8. จงแสดงว่า เซ็ต $\{(a,b), (c,d)\}$ สแปน $R^{(2)}$ ก็ต่อเมื่อ $ad-bc \neq 0$

วิธีทำ ให้ $\beta = (x,y)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$

จะได้ว่า จะต้องมี a_1, a_2 ที่ทำให้เขียนได้ว่า

$$\begin{aligned}(x,y) &= a_1(a,b)+a_2(c,d)\\ &= (a_1a+a_2c,\ a_1b+a_2d)\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นระบบสมการได้ว่า

$$\begin{aligned}aa_1+ca_2 &= x\\ ba_1+da_2 &= y\end{aligned}$$

ระบบสมการนี้จะมีค่าราก คือสามารถหาค่า a_1, a_2 ได้ก็ต่อเมื่อ $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$

หรือ $ad-bc \neq 0$

นั่นคือ $\{(a,b), (c,d)\}$ จะสแปน $R^{(2)}$ ก็ต่อเมื่อ $ad-bc \neq 0$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.6

1. จงพิจารณาว่า เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(n)}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็น linearly dependent หรือ linearly independent สำหรับเซ็ตที่เป็น linearly dependent จงเขียนเวกเตอร์หนึ่งให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เหลือ

1.1) $\{(1,2,3,4), (4,3,2,1)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1(1,2,3,4) + a_2(4,3,2,1) = (0,0,0,0)$

$$\therefore\ (a_1 + 4a_2,\ 2a_1 + 3a_2,\ 3a_1 + 2a_2,\ 4a_1 + a_2) = (0,0,0,0)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 + 4a_2 &= 0 \\ 2a_1 + 3a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 4a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \\ .423 & 231 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งสมมูลกับ
$$\left[\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ 0001 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{array}\right]$$

... $a_1 = 0$ และ $a_2 = 0$

ดังนั้น $\{(1,2,3,4), (4,3,2,1)\}$ เป็น linearly independent

1.2) $\{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (3,6,6)\}$

94
วิธีทำ พิจารณา

$a_1(1,1,0) + a_2(0,2,3) + a_3(1,2,3) + a_4(3,6,6) = (0,0,0)$

แล้วอาจได้ว่า $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a3 = 1$ และ $a4 = -1$

จึงได้ว่า $\{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (3,6,6)\}$ เป็น linearly dependent และอาจเขียนได้ว่า

$(3,6,6) = (1,1,0) + (0,2,3) + (1,2,3)$

1.3) $\{(0,1), (0,-5)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1(0,1) + a_2(0,-5) = (0,0)$

แล้วได้ว่า $a_1 = 5$ และ $a_2 = 1$

จึงกล่าวได้ว่า $\{(0,1), (0, \quad 5)\}$ เป็น linearly dependent

และอาจเขียนได้ว่า $(0,-5) = \quad 5(0,1)$

1.4) $\{(-1,6,-12), (\frac{1}{3},-2,4)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1(-1,6, \quad 12) + a_2(\frac{1}{3},-2,4) = (0,0,0)$

แล้วได้ว่า $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ซึ่งจะทำให้

$(-1,6,-12) + 3(\frac{1}{3},-2,4) = (0,0,0)$

จึงได้ว่า $\{(-1,6,-12), (f, \quad 2,4)\}$ เป็น linearly dependent

และอาจเขียนได้ว่า $(-1,6,-12) = \quad 3(\frac{1}{3},-2,4)$

1.5) $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$ I

วิธีทำ พิจารณาจะได้ว่า

พิจารณา
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

จึงได้ว่า $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)\}$ เป็น linearly independent

1.6) $\{(1,3,-1,4), (3,8,-5,7), (2,9,4,23)\}$

วิธีทำ จะเห็นได้โดยง่ายว่าไม่สามารถเขียน $(3,8,-5,7)$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,3,-1,4)$

และพิจารณาต่อไปว่า $(2,9,4,23)$ สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,3,-1,4)$ กับ $(3,8,-5,7)$ ได้ไหม ?

ให้ $(2,9,4,23) = a_1(1,3,-1,4) + a_2(3,8,-5,7)$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \text{[redacted]} \\ 3 & 8 & \text{[redacted]} \\ -1 & -5 & \text{[redacted]} \\ 4 & 7 & \text{[redacted]} \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง
บวกแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง และ
ลบแถวที่สี่ด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 15 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่หนึ่งด้วย 3 เท่าของแถวที่สอง
ลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง และ
ลบแถวที่สี่ด้วย 5 เท่าของแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $a_1 = 11$ และ $a_2 = -3$

นั่นคือ $(2,9,4,23) = 11(1,3,-1,4) - 3(3,8,-5,7)$

จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,3,-1,4), (3,8, \quad 5,7), (2,9,4,23)\}$ เป็น linearly dependent

1.7) $\{(3,-2), (4,0)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1(3,-2) + a_2(4,0) = (0.0)$

$(3a_1 + 4a_2, -2a_1) = (0,0)$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$3a_1 + 4a_2 = 0$

$-2a_1 = 0$

ซึ่งจะได้ว่า $a_1 = 0$ และ $a_2 = 0$

นั่นแสดงว่า $\{(3, -2), (4,0)\}$ เป็น linearly independent

1.8) $\{(1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (0,0,0)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1(1,1,0) + a_2(0,2,3) + a_3(1,2,3) + a_4(0,0,0) = (0,0,0)$

แล้วได้ว่า ถ้าให้ $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ และ $a_4 = m$ โดย m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็จะได้ว่าสมการข้างต้นเป็นจริง

ดังนั้นจึงได้ว่า { (1,1,0), (0,2,3), (1,2,3), (O,O,O) } เป็น linearly dependent

และอาจเขียนได้ว่า $m(0,0,0) = 0(1,1,0)+0(0,2,3)+0(1,2,3)$

โดย m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

2. จากเซ็ตของเวกเตอร์ใน $R_{2\times 2}$ และ $R_{2\times 3}$ ที่กำหนดให้ จงพิจารณาเช่นเดียวกับแบบฝึกหัดข้อ 1

2.1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1+a_2+4a_4 & a_1+3a_3+6a_4 \\ 2a_1+2a_3+8a_4 & a_1+2a_2+a_3+6a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1+a_2+4a_4 &= 0 \\ a_1+3a_3+6a_4 &= 0 \\ 2a_1+2a_3+8a_4 &= 0 \\ a_1+2a_2+a_3+6a_4 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา $\left[\begin{array}{cccc|c} & & & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สี่ด้วยแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่หนึ่งด้วยแถวที่สอง

ลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง

บวกแถวที่สี่ด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= 0 \\ -a_2 + 3a_3 + 2a_4 &= 0 \\ a_1 + 3a_3 + 6a_4 &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $a_4 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงได้ค่ารากของระบบสมการเป็น

$$\begin{aligned} a_4 &= m \\ a_3 &= -m \\ a_2 &= -m \\ a_1 &= -3m \end{aligned}$$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจึงได้ว่า $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}\right\}$

เป็น linearly dependent และอาจเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2a_4 & a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 & a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 2a_4 = 0$$

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 = 0$$

$$a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง
ลบแถวที่สามด้วยแถวที่หนึ่ง
ลบแถวที่สี่ด้วยแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย 2 เท่าของแถวที่สอง
บวกแถวที่สามด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

คูณตลอดแถวที่สามด้วย $-\frac{1}{3}$ ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย 7 เท่าของแถวที่สาม

บวกแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม

บวกแถวที่สี่ด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วยแถวที่สี่

บวกแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่สี่

บวกแถวที่สามด้วยแถวที่สี่ ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$ และ $a_4 = 0$

นั่นแสดงว่า

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$ เป็น linearly independent

2.3) $$\left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_1+a_2+3a_3 & -2a_1-a_2-8a_3 & 3a_1+4a_2+7a_3 \\ 2a_1+4a_2+2a_3 & 4a_1+5a_2+10a_3 & -a_1-2a_2-a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จัดเป็นระบบสมการและเขียนเป็น augmented matrix ได้เป็น

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สามด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สี่ด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่ห้าด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่หกด้วยแถวที่หนึ่ง ได้

(OOO -121-210-21013 0 00

ซึ่งสมมูลกับ

3 0 0 0 0

จึงได้ว่า

$$a_2 - 2a_3 = \upsilon$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 0$$

ให้ $a_3 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงได้ค่ารากของระบบสมการเป็น

$$a_3 = m$$

$$a_2 = 2m$$

$$a_1 = -5m$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$ เป็น linearly dependent

และอาจเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

2.4) $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$

วิธีทำ กระทำเช่นเดียวกันกับข้อ 2.3) แล้วจะได้ว่า เป็น linearly independent

3. จากเซ็ตของเวกเตอร์ใน P_2 และ P_3 ที่กำหนดให้ จงพิจารณาเช่นเดียวกันกับแบบฝึกหัดข้อ 1

3.1) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(t^2+1) + a_2(t-2) + a_3(t+3) = 0$

$a_1t^2 + (a_2 + a_3)t + (a_1 \quad 2a_2 + 3a_3) = 0$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$a_1 = 0$$

$$a_2 + a_3 = 0$$

$$a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0$$

ซึ่งจะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$ เป็น linearly independent

3.2) $\{t^2+3,\ t,\ 2t^2+t\}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(t^2+3)+a_2t+a_3(2t^2+t) \quad = \quad 0$

$(a_1+2a_3)t^2+(a2+a_3)t+3a_1 \quad = \quad 0$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1+2a_3 &= 0 \\ a_2+a_3 &= C1 \\ 3a_1 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า $a_1=0,\ a_2=0$ และ $a_3=0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{t^2+3,\ t,\ 2t^2+t\}$ เป็น **linearly independent**

3.3) $\{3t^2+t-5,\ 2t^2+t+1,\ t+13\}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(3t^2+t-5)+a_2(2t^2+t+1)+a_3(t+13) = 0$

$(3a_1+2a_2)t^2+(a_1+a_2+a_3)t+(-5a_1+a_2+13a_3) \quad = \quad 0$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} 3a_1+2a_2 &= 0 \\ a_1+a_2+a_3 &= 0 \\ -5a_1+a_2+13a_3 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่สามด้วย 5 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สามด้วย 6 เท่าของแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

จึงได้ว่า

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$a_2 + 3a_3 = 0$$

ให้ $a_3 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงได้ค่ารากของระบบสมการเป็น

$$a_3 = m$$

$$a_2 = -3m$$

$$a_1 = 2m$$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{3t^2 + t - 5, 2t^2 + t + 1, t + 13\}$ เป็น linearly dependent และอาจเขียนได้ว่า $t + 13 = 3(2t^2 + t + 1) - 2(3t^2 + t - 5)$

3.4) $\{t^3 - 4t^2 + 2t + 3, t^3 + 2t^2 + 4t - 1, 2t^3 - t^2 - 3t + 5\}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(t^3 - 4t^2 + 2t + 3) + a_2(t^3 + 2t^2 + 4t - 1) + a_3(2t^3 - t^2 - 3t + 5) = 0$

$(a_1 + a_2 + 2a_3)t^3 + (-4a_1 + 2a_2 - a_3)t^2 + (2a_1 + 4a_2 - 3a_3)t + (3a_1 - a_2 + 5a_3) = 0$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

$$-4a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$$

$$2a_1 + 4a_2 - 3a_3 = 0$$

$$3a_1 - a_2 + 5a_3 = 0$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่สองด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สี่ด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สามด้วย $\frac{2}{6}$ เท่าของแถวที่สอง

บวกแถวที่สี่ด้วย $\frac{4}{6}$ เท่าของแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{6} & 0 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่สามด้วย $-\frac{3}{28}$ ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{6} & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สี่ด้วย $\frac{22}{6}$ เท่าของแถวที่สาม ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 6a_2 + 7a_3 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{ t^3 - 4t^2 + 2t + 3,\ t^3 + 2t^2 + 4t \quad 1,\ 2t^3 - t^2 - 3t + 5 \}$ เป็น linearly independent

3.5) $\{ t^3 - 5t^2 - 2t + 3,\ t^3 - 4t^2 - 3t + 4,\ 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9 \}$

วิธีทำ

พิจารณา

$$a_1(t^3 - 5t^2 - 2t + 3) + a_2(t^3 - 4t^2 - 3t + 4) + a_3(2t^3 - 7t^2 - 7t + 9) = 0$$

$$(a_1 + a_2 + 2a_3)t^3 + (-5a_1 - 4a_2 - 7a_3)t^2 + (-2a_1 - 3a_2 - 7a_3)t + (3a_1 + 4a_2 + 9a_3) = 0$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ -5a_1 - 4a_2 - 7a_3 &= 0 \\ -2a_1 - 3a_2 - 7a_3 &= 0 \\ -2a_1 - 3a_2 - 7a_3 &= 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 9a_3 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ -5\ -2\ 3 & -4\ -3\ 4 & 9 & 0 \end{array}\right] \quad \vdots\ 0$$

บวกแถวที่สองด้วย 5 เท่าของแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง

ลบแถวที่สี่ด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $a_3 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ค่ารากของระบบสมการเป็น

$$a_3 = m$$

$$a_2 = -3m$$

$$a_1 = m$$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า

$\{ t^3-5t^2-2t+3,\ t^3-4t^2-3t+4,\ 2t^3-7t^2-7t+9 \}$ เป็น linearly dependent และอาจเขียนได้ว่า

$$2t^3-7t^2-7t+9 = 3(t^3-4t^2-3t+4)-(t^3-5t^2-2t+3)$$

4 ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซของฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงแบบต่อเนื่องสำหรับเซ็ตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ จงพิจารณาเช่นเดียวกับข้อ 1.

4.1) $\{ \cos t, \sin t, t \}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3 t = 0$

ถ้าให้ $t = 0$ จะได้ $a_1 = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $a_2 + \frac{\pi a_3}{2} = 0$

$t = \pi$ จะได้ $-a_1 + \pi a_3 = 0$

จากสมการชุดข้างต้นจะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{ \cos t, \sin t, t \}$ เป็น linearly independent

4.2) $\{ t, e^t, \sin t \}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1 t + a_2 e^t + a_3 \sin t = 0$

ถ้าให้ $t = 0$ จะได้ $a_2 = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\frac{\pi}{2} a_1 + e^{\frac{\pi}{2}} a_2 + a_3 = 0$

$t = \pi$ จะได้ $\pi a_1 + e^{\pi} a_2 = 0$

จากสมการชุดข้างต้นจะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{ t, e^t, \sin t \}$ เป็น linearly independent

4.3) $\{ t^2, t, e^t \}$

วิธีทำ

พิจารณา $a_1t^2 + a_2t + a_3e^t = 0$

ถ้าให้ $t = 0$ จะได้ $a_3 = 0$

$t = 1$ จะได้ $a_1 + a_2 + ea_3 = 0$

$t = 2$ จะได้ $4a_1 + 2a_2 + e^2a_3 = 0$

จากสมการชุดข้างต้นจะได้ว่า $a_1 = 0, a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\{ t^2, t, e^t \}$ เป็น linearly independent

5. สมมุติว่า $\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ เป็นเซ็ตของเวกเตอร์ที่เป็น linearly independent แล้ว จงแสดงว่า

5.1) $\{ \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1 \}$ จะเป็น linearly independent

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(\alpha_1 + \alpha_2) + a_2(\alpha_2 + \alpha_3) + a_3(\alpha_3 + \alpha_1) = \theta$

$(a_1 + a_3)\alpha_1 + (a_1 + a_2)\alpha_2 + (\alpha_2 + a_3)\alpha_3 = \theta$

เนื่องจาก $\{ \alpha_1, \alpha_2, a3 \}$ เป็น linearly independent จึงได้ว่า

$a_1 + a_3 = 0$

$a_1 + a_2 = 0$

$a_2 + a_3 = 0$

จากสมการชุดข้างต้นนี้จะได้ว่า $a_1 = 0, a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

นั่นแสดงว่า $\{ \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, a3 + \alpha_1 \}$ เป็น linearly independent

5.2) $\{ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3 \}$ จะเป็น linearly independent

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) + a_2(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + a_3(\alpha_1 + \alpha_3) = \theta$

$\therefore (a_1 + a_2 + a_3)\alpha_1 + (a_1 - a_2)\alpha_2 + (-2a_1 - a_2 + a_3)\alpha_3 = \theta$

เนื่องจาก $\{ \alpha_1, \alpha_2, a3 \}$ เป็น linearly independent จึงได้ว่า

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$a_1 - a_2 = 0$

$-2a_1 - a_2 + a_3 = 0$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่สามด้วย 2 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

บวกแถวที่หนึ่งด้วย $\frac{1}{2}$ เท่าของแถวที่สอง

บวกแถวที่สามด้วย $\frac{1}{2}$ เท่าของแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{2}a_3 &= 0 \\ -2a_2 - a_3 &= 0 \\ \frac{5}{2}a_3 &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการชุดข้างต้น จึงได้ว่าค่ารากของสมการคือ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

นั่นแสดงว่า $\{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3,\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3\}$ เป็น linearly independent

5.3) $\{\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3\}$ จะเป็น linearly independent

วิธีทำ

พิจารณา $a_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3) + a_2(\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) + a_3(\alpha_1 + \alpha_3) = \theta$

$$\therefore\ (a_1 + a_2 + a_3)\alpha_1 + (a_1 + 3a_2)\alpha_2 + (-3a_1 - a_2 + a_3)\alpha_3 = \theta$$

เนื่องจาก $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ เป็น linearly independent จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + 3a_2 &= 0 \\ -3a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วยแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่สามด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

ลบแถวที่หนึ่งด้วย $\frac{1}{2}$ เท่าของแถวที่สอง

ลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$a_1 + \frac{3}{2}a_3 = 0$$
$$2a_2 - a_3 = 0$$
$$5a_3 = 0$$

จากสมการชุดข้างต้นจึงได้ว่า ค่ารากของสมการคือ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

นั่นแสดงว่า $\{\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3\}$ เป็น linearly independent

จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\alpha_1 = (a_1, a_2)$, $\alpha_2 = (b_1, b_2)$ จะเป็น linearly dependent ก็ต่อเมื่อ

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

วิธีทำ

พิจารณา $x(a_1,a_2) + y(b_1,b_2) = (0,0)$

$$(a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y) = (0,0)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$a_1x \quad b_1y = 0$$
$$a_2x + b_2y = 0$$

หรือเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

ซึ่งระบบสมการนี้จะมีค่ารากเป็น nontrivial ก็ต่อเมื่อ
เป็น nonsingular (ตาม ท.บ. 2.3.7)

หรือ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

นั่นแสดงว่า เวกเตอร์ $\alpha_1 = (a_1,a_2)$, $\alpha_2 = (b_1,b_2)$ จะเป็น linearly dependent ก็ต่อเมื่อ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ นั่นเอง

เฉลยแบบฝึกหัด 4.7

1. จงพิจารณาว่าสับเซ็ตของ $R^{(2)}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ มีเซ็ตใดบ้างที่เป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$ และจงเขียนเวกเตอร์ (4,5) ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในฐานนั้น

1.1) $\{ (2,2), (3,2) \}$

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{ (2,2), (3,2) \}$ สแปน $R^{(2)}$ หรือไม่

ให้ $\alpha_1 = (2,2), \alpha_2 = (3,2)$

และให้ $\beta = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$ โดย a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$$\therefore (a,b) = a_1(2,2) + a_2(3,2)$$
$$= (2a_1 + 3a_2, 2a_1 + 2a_2)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$2a_1 + 3a_2 = a$$
$$2a_1 + 2a_2 = b$$

แก้สมการหาค่าราก เราจะได้

$$a_1 = \frac{3b-2a}{2} \text{ และ } a_2 = a-b$$

แสดงว่าระบบสมการเป็น consistent

ดังนั้น $\{ (2,2), (3,2) \}$ สแปน $R^{(2)}$

ii) จะพิจารณาว่า $\{ (2,2), (3,2) \}$ เป็น linearly independent หรือไม่ ?

จากค่ารากของ a_1, a_2 ที่หาได้ใน i) ถ้าเราให้ $a = 0, b = 0$ (คือให้ $a_1(2,2) + a_2(3,2) = (0,0)$)ก็จะได้ว่า $a_1 = 0, a_2 = 0$

ดังนั้น $\{ (2,2), (3,2) \}$ เป็น linearly independent

จาก i) และ ii) จึงกล่าวได้ว่า $\{ (2,2), (3,2) \}$ เป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$

และจะเขียนได้ว่า $(4,5) = \frac{7}{2}(2,2) - (3,2)$

1.2) $\{ (2,1), (1,-1), (0,2) \}$

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{ (2,1), (1,-1), (0,2) \}$ สแปน $R^{(2)}$ หรือไม่

ให้ $\alpha_1 = (2,1), \alpha_2 = (1,-1), \alpha_3 = (0,2)$

และให้ $\beta = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$ โดย a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$

$$(a,b) = a_1(2,1) + a_2(1,-1) + a_3(0,2)$$

$$= (2a_1 + a_2,\ a_1 - a_2 + 2a_3)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$2a_1 + a_2 = a$$

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = b$$

แก้สมการหาค่ารากจะได้

$a_3 = m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$a_2 = \frac{a-2b+4m}{3}$$

$$a_1 = a + b - 2m$$

แสดงว่าระบบสมการเป็น consistent

ดังนั้น $\{(2,1), (1,-1), (0,2)\}$ สแปน $R^{(2)}$

ii) จะพิจารณาว่า $\{(2,1), (1,-1), (0,2)\}$ เป็น *linearly* independent หรือไม่

จากค่ารากของ a_1, a_2 และ a_3 ที่หาได้ใน i) ถ้าเราให้ $a = 0$, $b = 0$ และ $m = 3$ ก็จะได้ว่า $a_1 = -6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$ แสดงว่า $\{(2,1), (1,-1), (0,2)\}$ เป็น linearly dependent

จาก i) และ ii) จึงกล่าวได้ว่า $\{(2,1), (1,-1), (0,2)\}$ ไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$

1.3) $\{(3,0), (-5,0)\}$

วิธีทำ

พิจารณา $\{(3,0), (-5,0)\}$ ได้ว่า

$$(3,0) = -\frac{3}{5}(-5,0)$$

แสดงว่า $\{(3,0), (-5,0)\}$ เป็น linearly dependent

จึงกล่าวได้ว่า $\{(3,0), (-5,0)\}$ ไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$

1.4) $\{(1,2)\}$

วิธีทำ พิจารณา $\{(1,2)\}$

ให้ $\beta = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$ โดย a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ เซ็ต $\{(1,2)\}$ จะสแปน $R^{(2)}$ ได้ก็ต่อเมื่อเราสามารถหาจำนวนจริง a_1 ซึ่งทำให้ $\beta = a_1(1,2)$

พิจารณา $(a,b) = (a_1, 2a_1)$

ได้ว่า $a_1 = a = \frac{b}{2}$ แสดงว่าระบบสมการนี้จะหาค่ารากได้ก็ต่อเมื่อ $b = 2a$ ดังนั้น (a,b) จึงไม่ใช่เวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$

ดังนั้น $\{(1,2)\}$ จึงไม่สแปน $R^{(2)}$

จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,2)\}$ ไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$

2. จงพิจารณาว่า สับเซ็ตของ $R^{(3)}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีเซ็ตใดบ้างที่เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$ และจงเขียนเวกเตอร์ $(1,2,3)$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของฐานนั้น

2.1) $\{(1,2,-1), (0,3,1)\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $R^{(3)}$ มีมิติเท่ากับ 3 ดังนั้น เซ็ต $\{(1,2,-1), (0,3,1)\}$ จึงไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$ เพราะมันไม่สแปน $R^{(3)}$ (โดย ท.บ. 4.7.2)

2.2) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 0)\}$

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$ สแปน $R^{(3)}$ หรือไม่

ให้ $\beta = (a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$ โดย a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
(a,b,c) &= a_1(1,1,1)+a_2(1,2,3)+a_3(0,1,0) \\
&= (a_1+a_2,\ a_1+2a_2+a_3,\ a_1+3a_2)
\end{aligned}
$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น
$$
\begin{aligned}
a_1+a_2 &= a \\
a_1+2a_2+a_3 &= b \\
a_1+3a_2 &= c
\end{aligned}
$$

แก้สมการหาค่าราก เราจะได้
$$a_1 = \frac{3a-c}{2},\ a_2 = \frac{c-a}{2} \text{ และ } a_3 = \frac{2b-a-c}{2}$$

แสดงว่าระบบสมการเป็น consistent

ดังนั้น $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$ สแปน $R^{(3)}$

ii) จะพิจารณาว่า $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$ เป็น linearly independent หรือไม่

จากค่ารากของ a_1, a_2 และ a_3 ที่หาได้ใน i) ถ้าเราให้ $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ (คือให้ $a_1(1,1,1) + a_2(1,2,3) + a_3(0,1,0) = (0,0,0)$) ก็จะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้น $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$ เป็น linearly independent จาก i) และ ii) จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$ เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$ และเขียนได้ว่า $(1,2,3) = 0(1,1,1) + 1(1,2,3) + 0(0,1,0)$

2.3) $\{(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)\}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $R^{(3)}$ เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีมิติเท่ากับ 3 ดังนั้น เซ็ต $\{(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)\}$ เป็นเซ็ตของเวกเตอร์ที่มีสมาชิก 4 เวกเตอร์ เซ็ตนี้จึงต้องเป็น linearly dependent (จาก ท.บ. 4.7.3)

ดังนั้น $\{(2,1,3), (1,2,1), (1,1,4), (1,5,1)\}$ จึงไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

2.4) $\{(1,3,-4), (1,4,-3), (2,3,-11)\}$

94

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{(1,3,-4), (1,4,-3), (2,3,-11)\}$ สแปน $R^{(3)}$ หรือไม่

ให้ $\beta = (a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$ โดย a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา

$$(a,b,c) = a_1(1,3,-4) + a_2(1,4,-3) + a_3(2,3,-11)$$

$$= (a_1 + a_2 + 2a_3, 3a_1 + 4a_2 + 3a_3, -4a_1 - 3a_2 - 11a_3)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= a \\ 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 &= b \\ -4a_1 - 3a_2 - 11a_3 &= c \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & 3 & b \\ -4 & -3 & -11 & c \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สองด้วย 3 เท่าของแถวที่หนึ่ง

บวกแถวที่สามด้วย 4 เท่าของแถวที่หนึ่ง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-3a \\ 0 & 1 & -3 & c+4a \end{array}\right]$$

ลบแถวที่สามด้วยแถวที่สอง ได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+7a \end{array}\right]$$

เพราะฉะนั้น ระบบสมการนี้จะมีค่ารากก็ต่อเมื่อ $c-b+7a = 0$

แต่เราต้องการค่ารากสำหรับ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจึงได้ว่า $\{(1,3,-4), (1,4,-3), (2,3,-11)\}$ ไม่สแปน $R^{(3)}$

จึงกล่าวได้ว่า $\{(1,3,-4), (1,4,-3), (2,3,-11)\}$ ไม่เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

3. จงพิจารณาว่า สับเซ็ตของ $R^{(4)}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีเซ็ตใดเป็นฐานสำหรับ (R^4) บ้าง แล้วจงเขียนเวกเตอร์ (1, 3, 2, 4) ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในฐานนั้น

3.1) $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (1,1,0,0)\}$

3.2) $\{(1,4,-1,3), (2,1,-3,-1), (0,2,1,-5)\}$

3.3) $\{(1,-4,-2,1), (1,-3,-1,2), (3,-8,-2,7)\}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $R^{(4)}$ เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีมิติเท่ากับ 4 ดังนั้นเซ็ตของเวกเตอร์ตามข้อ 3.1), 3.2) และ 3.3) จึงไม่สามารถเป็นฐานสำหรับ $R^{(4)}$ ได้ เนื่องจากมันไม่สแปน $R^{(4)}$ (โดย ท.บ. 4.7.2)

4. จงหาฐานสำหรับ $R^{(3)}$ ซึ่งมีเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้อยู่ในฐานด้วย

4.1) เวกเตอร์ (1,0,2)

วิธีทำ

จาก $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ซึ่งเป็นฐานธรรมชาติสำหรับ $R^{(3)}$

พิจารณา { (1,0,2), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) } พบว่า

(1,0,0) ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2)

และ (0,1,0) ก็ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2) กับ (1,0,0)

แต่ (0,0,1) สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2), (1,0,0) และ (0,1,0)

ได้เป็น $(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,2) \quad \frac{1}{2}(1,0,0) + \quad 0 \quad (0,1,0)$

ดังนั้นเราจึงกำจัด (0,0,1) ออกจากเซ็ต { (1,0,2), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) }

จึงได้ว่า เซ็ต { (1,0,2), (1,0,0), (0,1,0) } เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

4.2) เวกเตอร์ (1,0,2) และ (0,1,3)

วิธีทำ

Pin { (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) } ซึ่งเป็นฐานธรรมชาติสำหรับ $R^{(3)}$

พิจารณา { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) } พบว่า

(0,1,3) ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2)

และ (1,0,0) ไม่สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2), (0,1,3)

แต่ (0,1,0) สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0) ได้

โดยเขียนได้ว่า $(0,1,0) = -\frac{3}{2}(1,0,2) + 1(0,1,3) + \frac{3}{2}(1,0,0)$

ดังนั้นเราจึงกำจัดเวกเตอร์ (0,1,0) ออกจากเซ็ต { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) } จึงได้เซ็ต { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0), (0,0,1) } ซึ่งยังคงสแปน $R^{(3)}$ แต่เป็น linearly dependent

จากนั้นเรายังพบอีกว่าในเซ็ต { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0), (0,0,1) } นั้น เวกเตอร์ (0,0,1) สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0) ได้

โดยเขียนได้ว่า $(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,2) + 0 \quad (0,1,3) - \frac{1}{2}(1,0,0)$

ดังนั้นเราจึงกำจัดเวกเตอร์ (0,0,1) ออกจากเซ็ต { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0), (0,0,1) }

จึงได้ว่าเซ็ต { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0) } สแปน $R^{(3)}$ และเป็น linearly independent

ดังนั้น { (1,0,2), (0,1,3), (1,0,0) } จึงเป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

5. จงแสดงว่า เซ็ต { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3)} เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$ แล้วจงเขียนเวกเตอร์ (3,6,9) ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในฐานนี้ และอยากทราบว่า เวกเตอร์ในฐานเวกเตอร์ใดที่สามารถเอาออกจากฐานได้ โดยใช้เวกเตอร์ (3,6,9) ใส่แทน ก็ยังคงเป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

วิธีทำ

i) จะแสดงว่า { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) } สแปน $R^{(3)}$

ให้ β = (a,b,c) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(3)}$ โดย a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $(a,b,c) = a_1(1,2,2)+a_2(0,1,2)+a_3(0,0,3)$

$$= (a_1,\ 2a_1+a_2,\ 2a_1+2a_2+3a_3)$$

จัดเป็นระบบสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ 2a_1 + a_2 &= b \\ 2a_1+2a_2+3a_3 &= c \end{aligned}$$

แก้สมการหาค่าราก จะได้ว่า

$$a_1 = a,\ a_2 = b-2a,\ a_3 = \frac{c-2b+2a}{3}$$

แสดงว่าระบบสมการเป็น consistent

ดังนั้น { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) }สแปน $R^{(3)}$

ii) จะแสดงว่า { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) } เป็น linearly independent

จากค่ารากของ a_1, a_2 และ a_3 ที่หาได้ใน i) ถ้าเราให้ a = 0, b = 0 และ c = 0 (คือให้ $a_1(1,2,2)+a_2(0,1,2)+a_3(0,0,3) = (0,0,0)$) ก็จะได้ว่า $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้น { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) } เป็น linearly independent จาก i) และ ii) จึงกล่าวได้ว่า { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) }เป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$

และเขียนได้ว่า (3,6,9) = 3(1,2,2) + 0(0,1,2) + 1(0,0,3)

พิจารณาเซ็ต { (3,6,9), (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) } พบว่า เวกเตอร์ (0,0,3) สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ (3,6,9), (1,2,2), (0,1,2) โดยเขียนได้เป็น (0,0,3) = 1(3,6,9) − 3(1,2,2) + 0(0,1,2) จึงสามารถเอาเวกเตอร์ (0,0,3) ออกจากฐาน { (1,2,2), (0,1,2), (0,0,3) } แล้วเอาเวกเตอร์ (3,6,9) ใส่แทน จะได้ฐานใหม่สำหรับ $R^{(3)}$ เป็น { (3,6,9), (1,2,2), (0,1,2) }

6. ให้ s = $\{(1,2,-1,3), (2,1,1,1), (3,-2,1,4), (1,1,1,1)\}$ เป็นฐานสำหรับ $R^{(4)}$ จงหาฐานสำหรับ $R^{(4)}$ ที่มีเวกเตอร์ $(2,-3,0,3)$ รวมอยู่กับอีกสามเวกเตอร์ใน s

94

วิธีทำ

พิจารณาเซ็ต $\{(2,-3,0,3), (1,2,-1,3), (2,1,1,1), (3,-2,1,4), (1,1,1,1)\}$ จะพบว่าเวกเตอร์ $(1,1,1,1)$ สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $(2,-3,0,3)$, $(1,2,-1,3)$, $(2,1,1,1)$, $(3,-2,1,4)$ ได้

โดยจะเขียนได้เป็น $(1,1,1,1) = -1(2,-3,0,3)+0(1,2,-1,3)+0(2,1,1,1)+1(3,-2,1,4)$

ดังนั้นจึงได้ว่า ฐานสำหรับ $R^{(4)}$ ที่มีเวกเตอร์ $(2,-3,0,3)$ รวมอยู่กับอีกสามเวกเตอร์ใน S คือ $\{(2,-3,0,3), (1,2,-1,3), (2,1,1,1), (3,-2,1,4)\}$

7. ให้ W เป็นสับสเปซของ $R^{(3)}$ ที่สแปนด้วยเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1), (11,10,7), (7,6,4)$ จงหาฐานและมิติของ W

วิธีทำ

พิจารณาเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1), (11,10,7), (7,6,4)\}$ ซึ่งสแปน W จะได้ว่า $(11,10,7)$ สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2,2)$, $(3,2,1)$ ได้ โดยเขียนได้เป็น $(11,10,7) = 2(1,2,2)+3(3,2,1)$

จึงสามารถเอาเวกเตอร์ $(11,10,7)$ ออกจากเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1), (11,10,7), (7,6,4)\}$ ก็ยังได้ว่าเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1), (7,6,4)\}$ ยังคงสแปน W อยู่ และยังได้อีกว่า เวกเตอร์ $(7,6,4)$ สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2,2)$, $(3,2,1)$ ได้ โดยเขียนได้เป็น $(7,6,4) = 1(1,2,2)+2(3,2,1)$ จึงสามารถเอาเวกเตอร์ $(7,6,4)$ ออกจากเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1), (7,6,4)\}$ ก็ยังได้ว่าเซ็ต $\{(1,2,2), (3,2,1)\}$ ก็ยังคงสแปน W อยู่ อีกทั้งยังเป็น linearly independent ด้วย

ดังนั้นจึงได้ว่า ฐานสำหรับ W คือ $\{(1,2,2), (3,2,1)\}$

และมิติของ W ก็คือ 2

8. จงหาฐานและมิติของ W ซึ่งเป็นสับสเปซของ $R_{2\times 2}$ ที่สแปนด้วย

เซ็ต $$\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

แล้วจงเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในฐานนั้น

วิธีทำ

พิจารณาเซ็ต $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ ซึ่งสแปน W

จะพบว่าเราสามารถเขียน $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ได้ โดยเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

ดังนั้นจึงสามารถเอา $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ ออกจากเซ็ต $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

จึงได้ว่าเซ็ต $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ ก็ยังคงสแปน W

และยังพบว่า เราสามารถเขียน $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ได้

โดยเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

เราจึงสามารถเอาเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ออกจากเซ็ต $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ โดยจะได้ว่าเซ็ต $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right\}$ ก็ยังคงสแปน W และเป็น linearly independent ด้วย

จึงกล่าวได้ว่า $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานสำหรับ W

และมิติของ W คือ 2

9. จงหาฐานสำหรับ P_3 ซึ่งมีเวกเตอร์ t^3+t และ t^2-t รวมอยู่ด้วย

วิธีทำ

จาก $\{t^3, t^2, t, 1\}$ ซึ่งเป็นฐานสำหรับ P_3

พิจารณา $\{t^3+t, t^2-t, t^3, t^2, t, 1\}$ พบว่า

t^2 สามารถเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ t^3+t, t^2-t, t^3 ได้

โดยเขียนได้ว่า $t^2 = (t^3+t)+(t^2-t)-t^3$

จึงเอาเวกเตอร์ t^2 ออกจากเซ็ต $\{t^3+t, t^2-t, t^3, t^2, t, 1\}$

ก็ยังได้ว่าเซ็ต $\{t^3+t, t^2-t, t^3, t, 1\}$ ก็ยังคงสแปน P_3 อยู่

และยังพบว่า สามารถเขียน t ให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของ t^3+t, t^2-t, t^3 ได้ โดยจะเขียนได้ว่า $t = (t^3+t)+0(t^2-t)-t^3$

ดังนั้นสามารถเอา t ออกจากเซ็ต $\{t^3+t, t^2-t, t^3, t, 1\}$ ได้ โดยจะได้ว่าเซ็ต $\{t^3+t, t^2-t, t^3, 1\}$ ก็ยังคงสแปน P_3 และเป็น linearly independent ด้วย

จึงกล่าวได้ว่า $\{t^3+t, t^2-t, t^3, 1\}$ เป็นฐานสำหรับ P_3 ที่มีเวกเตอร์ t^3+t และ t^2-t รวมอยู่ด้วย

10. จงหาฐานและมิติของ w ซึ่งเป็นสับสเปซของ P_3 ที่สแปนด้วยเซ็ต $\{t^3+2t^2-2t+1, t^3+3t^2-t+4, 2t^3+t^2-7t-7\}$

9 4

วิธีทำ

พิจารณาเซ็ต $\{t^3+2t^2-2t+1, t^3+3t^2-t+4, 2t^3+t^2-7t-7\}$ ซึ่งสแปน w

จะพบว่าเราสามารถเขียน $2t^3+t^2-7t-7$ ให้อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของ t^3+2t^2-2t+1 และ t^3+3t^2-t+4 ได้

โดยเขียนได้ว่า $2t^3+t^2-7t-7 = 5(t^3+2t^2-2t+1)-3(t^3+3t^2-t+4)$

ดังนั้นจึงสามารถเอา $2t^3+t^2-7t-7$ ออกจากเซ็ต $\{ t^3+2t^2-2t+1,\ t^3+3t^2-t+4,\ 2t^3+t^2-7t-7 \}$ ได้

ซึ่งยังได้ว่า $\{ t^3+2t^2-2t+1, t^3+3t^2-t+4 \}$ ก็ยังคงสแปน W และเป็น linearly independent ด้วย

จึงได้ว่า $\{ t^3+2t^2-2t+1, t^3+3t^2-t+4 \}$ เป็นฐานสำหรับ W และมิติของ W คือ 2

11. จงพิจารณาว่า สับเซ็ตของ P_2 ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เซ็ตใดบ้างที่เป็นฐานสำหรับ P_2 และจงเขียนเวกเตอร์ $5t^2-3t+8$ ให้เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในฐานนั้น

11.1) $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$ สแปน P_2 หรือไม่

ให้ $p(t) = at^2+bt+c$ เป็นโพลิโนเมียลใด ๆ ใน P_2 โดย a,b,c เป็นจำนวนจริง

เราจะต้องหา a_1, a_2 และ a_3 ที่ทำให้

$$\begin{aligned} at^2+bt+c &= a_1(t^2+t)+a_2(t-1)+a_3(t+1) \\ &= a_1t^2+(a_1+a_2+a_3)t-a_2+a_3 \end{aligned}$$

จัดเป็นระบบสมการได้

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_1+a_2+a_3 &= b \\ -a_2+a_3 &= c \end{aligned}$$

จากสมการ สามารถหาค่าราก a_1, a_2 และ a_3 ได้โดย

$a_1 = a$, $a_2 = \dfrac{b-a-c}{2}$ และ $a_3 = \dfrac{b-a+c}{2}$

นั่นแสดงว่า สามารถหา a_1, a_2, a_3 ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$p(t) = a_1(t^2+t)+a_2(t-1)+a_3(t+1)$ ได้

จึงกล่าวได้ว่า เซ็ต $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$ สแปน P_2

ii) จะพิจารณาว่า $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$ เป็น linearly independent หรือไม่

สมมุติให้ a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$a_1(t^2+t)+a_2(t-1)+a_3(t+1) = \theta$

นั่นคือ จากค่ารากของ a_1, a_2 และ a_3 ที่หาได้ใน i) นั้นเราให้ $a = b = c = 0$

จึงได้ว่า $a_1 = 0, a_2 = 0$ และ $a_3 = 0$

ดังนั้น เซ็ต $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$ จึงเป็น linearly independent

จาก i) และ ii) จึงได้ว่า $\{ t^2+t, t-1, t+1 \}$ เป็นฐานสำหรับ P_2

และสามารถเขียนได้ว่า $5t^2-3t+8 = 5(t^2+t)-8(t-1)+0(t+1)$

11.2) $\{ t^2+t, t-1 \}$

วิธีทำ

เนื่องจาก P_2 ต้องมีมิติเท่ากับ 3

ดังนั้น เซ็ตใด ๆ จะเป็นฐานของ P_2 ได้จะต้องมีเวกเตอร์ในเซ็ตนั้น 3 เวกเตอร์

จึงกล่าวได้ว่า เซ็ต $\{ t^2+t, t-1 \}$ ไม่สามารถเป็นฐานสำหรับ P_2

11.3) $\{ t^2+t, t^2, t^2+1 \}$

วิธีทำ

i) จะพิจารณาว่า $\{ t^2+t, t^2, t^2+1 \}$ สแปน P_2 หรือไม่

ให้ $p(t) = at^2+bt+c$ เป็นโพลิโนเมียลใด ๆ ใน P_2

เราจะต้องหา a_1, a_2, a_3 ที่ทำให้

$$\begin{aligned} at^2+bt+c &= a_1(t^2+t)+a_2t^2+a_3(t^2+1) \\ &= (a_1+a^*+a_3)t^2+a_1t+a_3 \end{aligned}$$

จัดเป็นระบบสมการได้

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &= a \\ a_1 &= b \\ a_3 &= c \end{aligned}$$

จากสมการจะได้ค่ารากเป็น $a_1 = b, a_2 = a-b-c, a_3 = c$

นั่นแสดงว่าเราสามารถหา a_1, a_2 และ a_3 ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$p(t) = a_1(t^2+t)+a_2t^2+a_3(t^2+1)$ ได้

จึงได้ว่า $\{ t^2+t, t^2, t^2+1 \}$ สแปน P_2

ii) **จะพิจารณาว่า** $\{t^2+t, t^2, t^2+1\}$ **เป็น** linearly independent **หรือไม่**

จากค่ารากของ a_1, a_2, a_3 **ที่หาได้ใน** i) **ถ้าให้** $a = 0$, $b = 0$ **และ** $c = 0$ **(คือให้** $a_1(t^2+t)$ $+ a_2t^2 + a_3(t^2+1) = \theta$) **ก็จะได้ว่า** $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ **และ** $a_3 = 0$

จึงได้ว่า $\{t^2+t, t^2, t^2+1\}$ **เป็น** linearly independent

จาก i) **และ** ii) **จึงกล่าวได้ว่า** $\{t^2+t, t^2, t^2+1\}$ **เป็นฐานสำหรับ** P_2

และเขียนได้ว่า $5t^2-3t+8 = -3(t^2+t)+0t^2+8(t^2+1)$

12. จงหาฐานและมิติของสเปซค่าราก หรือ เวกเตอร์ค่าราก (solution space or solution vector) ของระบบสมการต่อไปนี้

12.1)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 0 \\ x+5y+z &= 0 \\ 3x+5y+8z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จากระบบสมการสามารถเขียนเป็นเม่ตริกซ์ได้ เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และได้ว่าระบบสมการนี้ equivalent กับ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ระบบสมการนี้มีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว มี 2 สมการ

ดังนั้นจึงมีตัวแปรอิสระอยู่ 1 ตัว โดยให้ z เป็นตัวแปรอิสระ

ให้ $z = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น ค่ารากของสมการชุดนี้คือ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ a \end{bmatrix}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าเราให้ a = 2 ก็จะได้ค่ารากเฉพาะของสมการ คือ $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

เราพบว่า $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเซ็ตที่สแปนสเปซค่ารากนี้และเป็น linearly independent ด้วย

ดังนั้น $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จึงเป็นฐานสำหรับสเปซค่ารากนี้ และมีมิติเท่ากับ 1

12.2)

$$\begin{aligned} x-2y+7z &= 0 \\ 2x+3y-2z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จากระบบสมการสามารถเขียนเป็นเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และได้ว่าระบบสมการนี้ equivalent กับ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่ารากของสมการชุดนี้คือ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แต่เซ็ต $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$ เป็น linearly dependent

ดังนั้น ฐานสำหรับสเปซค่ารากนี้ คือ เซ็ตว่าง (ϕ)
จึงได้ว่า สเปซค่ารากนี้มีมิติเท่ากับ 0

12.3) $$\begin{aligned} x+2y-2z+2s-t &= 0 \\ x+2y-z+3s-2t &= 0 \\ 2x+4y-7z+s+t &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จากระบบสมการสามารถเขียนเป็นเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และได้ว่าระบบสมการนี้ equivalent กับ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ระบบสมการนี้มีตัวไม่ทราบค่า 5 ตัว มี 2 สมการ
ดังนั้น จึงมีตัวแปรอิสระอยู่ 3 ตัว โดยให้ y, s และ t เป็นตัวแปรอิสระ
ให้ $y = a$, $s = b$ และ $t = c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ
ดังนั้น ค่ารากของสมการชุดนี้คือ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c-4b-2a \\ a \\ c-b \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดค่าเฉพาะให้กับ a, b, c

โดยถ้า $a = 1, b = 0, c = 0$ จะได้ค่าราก คือ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ถ้าให้ $a = 0, b = 1, c = 0$ จะได้ค่าราก คือ $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ถ้าให้ $a = 0, b = 0, c = 1$ จะได้ค่าราก คือ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

เราพบว่า เซ็ต $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

เป็นเซ็ตที่สแปนส กนี้ แ :pendent ด้วย

ดังนั้น เซ็ต $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

จึงเป็นฐานสำหรับสเปซค่ารากนี้ และสเปซค่ารากนี้มีมิติเท่ากับ 3

13. ให้ $\{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \}$ เป็นฐานสำหรับ V และ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ เป็นสกาลาร์ ซึ่งไม่มีตัวใดเป็นศูนย์ (0) แล้ว

13.1) จงพิสูจน์ว่า $\{ a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \}$ เป็นฐานสำหรับ V

พิสูจน์

i) จะแสดงว่า $\{ a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \}$ สแปน V

ให้ β เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V

พิจารณา $\beta = b_1a_1\alpha_1 + b\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$

เนื่องจาก $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ สแปน V ดังนั้นจึงมี $a_1b_1, b_2, \cdots, b_n$ ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\beta = b_1a_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$

และเขียนได้ว่า $\beta = b_1(a_1\alpha_1) + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$ เมื่อ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงกล่าวได้ว่า $\{a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ สแปน V ด้วย

ii) จะแสดงว่า $\{a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ เป็น linearly independent

พิจารณา $b_1a_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n = \theta$

เนื่องจาก $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ เป็น linearly independent

$\therefore\ b_1a_1 = 0, b_2 = 0, \cdots, b_n = 0$

จาก $b_1a_1 = 0$ ถ้า $a_1 \neq 0$ จะได้ว่า $b_1 = 0$

ดังนั้น จึงได้ว่าถ้า $b_1(a_1\alpha_1) + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n = \theta$

แล้ว $b_1 = 0, b_2 = 0, \cdots, b_n = 0$

จึงได้ว่า $\{a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ เป็น linearly independent

จาก i) และ ii) จึงกล่าวได้ว่า $\{a_1\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ เป็นฐานสำหรับ V

13.2) จงพิสูจน์ว่า $\{a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n\}$ เป็นฐานสำหรับ V

พิสูจน์

i) จะแสดงว่า $\{a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n\}$ สแปน V

ให้ β เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V

พิจารณา $\beta = b_1a_1\alpha_1 + b_2a_2\alpha_2 + \cdots + b_na_n\alpha_n$

เนื่องจาก $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ สแปน V ดังนั้น $b_1a_1, b_2a_2, \cdots, b_na_n$ จึงเป็นจำนวนจริง และจาก $a_1, a_2, \cdots, a_n$ เป็นจำนวนจริง จึงได้ว่า ย่อมมีจำนวนจริง $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ที่ทำให้

$\beta = b_1(a_1\alpha_1) + b_2(a_2\alpha_2) + \cdots + b_n(a_n\alpha_n)$

นั่นแสดงว่า $\{a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n\}$ สแปน V

ii) จะแสดงว่า $\{ a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n \}$ เป็น linearly independent

พิจารณา $b_1a_1\alpha_1 + b_2a_2\alpha_2 + \cdots + b_na_n\alpha_n = \theta$

เนื่องจาก $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, a, \}$ เป็น linearly independent

ดังนั้น $b_1a_1 = 0,\ b_2a_2 = 0, \cdots, b_na_n = 0$

แต่ $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0, \cdots, a, \neq 0$

ดังนั้น $b_1 = 0,\ b_2 = 0, \cdots, b_n = 0$ ตามลำดับ

จึงได้ว่า $\{ a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n \}$ เป็น linearly independent

จาก i) และ ii) กล่าวได้ว่า $\{ a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \cdots, a_n\alpha_n \}$ เป็นฐานสำหรับ V

14. จงแสดงว่า เซ็ต $\{ \alpha_1 = (a_{11}, a_{21}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}) \}$ จะเป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$ ก็ต่อเมื่อ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

9 4
วิธทำ

i) ให้ $\beta = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $R^{(2)}$ โดย a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$

$\therefore (a,b) = a_1(a_{11}, a_{21}) + a_2(a_{12}, a_{22})$

$= (a_{11}a_1 + a_{12}a_2, a_{21}a_1 + a_{22}a_2)$

จัดเป็นระบบสมการได้ เป็น

$a_{11}a_1 + a_{12}a_2 = a$

$a_{21}a_1 + a_{22}a_2 = b$

โดยสมการนี้ จะมีค่ารากก็ต่อเมื่อ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

และค่ารากคือ $a_1 = \dfrac{a_{22}a - a_{12}b}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ และ $a_2 = \dfrac{a_{11}b - a_{21}a}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

นั่นแสดงว่า $\{ \alpha_1 = (a_{11}, a_{21}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}) \}$ สแปน $R^{(2)}$

ii) จากค่าราก a_1, a_2 ที่หาได้ใน i) ถ้าให้ $(a,b) = (0.0)$ (คือ $a_1(a_{11}, a_{21}) + a_2(a_{12}, a_{22}) = (0,0)$) ก็จะได้ว่า $a_1 = 0$ และ $a_2 = 0$

นั่นแสดงว่า $\{ \alpha_1 = (a_{11}, a_{21}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}) \}$ เป็น linearly independent

จาก i) และ ii) จึงได้ว่า

เซ็ต $\{\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22})\}$ จะเป็นฐานสำหรับ $R^{(2)}$ ก็ต่อเมื่อ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

15. จากเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ถ้าเป็นไปได้ จงยกตัวอย่างมาอย่างน้อยหนึ่งเซ็ต ถ้าเป็นไปไม่ได้ จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด

15.1) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(5)}$ ที่มี 6 เวกเตอร์ และเป็น linearly independent

ตอบ เป็นไปไม่ได้ เพราะ $R^{(5)}$ มีมิติเท่ากับ 5 ดังนั้น เซ็ตใด ๆ ที่มีเวกเตอร์มากกว่า 5 เวกเตอร์ จะเป็น linearly dependent เสมอ (ตาม ท.บ. 4.7.3)

15.2) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 4 เวกเตอร์ และไม่สแปน $R^{(3)}$

ตอบ ตัวอย่างเช่น เซ็ต $\{ (1,0,0), (2,0,0), (5,0,0), (10,0,0) \}$

15.3) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 2 เวกเตอร์ และเป็น linearly dependent

ตอบ ตัวอย่างเช่น เซ็ต $\{ (1,2,3), (3,6,9) \}$

15.4) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(5)}$ ที่มี 4 เวกเตอร์ และสแปน $R^{(5)}$

ตอบ เป็นไปไม่ได้ ทั้งนี้เพราะถ้าเซ็ตที่มี 4 เวกเตอร์ สแปน $R^{(5)}$ แล้ว จะต้องมีเซ็ตย่อยของเซ็ตนี้ที่เป็นฐานสำหรับ $R^{(5)}$ (ตาม ท.บ. 4.7.2) ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฐานของ $R^{(5)}$ ต้องมี 5 เวกเตอร์

15.5) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 3 เวกเตอร์ ซึ่งสแปน $R^{(3)}$ และเป็น linearly independent ด้วย

ตอบ ยกตัวอย่างเช่น เซ็ต $\{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

15.6) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 3 เวกเตอร์ ซึ่งไม่สแปน $R^{(3)}$ และเป็น linearly independent ด้วย

ตอบ เป็นไปไม่ได้ เพราะ $R^{(3)}$ มีมิติเท่ากับ 3 ดังนั้น เซ็ตใด ๆ ที่มี 3 เวกเตอร์ และเป็น linearly independent แล้ว จะได้ว่าเซ็ตนั้นจะเป็นฐานสำหรับ $R^{(3)}$ (ตาม ท.บ. 4.7.5) ซึ่งเซ็ตนี้ก็ย่อมสแปน $R^{(3)}$ ด้วย ดังนั้น เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 3 เวกเตอร์ที่ไม่สแปน $R^{(3)}$ แต่เป็น linearly independent จึงไม่มี

15.7) เซ็ตของเวกเตอร์ใน $R^{(3)}$ ที่มี 3 เวกเตอร์ ซึ่งไม่สแปน $R^{(3)}$ และเป็น linearly dependent ด้วย

ตอบ ตัวอย่างเช่น เซ็ต $\{ (2,0,0), (4,0,0), (6,0,0) \}$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.8

1. ให้ $L : V \rightarrow W$ เป็นไอโซมอร์ฟิสซึม (isomophism) ของเวกเตอร์สเปซ V ไปบน (onto) เวกเตอร์สเปซ W

1.1) จงพิสูจน์ว่า $L(\theta v) = \theta w$

พิสูจน์

$$\text{เพราะว่า } L(\theta v) = L(0 \cdot \theta v)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L(\theta v) = \mathbf{0}\ L(\theta v)$$

$$= \theta w$$

$$\text{ดังนั้น } L(\theta v) = \theta w$$

1.2) จงแสดงว่า $L(\alpha - \beta) = L(a) - L(\beta)$

วิธีทำ

$$\text{เพราะว่า } L(\alpha-\beta) = L(\alpha+(-1)\beta)$$

$$= L(\alpha)+L\big((-1)\beta\big)$$

$$= L(\alpha)+(-1)L(\beta)$$

$$= L(\alpha)-L(\beta)$$

$$\text{ดังนั้น } L(\alpha-\beta) = L(\alpha)-L(\beta)$$

2. ให้ $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right.$ และ $T = \left.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานลำดับสำหรับเวกเตอร์สเปซ $R_{2\times1}$ ให้ $\alpha = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ และ $\beta = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$

2.1) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ S

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a_1+2a_2\\a_1+3a_2\end{bmatrix}$$

จัดเป็นรูปสมการได้เป็น

$$a_1 + 2a_2 = 1$$

$$a_1 + 3a_2 = 5$$

ค่ารากของสมการนี้คือ $a_1 = -7,\ a_2 = 4$

ดังนั้นจึงได้ว่า โคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α ต่อฐานลำดับ S คือ

$$[\alpha]_S = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

และพิจารณา $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} b_1 + 2b_2 \\ b_1 + 3b_2 \end{bmatrix}$$

จัดเป็นรูปสมการได้เป็น

$$b_1 + 2b_2 = 5$$

$$b_1 + 3b_2 = 4$$

ค่ารากของสมการนี้คือ $b_1 = 7,\ b_2 = -1$

ดังนั้นจึงได้ว่า โคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ β ต่อฐานลำดับ S คือ

$$[\beta]_S = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.2) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน P (transition matrix P) จากฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

วิธีทำ

จากการคำนวณ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมตริกซ์ $P = \begin{bmatrix} & \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐานจาก ฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

3) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ ι และ β ต่อฐานลำดับ T โดยใช้เมตริกซ์ P จาก

2

วิธีทำ

จาก $\left[\alpha\right]_T = P\left[\alpha\right]_S$ จึงได้ว่า

$$\therefore \left[\alpha\right]_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

และจาก $\left[\beta\right]_T = P\left[\beta\right]_S$ จึงได้ว่า

$$\left[\beta\right]_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

4) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ T โดยตรง

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $\left[\alpha\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

และ

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $\left[\beta\right]_T = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$

5) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน Q(transtion matrixQ) จากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ S

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมตริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐานจากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ S

2.6) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ S โดยใช้เมตริกซ์ Q แล้วเปรียบเทียบกับคำตอบในข้อ 2.1) ข้อ 2.2)

วิธีทำ

จาก $[\alpha]_S = Q[\alpha]_T$ จึงได้ว่า

$$[\alpha]_S = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

และ $[\beta]_S = Q[\beta]_T$ จึงได้ว่า

$$[\beta]_S = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเหมือนกับ $[\alpha]_S$ และ $[\beta]_S$ ที่หาได้ใน 2.1)

3. ให้ $S = \{2t^2+t, t^2+3, t\}$ และ $T = \{t^2+1, t-2, t+3\}$ เป็นฐานลำดับสำหรับ P_2 ให้ $\alpha = 8t^2-4t+6$ และ $\beta = 7t^2-t+9$ จงทำเช่นเดียวกับคำสั่งในข้อ 2.

3.1) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ S

พิจารณา $8t^2-4t+6 = a_1(2t^2+t)+a_2(t^2+3)+a_3t$

$$= (2a_1+a_2)t^2+(a_1+a_3)t+3a_2$$

จัดเป็นรูปสมการได้เป็น

$$2a_1 + a_2 = 8$$

$$a_1 + a_3 = -4$$

$$3a_2 = 6$$

ค่ารากของสมการนี้คือ $a_1 = 3, a_2 = 2$ และ $a_3 = -7$

ดังนั้นจึงได้ว่า โคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α ต่อฐาน S คือ

$$\left[\alpha\right]_S = \left[3, 2, -7\right]$$

และพิจารณา $7t^2 - t + 9 = a_1(2t^2+t) + a_2(t^2+3) + a_3t$

$$= (2a_1+a_2)t^2 + (a_1+a_3)t + 3a_2$$

จัดเป็นรูปสมการได้เป็น

$$2a_1 + a_2 = 7$$

$$a_1 + a_3 = -1$$

$$3a_2 = 9$$

ค่ารากของสมการนี้คือ $a_1 = 2, a_2 = 3$ และ $a_3 = -3$

ดังนั้นจึงได้ว่า โคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ β ต่อฐานลำดับ S คือ

$$\left[\beta\right]_S = \left[2, 3, -3\right]$$

3.2) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน P จากฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$2t^2 + t = 2(t^2+1) + 1(t-2) + 0(t+3)$$

$$t^2 + 3 = 1(t^2+1) - \frac{2}{5}(t-2) + \frac{2}{5}(t+3)$$

$$t = 0(t^2+1) + \frac{3}{5}(t-2) + \frac{2}{5}(t+3)$$

ดังนั้นเมตริกซ์ $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน

จากฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

3.3) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ T โดยใช้เมตริกซ์ P จากข้อ 3.2)

วิธีทำ

จาก $[\alpha]_T = [\alpha]_S P$ จึงได้ว่า

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

และจาก $[\beta]_T = [\beta]_S P$ จึงได้ว่า

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ T โดยตรง

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$8t^2 - 4t + 6 = 8(t^2+1) - 2(t-2) - 2(t+3)$$

ดังนั้น $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

และ $7t^2 - t + 9 = 7(t^2+1) - (t-2) + 0(t+3)$

ดังนั้น $[\beta]_T = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3.5) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน Q จากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ S

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$t^2+1 = \frac{1}{3}(2t^2+t) + \frac{1}{3}(t^2+3) - \frac{1}{3}(t)$$

$$t-2 = \frac{1}{3}(2t^2+t) - \frac{2}{3}(t^2+3) + \frac{2}{3}t$$

$$t+3 = -\frac{1}{2}(2t^2+t) + 1(t^2+3) + \frac{3}{2}t$$

ดังนั้น เมตริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน

จากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ S

3.6) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ S โดยใช้เมตริกซ์ Q แล้วเปรียบเทียบกับคำตอบในข้อ 3.1)

วิธีทำ

จาก $[\alpha]_S = [\alpha]_T Q$ จึงได้ว่า

$$[\alpha]_S = [8 \quad -2 \quad -2] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= [3 \quad 2 \quad -7]$$

และจาก $[\beta]_S = [\beta]_T Q$ จึงได้ว่า

$$[\beta]_S = [7 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{1} \end{bmatrix}$$

$$= [2 \quad 3 \quad -3]$$

ซึ่งเหมือนกับ $[\alpha]_S$ และ $[\beta]_S$ ที่หาได้ในข้อ 3.1)

4. ให้ S = { (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1) } และ T = { (1,1,1), (1,2,3), (1,0,1) } เป็นฐานลำดับสำหรับ $R^{(3)}$ ให้ $\alpha = (-1,4,5)$, $\beta = (2,0,6)$ จงทำเช่นเดียวกับคำสั่งในข้อ 2.

4.1) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ S

วิธีทำ

พิจารณา $(-1,4,5) = a_1(0,1,1) + a_2(1,0,0) + a_3(1,0,1)$

ค่ารากของสมการนี้คือ $a_1 = 4$, $a_2 = -2$ และ $a_3 = 1$

ดังนั้นจึงได้ว่า โคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α ต่อฐาน S คือ

$$\left[\alpha\right]_S = \left[4 \quad -2 \quad 1\right]$$

และพิจารณา $(2,0,6) = b_1(0,1,1) + b_2(1,0,0) + b_3(1,0,1)$

ค่ารากของสมการนี้คือ $b_1 = 0,\ b_2 = -4$ และ $b_3 = 6$

ดังนั้น

$$\left[\beta\right]_S = \left[0 \quad -4 \quad 6\right]$$

4.2) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน P จากฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$(0,1,1) = 0\,(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,2,3) \quad \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$(1,0,0) = 1\,(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$(1,0,1) = 0\,(1,1,1) + 0\,(1,2,3) + 1\,(1,0,1)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ P $= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน
จากฐานลำดับ S ไปยังฐานลำดับ T

4.3) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ T โดยใช้เมตริกซ์ P จากข้อ 4.2)

วิธีทำ

จาก $\left[\alpha\right]_T = \left[\alpha\right]_S P$ จึงได้ว่า

$$\left[\alpha\right]_T = \left[4 \quad -2 \quad 1\right]\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-2 \quad 3 \quad -2\right]$$

และจาก $\left[\beta\right]_T = \left[\beta\right]_S P$ จึงได้ว่า

$$\left[\beta\right]_T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.4) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ T โดยตรง

วิธีทำ

จากการคำนวณได้ว่า

$$(-1,4,5) = -2(1,1,1)+3(1,2,3)-2(1,0,1)$$

ดังนั้น $\left[\alpha\right]_T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

และ $(2,0,6) = -4(1,1,1)+2(1,2,3)+4(1,0,1)$

ดังนั้น $\left[\beta\right]_T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

4.5) จงหาเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน **Q** จากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ s

จากการคำนวณได้ว่า

$$(1,1,1) = 1(0,1,1)+1(1,0,0)+0(1,0,1)$$

$$(1,2,3) = 2(0,1,1)+0(1,0,0)+1(1,0,1)$$

$$(1,0,1) = 0(0,1,1)+0(1,0,0)+1(1,0,1)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เปลี่ยนฐาน

จากฐานลำดับ T ไปยังฐานลำดับ s

4.6) จงหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ α และ β ต่อฐานลำดับ s โดยใช้เมตริกซ์ Q แล้วเปรียบเทียบกับคำตอบในข้อ **4.1)**

94

วิธีทำ

จาก $\left[\alpha\right]_S = \left[\alpha\right]_T Q$ จึงได้ว่า

$$\left[\alpha\right]_S = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$