่นคือมี a_1 และ a_2 ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ทำให้เขียนได้ว่า

$$\beta = a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$$

$$\therefore\ (a,b,c) = a_1(1,-3,2)+a_2(2,-1,1)$$

$$= (a_1+2a_2,\ -3a_1-a_2,\ 2a_1+a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้

$$a_1+2a_2 = a$$

$$-3a_1-a_2 = b$$

$$2a_1+a_2 = c$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -3 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่ 1 และลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 5 & b+3a \\ 0 & -3 & c-2a \end{array}\right]$$

หารแถวที่สองด้วย 5 และหารแถวที่สามด้วย -3 ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \frac{b+3a}{5} \\ 0 & 1 & \frac{c-2a}{-3} \end{array}\right]$$

ระบบสมการนี้จะหาค่ารากได้ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{b+3a}{5} = \frac{c-2a}{-3}$$

$$\therefore \quad -3b-9a = 5c-10a$$

$$\therefore \quad a-3b-5c = 0$$

ดังนั้น $\beta = (a,b,c)$ จะเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\alpha_1 = (1,-3,2)$ และ $\alpha_2 = (2,-1,1)$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $a-3b-5c = 0$

6. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $ad-bc \neq 0$ ถ้า $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$ และ $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$ แล้ว จงแสดงว่าทั้ง α_1 และ α_2 ต่างก็สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ β_1 และ β_2

วิธีทำ จาก $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$ -- (1)

และ $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$ -- (2)

คูณ (1) ด้วย c และคูณ (2) ด้วย a จะได้

$ac\alpha_1 + bc\alpha_2 = c\beta_1$ -- (3)

$ac\alpha_1 + ad\alpha_2 = a\beta_2$ -- (4)

(4) – (3) จะได้

$$(ad-bc)\,\alpha_2 = a\beta_2 - c\beta_1$$

ถ้า $ad - bc \neq 0$ จะได้ว่า

$$\alpha_2 = \frac{a}{ad-bc}\beta_2 - \frac{c}{ad-bc}\beta_1 \quad \text{------------(5)}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าคูณ (1) ด้วย d และคูณ (2) ด้วย b ก็จะได้

$$ad\alpha_1 + bd\alpha_2 = d\beta_1 \quad \text{------------(6)}$$

$$bc\alpha_1 + bd\alpha_2 = b\beta_2 \quad \text{------------(7)}$$

(6) – (7) จะได้

$$(ad - bc)\,\alpha_1 = d\beta_1 - b\beta_2$$

ถ้า $ad - bc \neq 0$ จะได้ว่า

$$\alpha_1 = \frac{d}{ad-bc}\beta_1 - \frac{b}{ad-bc}\beta_2 \quad \text{------------(8)}$$

จาก (5) และ (8) จึงกล่าวได้ว่า

ทั้ง α_1 และ α_2 ต่างก็สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ β_1 และ β_2 ได้

7. ในฟังก์ชันสเปซ การรวมเชิงเส้นของสองฟังก์ชัน f และ g ก็คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $af + bg$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาว่า

7.1) e^{2x} เป็นการรวมเชิงเส้นของ e^x และ e^{-x} หรือไม่?

วิธีทำ ให้ $e^{2x} = ae^x + be^{-x}$

$$= ae^x + \frac{b}{e^x}$$

$$= \frac{ae^{2x} + b}{e^x}$$

$$\therefore\ e^{3x} = ae^{2x} + b$$

จะได้ว่า e^{2x} ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ e^x และ e^{-x}

7.2) cosh x เป็นการรวมเชิงเส้นของ e^x และ e^{-x} หรือไม่

วิธีทำ จาก $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

จึงได้ว่า cosh x สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ e^x และ e^{-x} ได้

เฉลยแบบฝึกหัด 4.5

1. จงพิจารณาว่าต่อไปนี้เซ็ตใดบ้างที่สแปน $R^{(3)}$

1.1) $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$

วิธีทำ ให้ β = (a,b,c) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$

พิจารณาหา a_1, a_2 และ a_3 ที่ทำให้

$$\beta = a_1(1,1,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,1,-1)$$

$$\therefore (a,b,c) = (a_1, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2-a_3)$$

ซึ่งจัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_1+a_2+a_3 &= b \\ a_1+a_2-a_3 &= c \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & -1 & c-a\ 1 \end{array}\right.$$

ลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & c-b \end{array}\right]$$

จึงได้ว่า ค่ารากของระบบสมการนี้คือ $a_1 = a$, $a2 = \frac{b-2a+c}{2}$, $a_3 = \frac{b-c}{2}$

เมื่อ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$ สแปน $R^{(3)}$

1.2) $\{(1,2,3), (0,1,1)\}$

วิธีทำ ให้ β = (a,b,c) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$

พิจารณาหา a_1, a_2 ที่ทำให้ $\beta = a_1(1,2,3)+a_2(0,1,1)$

$\therefore \ (a,b,c) = (a_1, 2a_1+a_2, 3a_1+a_2)$

ซึ่งจัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ 2a_1+a_2 &= b \\ 3a_1+a_2 &= c \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 1 & c \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง และลบแถวที่สามด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 1 & c-3a \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$$

จะพบว่าระบบสมการนี้จะมีค่ารากก็ต่อเมื่อ $c-a-b = 0$

แต่เราต้องการค่ารากสำหรับ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจึงได้ว่า $\{(1,2,3), (0,1,1)\}$ ไม่สแปน $R^{(3)}$

1.3) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$

วิธีทำ ให้ $\beta = (a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$

พิจารณา a_1, a_2, a_3 และ a_4 ที่ทำให้

$\beta = a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)+a_4(1,1,1)$

$\therefore \ (a,b,c) = (a_1+a_4, a_2+a_4, a_3+a_4)$

ซึ่งจัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1+a_4 &= a \\ a_2+a_4 &= b \\ a_3+a_4 &= c \end{aligned}$$

ให้ $a_4 = m$ โดย m เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

ค่ารากของระบบสมการชุดนี้คือ

$a_1 = a-m$, $a_2 = b-m$, $a_3 = c-m$ และ $a_4 = m$

เมื่อ a, b, c และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ สแปน $R^{(3)}$

2. ให้ $S = \{(0,1,1), (0,2,-1)\}$, $T = \{(0,1,2), (0,2,3), (0,3,1)\}$

และ $W = \{(0,b,c)$ โดย b และ c เป็นจำนวนจริง $\}$ จงแสดงว่า

2.1) S สแปน W

วิธีทำ พิจารณา a_1, a_2 ที่ทำให้

$$\begin{aligned}(0,b,c) &= a_1(0,1,1) + a_2(0,2,-1)\\ &= (0, a_1+2a_2, a_1-a_2)\end{aligned}$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\begin{aligned}a_1+2a_2 &= b\\ a_1-a_2 &= c\end{aligned}$$

ซึ่งค่ารากของสมการชุดนี้คือ $a_1 = \frac{b+2c}{3}$ และ $a_2 = \frac{b-c}{3}$

เมื่อ b **และ** c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $S = \{(0,1,1), (0,2,-1)\}$ สแปน W

2.2) T **สแปน** W

วิธีทำ พิจารณา a_1, a_2 และ a3 ที่ทำให้

$$\begin{aligned}(O,b,c) &= a_1(0,1,2) + a_2(0,2,3) + a_3(0,3,1)\\ &= (0, a_1+2a_2+3a_3,\ 2a_1+3a_2+a_3)\end{aligned}$$

จัดเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\begin{aligned}a_1+2a_2+3a_3 &= b\\ 2a_1+3a_2+a_3 &= c\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 2 & 3 & 1 & c \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & -1 & -5 & c-2b \end{array}\right],$$

บวกแถวที่หนึ่งด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง ได้
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0\,1 & -1\,0 & -5\,-7 & 2c-3b \end{array}\right]$$

1

คูณแถวที่สองด้วย -1 ได้
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 2c-3b \\ 0 & 1 & 5 & 2b-c \end{array}\right]$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$a_1 - 7a_3 = 2c - 3b$$

$$a_2 - 5a_3 = 2b - c$$

ให้ $a_3 = m$ จึงได้ค่ารากของสมการเป็น

$a_1 = 2c - 3b + 7m$, $a_2 = 2b - c + 5m$ และ $a_3 = m$

เมื่อ b, c และ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $T = \{(0,1,2), (0,2,3), (0,3,1)\}$ สแปน W

3. จงพิจารณาว่า เซ็ต $\{t^2+1, t+2\}$ สแปน P_2 หรือไม่ ?

วิธีทำ ให้ $\beta = at^2 + bt + c$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน P_2

เราต้องหา a_1 และ a_2 ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้

$$\beta = a_1(t^2+1) + a_2(t+2) \text{ หรือ}$$

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= a_1(t^2+1) + a_2(t+2) \\ &= a_1t^2 + a_2t + (a_1 + 2a_2) \end{aligned}$$

ซึ่งเขียนเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= b \\ a_1 + 2a_2 &= c \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right]$$
ลบแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง ได้
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & c-a \end{array}\right]$$
ลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง ได้
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-2b \end{array}\right]$$
ระบบสมการนี้จะมีค่ารากก็ต่อเมื่อ $c-a-2b = 0$

แต่เราต้องการค่ารากสำหรับ a,b,c ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจึงได้ว่า $\{ t^2+1, t+2 \}$ ไม่สแปน P_2

4. จงแสดงว่าโพลิโนเมียล $(1-t^3)$, $(1-t^2)$, $(1-t)$, และ 1 สแปน เวกเตอร์สเปซของโพลิโนเมียลที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 (P_3)

วิธีทำ ให้ $\beta = at^3+bt^2+ct+d$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน P_3

เราต้องหา a_1, a_2, a_3 และ a_4 ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้

$$\beta = a_1(1-t^3)+a_2(1-t^2)+a_3(1-t)+a_4(1) \text{ หรือ}$$

$$at^3+bt^2+ct+d = -a_1t^3-a_2t^2-a_3t+(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

ซึ่งเขียนเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} -a_1 &= a \\ -a_2 &= b \\ -a_3 &= c \\ a_1+a_2+a_3+a_4 &= d \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right]$$
ซึ่งสมมูลกับเมตริกซ์
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+a+b+c \end{array}\right]$$
ได้ว่า ค่ารากของสมการชุดนี้คือ

$a_1 = -a$, $a_2 = -b$, $a_3 = -c$ และ $a_4 = a+b+c+d$

เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $\{ (1-t^3), (1-t^2), (1-t), 1 \}$ สแปน P_3

5. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาสับสเปซของ $R^{(3)}$ ซึ่งถูกสแปนโดยเซ็ตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

5.1) $\{ (1,0,0), (0,2,0) \}$

วิธีทำ ให้ $\alpha_1 = (1,0,0)$ และ $\alpha_2 = (0,2,0)$

แล้วสับสเปซของ $R^{(3)}$ ย่อมประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์ α

ซึ่ง $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$\therefore \alpha = a_1(1,0,0) + a_2(0,2,0)$

$= (a_1, 2a_2, 0)$

ดังนั้นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่ถูกสแปนโดย $\{ (1,0,0), (0,2,0) \}$ คือ

$W = \{ (a_1, 2a_2, 0)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\}$

5.2) $\{ (1,0,0), (0,0,-3) \}$

วิธีทำ พิจารณาเวกเตอร์ $\alpha = a_1(1,0,0) + a_2(0,0,-3)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$\therefore \alpha = (a_1, 0, -3a_2)$

ดังนั้นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่ถูกสแปนโดย $\{ (1,0,0), (0,0,-3) \}$ คือ

$W = \{ (a_1, 0, -3a_2)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\}$

5.3) $\{(2,0,0), (0,-1,0), (0,0,-4)\}$

วิธีทำ พิจารณาเวกเตอร์ $\alpha = a_1(2,0,0) + a_2(0,-1,0) + a_3(0,0,-4)$ เมื่อ a_1, a2 และ a3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

... $a = (2a_1, -a_2, -4a_3)$

ดังนั้นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่ถูกสแปนโดย $\{(2,0,0), (0,-1,0), (0,0,-4)$

WOW = $\{(2a_1, -a_2, -4a_3)$ เมื่อ $a_,$, a_2 และ a_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ$\}$

5.4) $\{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

วิธีทำ พิจารณาเวกเตอร์ $\alpha = a_1(1,0,0) + a_2(2,0,0) + a_3(0,1,0) + a_4(0,0,1)$ เมื่อ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

,.. $\alpha = (a_1 + 2a_2, a_3, a_4)$

ดังนั้น สับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่ถูกสแปนโดย $\{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

คือ $W = \{(a_1 + 2a_2, a_3, a_4)$ เมื่อ a_1, a_2, **a3** และ **a4** เป็นจำนวนจริงใด ๆ$\}$

5.5) $\{(1,2,1)\}$

วิธีทำ พิจารณาเวกเตอร์ $\alpha = a_1(1,2,1)$ เมื่อ a_1 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$\therefore \ \alpha = (a_1, 2a_1, a_1)$

ดังนั้น สับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่ถูกสแปนโดย $\{(1,2,1)\}$ คือ

$W = \{(a_1, 2a_1, a_1)$ เมื่อ a_1 เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\}$

6. จงพิสูจน์ว่าเซ็ตใด ๆ ที่สแปน $R^{(2)}$ จะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 2 เวกเตอร์ และในทำนองเดียวกันเซ็ตที่สแปน $R^{(3)}$ ก็จะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 3 เวกเตอร์

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซ็ตใด ๆ ใน $R^{(2)}$

สมมุติว่า S เป็นเซ็ตที่มีสมาชิกเพียง 1 ตัวเท่านั้น คือ α_1 จะพบว่า เซ็ต S นี้จะไม่สามารถสแปน $R^{(2)}$ เพราะว่า สำหรับ $\alpha \in R^{(2)}$ ใด ๆ จะไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้น $\alpha = a_1\alpha_1$ ได้สำหรับทุก ๆ α เลย แต่ถ้า S เป็นเซ็ตที่มีสมาชิกอย่างน้อย 2 เวกเตอร์ จะพบว่าระบบสมการที่ได้จากการรวมเชิงเส้น $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 +$ ---- นี้จะเป็นระบบสมการที่มี 2 สมการเสมอ แต่มีตัวไม่ทราบค่าอย่างน้อย 2 ตัว ซึ่งระบบสมการเช่นนี้อาจให้ค่ารากที่เป็นจริงได้ (ดูข้อ 7 ประกอบ)

นั่นแสดงว่า เซ็ตใด ๆ ที่สแปน $R^{(2)}$ จะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 2 เวกเตอร์
ในทำนองเดียวกัน เซ็ตที่สแปน $R^{(3)}$ ก็จะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 3 เวกเตอร์
หรือกล่าวโดยทั่ว ๆ ไปได้ว่า
เซ็ตใด ๆ ที่สแปน $R^{(n)}$ จะต้องมีสมาชิกอย่างน้อย n เวกเตอร์นั่นเอง

7. สมมุติว่า เซ็ต $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ สแปน $R^{(2)}$ จงพิสูจน์ว่า ถ้าเรากำจัดเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งในสามเวกเตอร์นี้ออกไปจากเซ็ต เวกเตอร์ส่วนที่เหลืออีกสองเวกเตอร์ก็ยังคงสแปน $R^{(2)}$

วิธีทำ สมมุติให้ $\alpha_1 = (a_{11},a_{12})$, $\alpha_2 = (a_{21},a_{22})$, $\alpha_3 = (a_{31},a_{32})$ เมื่อ $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},a_{31},a_{32}$ เป็นจำนวนจริง และให้ $\beta = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$

เนื่องจาก $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ สแปน $R^{(2)}$ จึงเขียนได้ว่าย่อมมีจำนวนจริง a_1,a_2,a_3 ที่ทำให้

$$\beta = a_1\alpha_1+a_2\alpha_3+a_3\alpha_3$$

$$\therefore\ (a,b) = a_1(a_{11},a_{12})+a_2(a_{21},a_{22})+a_3(a_{31},a_{32})$$

$$= (a_1a_{11}+a_2a_{21}+a_3a_{31},\ a_1a_{12}+a_2a_{22}+a_3a_{32})$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$a_1a_{11}+a_2a_{21}+a_3a_{31} = a$$

$$a_1a_{12}+a_2a_{22}+a_3a_{32} = b$$

เราพบว่าระบบสมการนี้มี 2 สมการ แต่มี 3 ตัวไม่ทราบค่าคือ a_1, a_2 และ a_3 จึงทำให้มีค่ารากได้มากมายหลายค่าซึ่งขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าของตัวไม่ทราบค่าที่เป็นตัวแปรอิสระ 1 ตัว

ดังนั้นถ้าเราสมมุติให้ $a_1 = 0$ ก็จะได้สมการที่เขียนเป็นการรวมเชิงเส้น $\beta = a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$

ถ้าสมมุติให้ $a_2 = 0$ ก็จะได้สมการที่เขียนเป็นการรวมเชิงเส้น $\beta = a_1\alpha_1+a_3\alpha_3$

และถ้ากำหนด $a_3 = 0$ ก็จะได้สมการที่เขียนเป็นการรวมเชิงเส้น $\beta = a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$ นั่นเปรียบเสมือนว่าเรากำจัดเวกเตอร์ α_1, α_2 และ α_3 ออกจากเซ็ต $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ ซึ่งสแปน $R^{(2)}$ ตามลำดับ

ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า ถ้า $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ สแปน $R^{(2)}$ แล้ว เราสามารถกำจัดเวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์ใดในสามเวกเตอร์นี้ออกไปจากเซ็ต แล้วเวกเตอร์ที่เหลืออีกสองเวกเตอร์ก็ยังคงสแปน $R^{(2)}$