บทที่ 3
ดีเทอร์มิแนนท์

1. จงหา S_4, S_5 พร้อมทั้งหาจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดของการจัดลำดับแต่ละชุดใน S_4, S_5

วิธีทำ

S_4 คือ เซ็ตของการจัดลำดับทั้งหมดของสมาชิกใน $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\therefore \quad S_4 = \{1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}$$

1234 มีอินเวอร์ชันเป็น 0

1243, 1324, 2134 มีอินเวอร์ชันเป็น 1

1342, 1423, 2143, 2314, 3124 มีอินเวอร์ชันเป็น 2

1432, 2413, 3142, 3214, 4123 มีอินเวอร์ชันเป็น 3

2431, 3241, 3412, 4132, 4213 มีอินเวอร์ชันเป็น 4

3421, 4231, 4312 มีอินเวอร์ชันเป็น 5

4321 มีอินเวอร์ชันเป็น 6

S_5 คือ เซ็ตของการจัดลำดับทั้งหมดของสมาชิกใน $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

จำนวนสมาชิกใน $S_5 = 5! = 120$

ส่วนการหา S_5 และการหาจำนวนอินเวอร์ชันนั้นทำได้ในทำนองเดียวกับใน S_4

2. จงคำนวณหาจำนวนการจัดลำดับคู่และจำนวนการจัดลำดับคี่ใน S_4 และ S_5

วิธีทำ

จากข้อ 1

จำนวนการจัดลำดับคู่ใน $S_4 = 12$

จำนวนการจัดลำดับคี่ใน $S_4 = 12$

3. จงพิจารณาว่าการจัดลำดับต่อไปนี้ การจัดลำดับใดเป็นการจัดลำดับคู่ และการจัดลำดับใดเป็นการจัดลำดับคี่

(1) 53421

(2) 23514

(3) 13672485

(4) 12438576

วิธีทำ

(1) 53421 มี 8 อินเวอร์ชัน ดังนั้น จึงเป็นการจัดลำดับ คู่

(2) 23514 มี 4 อินเวอร์ชัน ดังนั้น จึงเป็นการจัดลำดับคู่

(3) 13672485 มี 8 อินเวอร์ชัน ดังนั้น จึงเป็นการจัดลำดับคู่

(4) 12438576 มี 5 อินเวอร์ชัน ดังนั้น จึงเป็นการจัดลำดับคี่

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้ โดยอาศัยนิยาม 3.2.1

(1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ (2) $\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{matrix}\right|$

วิธีทำ

(1) จากข้อ 1 แบบฝึกหัด 3.1 จะได้

S_4 = { 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 }

ดังนั้น $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

$= \Sigma(\pm)\, a_{ij_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$

$= a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} - a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} + a_{11} a_{23} a_{34} a_{42}$
$+ a_{11} a_{24} a_{32} a_{43} - a_{11} a_{24} a_{33} a_{.42} - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}$
$+ a_{12} a_{23} a_{31} a_{44} - a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} - a_{12} a_{24} a_{31} a_{43} + a_{12} a_{24} a_{33} a_{41}$
$+ a_{13} a_{21} a_{32} a_{44} - a_{13} a_{21} a_{34} a_{42} - a_{13} a_{22} a_{31} a_{44} + a_{13} a_{22} a_{34} a_{41}$
$+ a_{13} a_{24} a_{31} a_{42} - a_{13} a_{24} a_{32} a_{41} - a_{14} a_{21} a_{32} a_{43} + a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$
$+ a_{14} a_{22} a_{31} a_{43} - a_{14} a_{22} a_{33} a_{41} - a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} + a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$

(2) $\begin{bmatrix} & & & \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0_1 & 2 & 12 & -7 \end{bmatrix}$

$= (1)(4)(2)(-7) - (1)(4)(0)(2) - (1)(1)(5)(-7) + (1)(1)(0)(1) + (u(7)(5)(2)$

$- (1)(7)(2)(1) - (2)(3)(2)(-7) + (2)(3)(0)(2) + (2)(1)(-2)(-7) - (2)(1)(0)(0)$

$- (2)(7)(-2)(2) + (2)(7)(2)(0) + (0)(3)(5)(-7) - (0)(3)(0)(1) - (0)(4)(-2)(-7)$

$+ (0)(4)(0)(0) + (0)(7)(-2)(1) - (0)(7)(5)(0) - (5)(3)(5)(2) + (5)(3)(2)(1)$

$+ (5)(4)(-2)(2) - (5)(4)(2)(0) - (5)(1)(-2)(1) - (5)(1)(5)(0)$

$= -56 - 0 + 35 + 0 + 70 - 14 + 84 + 0 + 28 - 0 + 56 + 0 + 0 - 0 - 0 + 0$

$+ 0 + 0 + 0 - 150 + 30 - 80 - 0 + 10 + 0$

$= 13$

2. จงคำนวณหาค่าต่อไปนี้

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (4)(-2) = 15 + 8 = 23$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (4)(5) - (2)(-2) = 20 + 4 = 24$

(3) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix} = (a-b)(a-b) - (a+b)(a+b) = (a^2-2ab+b^2) \quad (a^2+2ab+b^2)$

$= -4ab$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-2x-1) + (4)(5)(3) + (2x3)(2) - (2)(-2)(3) - (5)(3)(1) - (-1)(2)(4)$

$= 2 + 60 + 12 + 12 - 15 + 8 = 79$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (2)(-2)(3) + (4)(2)(-1) + (1)(3)(5) - (1)(-2)(-1) - (2)(3x2) - (3)(5)(4)$

$= -12 - 8 + 15 - 2 - 12 - 60 = -79$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-2)(-1) + (4)(5)(0) + (2)(0)(0) - (2)(-2)(0) \quad (5)(0)(0) - (-1)(0)(4)$

$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2)(2) + (0)(0)(3) + (0)(1)(1) - (0)(2)(3) - (0)(1)(2) \quad (2)(1)(0)$

$= 8$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)(5)(0) + (4)(0)(3) + (0)(6)(2) - (W(3) - (0)(6)(1) - (0)(2)(4) = 0$

3. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= (1)(2)(2) + (1)(1)(5) + (3)(3)(-2) - (3)(2)(5) - (1)(3)(1) - (2)(-2)(1) \\ &= 4 + 5 - 18 - 30 - 3 + 4 \\ &= -38 \end{aligned}$$

(2) $$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det B &= (2)(-4)(5) + (0)(-1)(-4) + (1)(2)(3) - (1)(-4)(-4) - (-1)(2)(2) \\ &\quad - (5)(3)(0) \\ &= -40 + 0 + 6 - 16 + 4 - 0 \\ &= -46 \end{aligned}$$

(3) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 17 \\ 5 & -8 & 15 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det AB &= (7)(-8)(0) + (5)(3)(17) + (8)(15)(6) - (8)(-8)(17) - (3)(15)(7) - (0)(6)(5) \\ &= 0 + 255 + 720 + 1088 - 315 - 0 \\ &= 1748 \end{aligned}$$

ข้อสังเกตุ

$$\det AB = 1748 = (-38)(-46) = \det A \cdot \det B$$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ตามทฤษฎี 3.3.4

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 4 = 16$ (ทบ. 3.3.7)

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-2)R_1 + R_3 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} \end{vmatrix} \quad R_3 \leftarrow \frac{1}{7} R_2 + R_3$$

$$= 1 \times 7 \times \frac{15}{7} = 15$$

(4) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \quad R_3 \leftarrow (-3)R_2 + R_3$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \quad R_2 \leftarrow -\frac{1}{2} R_1 + R_2$$

$$= 4 \times 1 \times 8 = 32$$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 1 \times (-4) = -24$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow 3R_1 + R_3 \\ R_4 \leftarrow -2R_1 + R_4 \end{array}$

$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} R_3 \leftarrow (-1)R_2 + R_3 \\ R_4 \leftarrow (-2)R_2 + R_4 \end{array}$

$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{4} \end{vmatrix}$ $R_4 \leftarrow \left(-\frac{7}{12}\right) R_3 + R_4$

$= -(1)\,(1)\,(12)\left(-\frac{11}{4}\right) = 33$

(7) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $R_3 \leftrightarrow R_4$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_1 + R_2 \\ R_4 \leftarrow -\frac{3}{4}R_1 + R_4 \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow -\frac{3}{2}R_2 + R_4 \end{matrix}$$

$$= -(4)(-1)(1)(1) = 4$$

(8) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{11}{2} & -8 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & -\frac{19}{2} & -16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \leftarrow -11R_1 + R_4 \end{matrix}$$

$$= 2.2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} & -4 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & -\frac{19}{2} & -16 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{25}{4} & 8 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow -3R_2 + R_3 \\ R_4 \leftarrow -8R_2 + R_4 \end{matrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{4} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & 16 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 0 = 0$$

(9) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ 0 & x-2 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(10) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + x^3 + x^3 - x^6 - 1 - x^3$

$= 2x^3 - x^6 - 1$

$= 2x^3 - (x^3)^2 - 1$

$= 2(1) - (1)^2 - 1 \quad (x \neq 1,\ x^3 = 1)$

$= 2 - 1 - 1$

$= 0$

(11) $\begin{vmatrix} -i & 1 & 2 & i+2 \\ 2 & 3 & i-1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -i & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & i-1 & -3i+3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad C_4 \leftarrow iC_2 + C_4.$

$= (-i)\begin{vmatrix} -i & 2 & 2 \\ 2 & i-1 & -3i+3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ กระจายตามแถวที่ 4

$= (-i)\,[\,(-1-i) + 16 + (-6i+6) - (2i-2) - (-12-12i) - (-4)\,]$

$= (-i)(39+3i)$

$= 3 - 39i$

(12) $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & -1 & 2i \\ 1+i & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) + (-2-2i) - (i-1)$

$= -1 - 2 - 2i - i + 1$

$= -2 - 3i$

2. จงอาศัยคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์พิสูจน์ว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

พิสูจน์

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad R_2 \leftarrow R_2 - R_1$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

3. ถ้า เมตริกซ์ A เป็น nonsingular จงพิสูจน์ว่า $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

พิสูจน์

ถ้า A เป็น nonsingular จะได้

$$AA^{-1} = I$$
$$\det AA^{-1} = \det I$$
$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$
$$\therefore \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$ โดย $\det A \neq 0$ เพราะ A เป็น nonsingular

4. ถ้า $AB = I_n$ จงพิสูจน์ว่า $\det A \neq 0$ และ $\det B \neq 0$

พิสูจน์

ถ้า $AB = I$ จะได้

$$\det A \cdot B = \det I$$
$$\therefore \det A \cdot \det B = 1$$

แสดงว่า $\det A \neq 0$ และ $\det B \neq 0$

5. ถ้า $A = A^{-1}$ จงพิสูจน์ว่า $\det A = \pm 1$

พิสูจน์

เนื่องจาก $AA^{-1} = I$ ดังนั้น

$$\det AA^{-1} = \det I$$
$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$
$$\det A \cdot \det A = 1$$
$$(\det A)^2 = 1$$
$$\therefore \det A = \pm 1$$

6. ถ้า A’ = A-’ จงหา det A

พิสูจน์

เนื่องจาก AA-’ = I

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\det A \,.\, \det A' = 1$ เพราะ A’ = A-’

$\det A \,.\, \det A = 1$ เพราะ $\det A = \det A'$

$\therefore \det A = \pm 1$

7. ถ้า A เป็น nonsingular และ $A^2 = A$ จงหา det A

พิสูจน์

จาก $A^2 = A$ จะได้

$\det A^2 = \det A$

$\det A \cdot A = \det A$

$\det A \,.\, \det A = \det A$

$\therefore \det A = 1$ (เพราะ A เป็น nonsingular ดังนั้น $\det A \neq 0$)

8. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่ง similar กัน จงพิสูจน์ว่า $\det A = \det B$

พิสูจน์

เมตริกซ์ A similar กับ B ก็ต่อเมื่อมี nonsingular matrix P ซึ่งทำให้

$$B = P^{-1} A P$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \det B &= \det P^{-1} A P \\ &= \det P^{-1} \,.\, \det A \,.\, \det P \\ &= \det P^{-1} \det P \,.\, \det A \\ &= \det P^{-1} P \,.\, \det A \\ &= \det I \,.\, \det A \\ &= 1 \cdot \det A \\ &= \det A \end{aligned}$$

9. ถ้า det AB = 0 จงแสดงว่า det A = 0 หรือ det B = 0

พิสูจน์

จาก det AB = 0 จะได้

det A · det B = 0

ถ้า det A $\neq$ 0 จะได้ det B = 0

ถ้า det B $\neq$ 0 จะได้ det A = 0

นั่นคือ det A = 0 หรือ det B = 0

10. ถ้า c เป็นสเกลาร์ใด ๆ และ A เป็นแมตริกซ์ขนาด n x n จงพิสูจน์ว่า det cA = c^n det A-

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]$

$$cA = [cA_{ij}]$$

$$\det cA = \Sigma(\pm)\, ca_{1j_1} ca_{2j_2} \ldots ca_{nj_n}$$

$$= \Sigma(\pm)\, c^n a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

$$= c^n \Sigma(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

$$= c^n \det A$$

11. ถ้า A เป็น Skew - Symmetric และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จงพิสูจน์ว่า det A = 0

พิสูจน์

ถ้า A เป็น Skew - Symmetric จะได้

$$A = -A'$$

$\therefore$ $\det A = \det(-A')$

$= (-1)^n \det A'$ (จากข้อ 10)

$= (-1)^n \det A$ (det A' = det A)

$= -\det A$ (เพราะเป็นเลขคี่)

แสดงว่า det A = 0

12. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด n x n จงพิสูจน์ว่า

$\det A'B = \det AB' = \det A'B' = \det AB$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\det A'B &= \det A' \det B = \det A \det B' = \det AB' \\ &= \det A' \det B' \, , \det A'B' \\ &= \det A \det B = \det AB\end{aligned}$$

13. ให้ $A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ เมื่อ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $\det A = \det B$

วิธีทำ

จาก $A = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$

$$\therefore \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \det B$$

14. ให้ $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

$\det C = \det A \det B$

วิธีทำ

จาก $$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\ (2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

เนื่องจาก $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$

จึงได้ว่า $\det C = \det A \cdot \det B$

15. ให้ $D = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

และ $c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $\det D = \det A \cdot \det B$

วิธีทำ

จาก $$D = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\ (1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

แต่ $$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

จึงได้ว่า $\det D = \det A \cdot \det B$

16. จงใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์แสดงให้เห็นว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

พิสูจน์

เอาแถวที่ 1, แถวที่ 2, แถวที่ 3 ไปบวกกับแถวที่ 4 จะได้

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ทบ. } 3.3.4)$$

17. จงใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์พิสูจน์ว่า

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

พิสูจน์

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & b \\ b-c & 1 & c \\ c-a & 1 & a \end{vmatrix} \quad C_3 - C_1$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix} \quad C_3 + C_1$$

18. ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น upper triangular matrix จงพิสูจน์ว่า A จะเป็น nonsingular ก็ต่อเมื่อ $a_{ii} \neq 0$

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น upper triangular matrix

ดังนั้น $\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ ทบ. 3.3.7

ถ้า A เป็น nonsingular แสดงว่า

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$$

นั่นคือ $a_{ii} \neq 0$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

ถ้า $a_{ii} \neq 0$ จะได้

$\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$

นั่นคือ A เป็น nonsingular matrix

19. ให้ $A^2 = A$ จงพิสูจน์ว่า A เป็น singular หรือ $\det A = 1$

พิสูจน์

ให้ $A^2 = A$ ดังนั้น $\det A^2 = \det A$ หรือ $(\det A)^2 = \det A$

จำนวนที่จะยกกำลัง 2 แล้วเท่ากับตัวมันเองได้มีอยู่เพียง 2 จำนวนเท่านั้น คือ 1 และ 0

ถ้า $\det A \neq I$ แสดงว่า $\det A = 0$ นั่นคือ A เป็น singular

ถ้า A เป็น nonsingular นั่นคือ $\det A \neq 0$ แสดงว่า $\det A = 1$

ดังนั้น เราสรุปได้ว่า A เป็น singular หรือ $\det A = 1$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.4

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา det M_{13}, det M_{31}, det M_{22} และ det M_{32}

วิธีทำ

$$\det M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

$$\det M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2$$

$$\det M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-3) - (-10) = 7$$

$$\det M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$$

2. จงหาโคแฟคเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัวในคอลัมน์ที่ 2 ของเมตริกซ์

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2. \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = (1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = (-1)^3 \quad 1 \; 21 \quad 21 \;\Big| = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det M_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det M_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \det M_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

3. ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 5×5 จงหาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ของ a_{22}, a_{31}, a_{42} และ a_{53}

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$

ไมเนอร์ของ a_{22} **คือ** $\det M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

โคแฟคเตอร์ของ a_{22} **คือ** $(-1)^{2+2} \det M_{22} = \det M_{22}$

ไมเนอร์ของ a_{31} คือ $\det M_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

โคแฟคเตอร์ของ a_{31} คือ $(-1)^{3+1} \det M_{31} = \det M_{31}$

ส่วนที่เหลือหาได้ในทำนองเดียวกัน

4. ให้ $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ จงหา A_{12}, A_{23}, A_{33} และ A_{41}

วิธีทำ

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \det M_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

5. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ในข้อ 1 โดยวิธี

(1) กระจายตามแถว

(2) กระจายตามคอลัมน์

(3) เปรียบเทียบดีเทอร์มิแนนท์ที่ได้จาก (1) และ (2) ว่าเท่ากันหรือไม่

วิธีทำ

จากข้อ 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(1) หาดีเทอร์มิแนนท์ของ A โดยการกระจายตามแถวที่ 1 ของ A จะได้

$$\begin{aligned}
\det A &= 1\,A_{11} + 0\,A_{12} + (-2)\,A_{13} \\
&= A_{11} - 2A_{13} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2(-11) - (2)(-1)^4(1) \\
&= -13
\end{aligned}$$

(2) หาดีเทอร์มิแนนท์ของ A โดยวิธีกระจายตามคอลัมน์ที่ 2 ของ A จะได้

$$\begin{aligned}
\det A &= 0\,A_{12} + 1\,A_{22} + 2\,A_{32} \\
&= A_{22} + 2\,A_{32} \\
&= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^4\,(7) + 2(-1)^5\,(10) \\
&= 7 - 20 = -13
\end{aligned}$$

(3) จะเห็นว่าดีเทอร์มิแนนท์ที่ได้จาก (1) และ (2) เท่ากัน

6. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ในข้อ 4 โดยวิธีกระจายตามแถวหรือคอลัมน์

วิธีทำ

จากข้อ 4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

หาดีเทอร์มิแนนท์ของ A โดยวิธีกระจายตามคอลัมน์ที่ 4 ของ A จะได้

$$\det A = 0\,A_{14} + (-1)\,A_{24} + 0\,A_{34} + 0\,A_{44}$$

$$= (-1)\,A_{24}$$

$$= (-1)(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{6}(13)$$

$$= -13$$

7. จงหาดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีกระจายตามแถวหรือคอลัมน์ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$= (1)(1) + (2)(-1)(10) + (3)(1)(7)$$

$$= 1 - 20 + 21 = 2$$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\,A_{12} + (-4)\,A_{22} + 0\,A_{32} + (-2)\,A_{42}$

$= A_{12} + (-4)\,A_{22} + (-2)\,A_{42}$

$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

$+ (-4)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \quad (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

$= (-1)\ (12)\ +\ (-4)\ (1)\ (113)\ +\ (-2)\ (1)\ (-31)$

$= -12 - 452 + 62 = -378$

8. ให้ $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ จงหา det B โดยอาศัยคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ ทำให้แถวใดแถวหนึ่งมี 0 มากที่สุด แล้วหาดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีกระจายตามแถวนั้น

วิธีทำ

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 \leftarrow (-2)\,R_1 + R_2 \\ \\ R_4 \leftarrow (-3)\,R_1 + R_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$ กระจายตามคอลัมน์ที่ 1

$= (4)(-1)(-12) - (12)(1)(4)$

$= 48 - 48$

$= 0$

9. จงหาค่าของ t ซึ่งทำให้

(1) $\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 3 & t-3 \end{vmatrix} = 0$ (2) $\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = 0$

วิธีทำ (1) $\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 3 & t-3 \end{vmatrix} = 0$

$$(t-2)(t-3) - 6 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 - 6 = 0$$

$$t(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 0, 5$$

(2) $\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1, 4$$

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = 0$

$$(t-1)(t+2)(t+1) = 0$$

$$t = 1, -2, -1$$

10. จงหา $\det(tI_n - A)$ เมื่อ A คือ เมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) $$tI_2 - A = \begin{bmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t-4) - 6$$

$$= t^2 - 5t + 4 - 6$$

$$= t^2 - 5t - 2$$

(2) $$tI_3 - A = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & 2 \\ 2 & t+1 & 3 \\ 3 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & 2 \\ 2 & t+1 & 3 \\ 3 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2(t+1) + 27 - 6(t+1) - 6(t-1)$$

$$= t^3 - t^2 - t + 1 + 27 - 6t - 6 - 6t + 6$$

$$= t^3 - t^2 - 13t + 28$$

(3) $$tI_2 - A = \begin{bmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 - 1$$

$$= t^2 - 2t + 1 - 1$$

$$= t^2 - 2t$$

$$= t(t-2)$$

1. จงหาแอ็ดจอยท์ของเมตริกซ์ข้างล่างนี้

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) $\operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) $\operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{vmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & & -2 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ 0 & & 1 \\ 0 & - & \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

2. จงหาดีเทอร์มิแนนท์, แอ็ดจอยท์ และอินเวอร์ส(ถ้ามี) ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

คำตอบ

(1) ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad 5 =$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -5 \\ -34 & 17 & 17 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} ไม่มี (เนื่องจาก $\det A = 0$)

(3) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -634 & -122 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ adj } A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

(4) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$ จากข้อ 2 แบบฝึกหัด 3.3

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} bc^2 - b^2c & a^2c - ac^2 & ab^2 - a^2b \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)} \begin{bmatrix} bc^2 - b^2c & a^2c - ac^2 & ab^2 - a^2b \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{bmatrix}$$

(5) ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(6) ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = 1$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(1) จงหา $\det A$

(2) จงหา $\operatorname{adj} A$

(3) จงแสดงว่า $(\operatorname{adj} A)\, A = (\det A)\, I_3$

(4) จงหาอินเวอร์สของ A

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) $\det A = 120 - 96 + 8 - 128 - 24 + 30$

$= -90$

(2) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -28 & 16 & 19 & -2 & -16 & 22 & -30 & -30 & 30 \end{bmatrix}$

(3) $$\begin{bmatrix} 16 & 22 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -28 & -16 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} = -90 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $(\operatorname{adj} A)(A) = (\det A) I_3$

(4) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = -\frac{1}{90} \begin{bmatrix} 16 & 22 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -28 & -16 & 30 \end{bmatrix}$$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จงหา

(1) adj A (2) adj (adj A)

(3) ถ้า $ad - bc \neq 0$ จงหาอินเวอร์สของ A

วิธีทำ

(1) $$\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(2) $$\text{adj } (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

(3) $$\det A = ad - bc$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5. ถ้าเมตริกซ์ A เป็น nonsingular และ symmetric จงพิสูจน์ว่า A^{-1} เป็น symmetric

พิสูจน์

ถ้า A เป็น nonsingular แสดงว่า A^{-1} หาได้

และถ้า A เป็น symmetric แสดงว่า $A^t = A$

ดังนั้น $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$

นั่นคือ A^{-1} เป็น Symmetric

เฉลยแบบฝึกหัด 3.6

1. จงหารากของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้กฎของแครเมอร์

(1)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ x_1 \quad + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 6 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(5)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

วิธีทำ (1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + (-6) + (40) - (-24) - (-5) - (-12)$$

$$= 6 - 6 + 40 + 24 + 5 + 12$$

$$= 81$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{81} = \frac{81}{81} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{81} = \frac{81}{81} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{81} = \frac{81}{81} = 1$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 18 + 16 - 0 - 12 - (-4)$$

$$= 26$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{-52}{26} = -2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{\cdot}{26} = 0$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{26} = \frac{26}{26} = 1$$

(3) จากโจทย์จะได้

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 + 3 + (-2) - 2 - (-4) - 6$$

$$= 5$$

ดังนั้น

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{22}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{26}{5}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{12}{5}$$

(4) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 \leftarrow (-2)R_1 + R_3 \\ R_4 \leftarrow (-1)R_1 + R_4 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ ได้จากการกระจายตามคอลัมน์ที่ 1

$$= -18 + 3 - 12 - 18 + 12 + 3$$

$$= -30$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{30}{30} = 1.$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{30}{-30} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{0}{-30} = 0$$

$$x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-60}{-30} = 2$$

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_4 \leftarrow (-4)\,R_1 + R_4$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - 24$$

$$= -23$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{3}{-23} = -\frac{3}{23}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-72}{-23} = \frac{72}{23}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{13}{-23} = -\frac{13}{23}$$

$$x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-12}{-23} = \frac{12}{23}$$

$$(6) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 10 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 1 - 1$$

$$= -2$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & -11 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-13}{-2} = \frac{13}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

$$x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

2. จงหาค่าของ r ซึ่งจะทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มีรากเพียงชุดเดียว (unique)

(1) $(1 - r)\,x_1 + r x_2 = 3$

$r x_1 + (1 - r)\,x_2 = 7$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ r & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) ระบบสมสมการนี้จะมีรากชุดเดียวถ้า

$$\begin{vmatrix} 1-r & r \\ r & 1-r \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(1 - r)^2 - r^2 \neq 0$$

$$1 - 2r + r^2 - r^2 \neq 0$$

$$1 - 2r \neq 0$$

$$r \neq \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้จะมีรากเพียงชุดเดียว เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $r \neq \frac{1}{2}$

(2) ระบบสมการนี้ จะมีรากหลายชุดหรือไม่มีรากถ้า

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ r & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$1 - r^2 \neq 0$$

$$(1 - r)(1 + r) \neq 0$$

$$r \neq 1, -1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้จะมีรากเพียงชุดเดียว เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $r \neq 1$ และ $r \neq -1$

3. จงใช้กฎของแครเมอร์หารากที่เป็น nontrivial ของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0\\
2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0\\
3x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

จากโจทย์จะได้

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2x_4\\
2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0\\
3x_2 + 5x_3 &= 6x_4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5 + 6 + 9 - 30$$

$$= -20$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2x_4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6x_4 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{-40x_4}{-20} = 2x_4$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2x_4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6x_4 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{10x_4}{-20} = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2x_4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6x_4 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{-30x_4}{-20} = \frac{3}{2}x_4$$

จะเห็นว่าค่าของ x_1, x_2 และ x_3 ขึ้นอยู่กับค่าของ x_4

ถ้าเลือก $x_4 = 1$ จะได้

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{2}$$

ซึ่งเป็น nontrivial ยังมีรากที่เป็น nontrivial ชุดอื่น ๆ อีก ขึ้นอยู่กับการเลือกค่าของ x_4 แต่ถ้าเลือก $x_4 = 0$ จะได้ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$