บทที่ 2
ระบบสมการเชิงเส้น

1. จงพิจารณาระบบสมการต่อไปนี้ และหารากของระบบโดยวิธี Gaussian elimination และ Gauss - Jordan reduction

(1)
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -5$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

(2)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

วิธีทำ

(I) จากโจทย์ augmented matrix ของระบบสมการคือ

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-3)R_1 + R_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow (-2)R_3 + R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

การทำสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 2 ให้เป็น 1 นั้น เราอาจใช้วิธีเอา $-\frac{1}{3}$ คูณตลอดแถวที่ 2 ก็ได้ แต่จะทำให้เกิดเศษส่วนรุงรัง

$$R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 13 & -12 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{13} R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{13} \end{array}\right] = \text{B ซึ่งอยู่ในรูป row echelon}$$

$$\therefore \quad x_3 = \frac{12}{13}$$

$$x^2 = -6 - 9x_3 = -6 - 9\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{30}{13}$$

$$x^1 = 1 - x_2 - 2x_3 = 1 - \frac{30}{13} - 2\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{7}{13}$$

การแก้สมการ โดยการทำ augmented matrix A ของระบบสมการให้อยู่ในรูป B คือรูป row echelon นี้ เรียกว่า Gaussian elimination ส่วนการแก้สมการโดยวิธี Gauss - Jordan reduction ก็คือ การทำ augmented matrix ของระบบให้อยู่ในรูปของ row reduced echelon ดังนี้

$$\text{จาก B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{13} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow (-1) R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{13} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow 7R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow (-9) R_3 + R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{12}{13} \end{array}\right] = c$$

จาก C จะได้ $x_1 = \frac{9}{13}$

$$x_2 = \frac{30}{13}$$

$$x_3 = \frac{12}{13}$$

(2) จากระบบสมการเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-2)R_1 + R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1)R_2 \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})R_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] = B$$ ซึ่งอยู่ในรูปrow echelon

ดังนั้น $x_3 = -\frac{2}{3}$

$x_2 = -x_3 = \frac{2}{3}$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$$\text{จาก } B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} RI \leftarrow (-1)R_2 + R_1 \\ R_2 \leftarrow (-1)R_3 + R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] = C$$ ซึ่งอยู่ในรูป row reduced echelon

$\therefore x_1 = 1$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$x_3 = \frac{2}{3}$

2. จงหารากของระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธี Gaussian elimination และ Gauss-Jordan reduction ในรูปของเมตริกซ์

(1)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 13 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ 6x_1 + x_3 - 9x_4 &= -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 &= 3 \end{aligned}$$

วิธีทำ

(1)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow (-1)\, R_1 R_2$
$R_3 \leftarrow (-3)\, R_1 + R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -38 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow (-2)\, R_3 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 9 & 18 & 71 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -38 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 9 & 18 & 71 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & 104 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow \frac{1}{13} R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 9 & 18 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

ดังนั้น $x_3 = 8 - 2x_4$

$\therefore\ x_2 = 1$

$x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2 + x_4$

$R_1 \leftarrow (-1)\, R_2 + R_1$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -15 & -58 \\ 0 & 1 & 9 & 18 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

(คำตอบที่ได้ โดยวิธี Gauss elimination)

ดังนั้น

$$R_1 \leftarrow 7R_3 + R_1 \qquad R_2 \leftarrow (-9)R_3 + R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 8 - 2x_4$

$x_2 = -1$

$x_1 = -2 + x_4$

(คำตอบที่ได้โดยวิธี Gauss-Jordan reduction)

จากทั้งสองวิธี จะได้คำตอบเหมือนกัน ซึ่งตีความหมายได้ว่า x_4 จะมีค่าเป็นอะไรก็ได้ สมมุติว่า เป็น r ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ ส่วนค่าของ x_1 และ x_3 จะต้องขึ้นอยู่กับค่าของ x_4 ถ้า $x_4 = r$ จะได้ $x_1 = -2 + r$ และ $x_3 = 8 - 2r$ แต่ x_2 จะต้องมีค่าเป็น -1 เท่านั้น นั่นคือ ระบบสมการนี้มีรากของระบบได้หลายชุดขึ้นอยู่กับค่าของ x_4 ดังนั้น เราจะได้รากทั่ว ๆ ไปของระบบดังนี้คือ

$x_1 = -2 + r$

$x_2 = -1$

$x_3 = 8 - 2r$

$x_4 = r$

(2)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

วิธีทำ

ทำในทำนองเดียวกันกับ (1)

3. จงพิจารณาว่า k จะต้องมีค่าเป็นอะไร จึงจะทำให้ระบบสมการข้างล่างนี้เป็นระบบที่ consistent

$2x_1 + x_2 = 5$

$x_1 - 3x_2 = -1$

$3x_1 + 4x_2 = k$

วิธีทำ

augmented matrix ของระบบสมการนี้คือ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & k \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & k \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-2)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-3)R_1 + R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 13 & k+3 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow \left(-\frac{13}{7}\right)R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & k-10 \end{array}\right]$$

จะเห็นว่าระบบสมการนี้จะมีรากก็ต่อเมื่อ $k - 10 = 0$ นั่นคือ $k = 10$

ดังนั้น ระบบสมการนี้จะ consistent ก็ต่อเมื่อ $k = 10$

4. จงพิจารณาระบบสมการ ซึ่งมี augmented matrix ดังต่อไปนี้ ว่าระบบใด consistant ระบบใด inconsistent

(1) $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

(3) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

(4) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$

วิธีทำ

(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-1)R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{2} R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

จะได้ $x_3 = -1$

$x_2 = 3 + x_3 = 3 - 1 = 2$

$x_1 = -x_2 - x_3 = 1 - 2 = -1$

$\therefore$ ระบบสมการนี้ เป็นระบบที่ consistent

(2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow (-1) R_1 + R_2$

$R_3 \leftarrow (-1) R_1 + R_3$

ǀ -1-12 -2-13 ǀ 0 0 0

$R_2 \leftarrow (-1) R_2$

i ǀ -121 -132 ǀ 000

$$R_3 \leftarrow R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

จะได้ $x_3 = 0$

$x_2 = -2x_3 = 0$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 =$

∴ ระบบการนี้เป็นระบบ consistent

(3)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-1)R_1 + R_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow \left(-\frac{1}{7}\right) R_3 \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

จากแถวที่ 3 จะได้ $x_3 = 1$

จากแถวที่ 2 จะได้ $x_2 = -1 + 3x_3 = 2$

จากแถวที่ 1 จะได้ $x_1 = 8 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 8 - 4 - 3 - x_4 = 1 - x_4$

แสดงว่า x_4 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้ ดังนั้นถ้าให้ $x_4 = r$ จะได้รากทั่ว ๆ ไปดังนี้คือ

$x_1 = 1 - r,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$

นั่นคือ รากระบบสมการนี้เป็นระบบ consistent

(4)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow (-1)\,R_1 + R_3$ 001 -121 3 −3 ¦ − ¦ −3

$R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2$ 001 -101 -1 -1 3 -3 2 1 ¦ I ¦ -5 -1 0

$R_2 \leftrightarrow R_3$ 001 -1 1 0 -13 −3 ¦ C-5-1

$$
\begin{array}{l}
R_2 \leftarrow (-1)\,R_2 \\
R_3 \leftarrow (-1)\,R_3
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 5
\end{array}\right]
$$

แสดงว่าเป็นระบบที่ consistent เพราะสามารถหารากได้

5. จงหาค่าของ a ซึ่งจะทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มีลักษณะ

(1) ไม่มีราก

(2) มีรากชุดเดียว

(3) มีรากหลายชุด

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + (a^2 - 5)\,x_3 = a$$

วิธีทำ

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 1 & a^2 - 5 & a
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l}
R_2 \leftarrow (-1)\,R_1 + R_2 \\
R_3 \leftarrow (-1)\,R_1 + R_3
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & a^2 - 4 & a
\end{array}\right] = A
$$

(1) จะเห็นว่า ถ้า $a = -2$ จะได้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

จากแถวที่ 3 เขียนให้อยู่ในรูปสมการจะได้

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$$

ซึ่งเราจะไม่สามารถหาค่า x_1, x_2 และ x_3 ที่จะสอดคล้องกับสมการนี้ได้เลย นั่นคือ ถ้า $a = -2$ แล้ว ระบบสมการจะไม่มีราก เพราะเราจะไม่สามารถหารากที่สอดคล้องกับสมการที่ 3 ได้

(2) ถ้า $a \neq 2$ และ $a \neq -2$ แล้ว $a^2 - 4$ และ $a - 2$ จะไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น ระบบสมการนี้จะมีรากเพียงชุดเดียว เช่น ถ้า $a = 3$ จะได้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

แสดงว่า $x_3 = \frac{1}{5}$

$x_2 = 1 - 2x_3 - 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$

(3) ถ้า $a = 2$ จะได้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

แสดงว่า $x_3 =$ จำนวนจริงใด ๆ ก็ได้

$x_2 = 1 - 2x_3$

$x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - 1 + 2x_3 + x_3 = 1 + 3x_3$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.3

1. จงเขียนเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ และ augmented matrix ของระบบสมการต่อไปนี้

(1) $2x + y = 0$

(2)
$$\begin{aligned} ax_1 + a^2x_2 &= 0 \\ bx_1 + b^2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \quad x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

คำตอบ

(1) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ คือ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

augmented matrix คือ $\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

(2) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ คือ $\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{bmatrix}$

augmented matrix คือ $\left[\begin{array}{cc:c} a & a^2 & 0 \\ b & b^2 & 0 \end{array}\right]$

(3) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ คือ
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

augmented matrix คือ
$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(4) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ คือ
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

augmented matrix คือ $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

2. จงหารากทั่วไป และรากเฉพาะของระบบสมการต่อไปนี้

(1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

(2) $x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 0$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0$

$-3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

(3) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

วิธีทำ :

(1) augmented matrix ของระบบ คือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{4}\right) R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = -2x_3 - 2x_4$

แสดงว่า x_3 และ x_4 เป็นค่าใด ๆ ก็ได้ แต่ x_1 และ x_2 มีค่าขึ้นอยู่กับค่าของ x_3 และ x_4 ถ้าให้ $x_3 = r$ และ $x_4 = s$ เมื่อ r และ s คือ จำนวนจริงใด ๆ จะได้รากทั่วไปคือ

$x_1 = -2r - 2s,\ x_2 = -\frac{1}{2}r - 2s,\ x_3 = r$ และ $x_4 = s$

หรือเขียนได้ว่า $(-2r - 2s, -\frac{1}{2}r - 2s, r, s)$ เป็นรากทั่วไปของระบบ

ดังนั้น ถ้าเลือก $r = -1, s = 1$ จะได้รากเฉพาะ คือ

$x_1 = -2(-1) - 2(1) = 0$

$x_2 = -\frac{1}{2}(-1) - 2(1) = -\frac{3}{2}$

$x_3 \;=\; -1$

$x_4 \;=\; 1$

หรือกล่าวว่า $(0, -\frac{3}{2}, -1, 1)$ เป็นรากเฉพาะของระบบสมการนี้

หมายเหตุ รากเฉพาะที่มีได้หลายชุด ขึ้นอยู่กับการเลือกค่า r และ s เช่นถ้าเลือก $r = -2$, $s = 0$ จะได้รากเฉพาะอีกชุดหนึ่ง คือ $(4, 1, -2, 0)$ เป็นต้น

(2) augmented matrix ของระบบคือ

$$\left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow (-2)R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (3)R_1 + R_3 \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \leftarrow 3R_2 + R_3 \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow (-1)R_2 \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{4})R_3 \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} R_1 \leftarrow R_2 + R_1 \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{r} R_1 \leftarrow (-1)R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow (-2)R_3 + R_2 \\ \\ \end{array} \left|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right|$$

จะได้ $x_4 = x_5$

$x_2 = -x_3 - 2x_5$

$x_1 = -x_3$

แสดงว่า x_3 และ x_5 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น

ให้ $x_3 = r, x_5 = s$ เมื่อ r และ s แทนจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ $(-r, -r - 2s, r, s, s)$ เป็นรากทั่วไปของระบบสมการนี้

เลือก $r = 1, s = 1$ จะได้ $(-1, -3, 1, 1, 1)$ เป็นรากเฉพาะของระบบ

(3) จากโจทย์ $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ จะได้

$x_1 = -3x_2 - x_3$

นั่นคือ x_2 และ x_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้

ในที่นี้ให้ $x_2 = s, x_3 = t$ เมื่อ s และ t แทนจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ $(-3s - t, s, t)$ เป็นรากทั่วไป

เลือก $s = \frac{1}{3}, t = 1,$ จะได้ $(-2, \frac{1}{3}, 1)$ เป็นรากเฉพาะ

3. จงพิจารณาระบบสมการต่อไปนี้ว่าระบบใดเป็นระบบที่มีรากเป็น nontrivial

(1)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad &= 0 \\ 2x_1 \qquad - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

(1) จากระบบสมการที่กำหนดให้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ $AX = 0$ โดยที่ A คือ เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2 \\ R_3 \leftarrow (-1) R_1 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A จะไม่ row equivalent กับ I_3 ดังนั้น A จะเป็น singular (ทบ. 2.3.4) นั่นคือ ระบบสมการนี้จะมีรากที่เป็น nontrivial ด้วย (ทบ. 2.3.7)

(2) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ คือ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} R_2 \leftarrow (-2) R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow 3R_1 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{5} R_2 \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{7}) R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \leftarrow (-1) R_2 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A เป็น singular นั่นคือ ระบบสมการนี้จะมีรากที่เป็น nontrivial ด้วย

(3) เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการนี้คือ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow (-\frac{1}{2})\, R_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow (-3)\, R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-2)\, R_1 + R_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow (-1)\, R_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow (R_2 + R_1 \\ \\ R_3 \leftarrow (-4)\, R_2 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow (-1)\, R_3 + R_1 \\ \\ R_2 \leftarrow R_3 + R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A row equivalent กับ I_3 แสดงว่า A เป็น nonsingular ดังนั้น ระบบสมการนี้จะให้รากที่เป็น trivial อย่างเดียว

(4) ระบบสมการนี้มีจำนวนสมการน้อยกว่าจำนวนตัวไม่ทราบค่า จากทฤษฎี 2.3.1 แสดงว่า ระบบสมการนี้จะมีรากที่เป็น nontrivial ด้วย

4. จงหารากของระบบสมการ

$$x_1 + ix_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + (1+i)\,x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)\,R_1 + R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 3 & 0 \\ 0 & -1-i & -2-i & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{1+i}\right) R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2+i}{i+i} & 0 \end{array}\right]$$

$$x_2 = -\frac{2+i}{1+i}\,x_3$$

$$x_1 = -ix_2 - 3x_3 = -\frac{4+i}{1+i}\,x_3$$

ถ้า $x_3 = 1$

จะได้ $x_2 = -\dfrac{2+i}{1+i}$

และ $x_1 = -\dfrac{4+i}{1+i}$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.4

1. ถ้าเมตริกซ์ต่อไปนี้มีอินเวอร์ส จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์เหล่านั้น

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A \mid$ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-2)R_1 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-1)R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-\frac{1}{5})R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-3)R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow (-2)R_3 + R_2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow (-1)\,R_1 + R_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow (-1)\,R_2 + R_1$

$R_3 \leftarrow (-1)\,R_2 + R_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow (-1)\,R_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ อิสเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_1 + R_2$

$R_3 \leftarrow (-2)\,R_1 + R_3$

$R_4 \leftarrow (-3)\,R_1 + R_4$

0 0 0 1 -4 -5 2 5 -6 -3 7 7 1 | -1 1 0 0 0

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ & -5 & 7 & & & & & \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_3 + R_2$

$R_1 \leftarrow (-2)\,R_2 + R_1$

0 -5 2 | -3 3 0 -2 0 -2 1 1 0

$R_3 \leftarrow 4R_2 + R_3$

$R_4 \leftarrow 5R_2 + R_4$

0 0 0 0 0 1 1 1 2 1 1 1 2 | -8 6 1 4 5 1 1 0 0 1

$R_3 \leftarrow \frac{1}{11} R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -5 & 1 & -3 & 2 & -13 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & -8 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow 5R_3 + R_1$

$R_2 \leftarrow (-1)\,R_3 + R_2$

$R_4 \leftarrow (-12)\,R_3 + R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 - \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \; 1 \; -1 & \overline{11} & \overline{11} & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{16}{11} & 1\,\frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & 1 \end{array}\right]$$

จะเห็นว่าแถวที่ 4 ของเมตริกซ์ทางซ้ายมือเป็นศูนย์ทั้งแถว

แสดงว่า เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ไม่มีอินเวอร์ส (ทบ. 2.4.2)

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow (-1) R_1 + R_2$
$R_3 \leftarrow (-1) R_1 + R_3$
$R_4 \leftarrow (-5) R_1 + R_5$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow (-2) R_2 + R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-1)\ R_2 + R_1 \\ \\ R_3 \leftarrow (-2)\ R_2 + R_3 \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_4 \leftarrow R_3 + R_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

แสดงว่าไม่มีอินเวอร์ส (ทบ. 2.4.2)

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow (-2)\ R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-3)\ R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-2)\ R_2 + R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow (-2)\, R_2 + R_1 \qquad R_3 \leftarrow 3R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-\tfrac{1}{2})\, R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow (-2)\, R_3 + R_1 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

อินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow (-1)\, R_2 + R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)\, R_1 + R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)\, R_2 \qquad R_3 \leftarrow (-\tfrac{1}{2})\, R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow (-2)\ R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-1)\ R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow (-1)\ R_3 + R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

ดังนั้น อินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1)\ R_1 + R_2 \\ R_3 \leftarrow (-1)\ R_1 + R_3 \\ R_4 \leftarrow (-1)\ R_1 + R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-1)\ R_2 + R_1 \\ R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3 \\ R_4 \leftarrow (-2)\ R_2 + R_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow 2R_3 + R_4$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})R_3$
$R_4 \leftarrow \frac{1}{3}R_4$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow (-3)R_3 + R_1$
$R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow (-2)R_4 + R_1$
$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_4 + R_2$
$R_3 \leftarrow \frac{2}{3}R_4 + R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

อินเวอร์สคือ
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow (-1)\, R_1 + R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3$
$R_4 \leftarrow (-3)\, R_2 + R_4$
$R_1 \leftarrow (-1)\, R_2 + R_1$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow -\frac{1}{2} R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow (-3)\, R_3 + R_1$
$R_4 \leftarrow (25)\, R_3 + R_4$
$R_2 \leftarrow R_3 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 6 & -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 8 & -\frac{5}{2} & -8 & 1 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow \frac{1}{25} R_4$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 6 & -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{25} & -\frac{1}{10} & -\frac{8}{25} & \frac{1}{25} \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
R_1 \leftarrow (-13)\, R_4 + R_1 \\
R_2 \leftarrow 6R_4 + R_2 \\
R_3 \leftarrow 3R_4 + R_3 \\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{46}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{13}{25} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{25} & \frac{6}{25} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\text{[illegible]}}{25} & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & \frac{3}{25} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{25} & -\frac{1}{10} & -\frac{8}{25} & \frac{1}{25}
\end{array}\right]
$$

$$
\text{อินเวอร์สคือ} \quad
\begin{bmatrix}
\frac{46}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{13}{25} \\
-\frac{2}{25} & \frac{1}{10} & \frac{2}{25} & \frac{6}{25} \\
-\frac{1}{25} & \frac{1}{3} & \frac{1}{25} & \frac{3}{25} \\
\frac{8}{25} & \frac{1}{10} & -\frac{8}{25} & \frac{1}{25}
\end{bmatrix}
$$

2. **จงพิสูจน์ว่า** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **เป็น** nonsingular **ก็ต่อเมื่อ** $ad - bc \neq 0$

พิสูจน์

$$
\left[\begin{array}{cc|cc}
a & b & 1 & 0 \\
c & d & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
R_1 \leftarrow \frac{1}{a} R_1 \quad
\left[\begin{array}{cc|cc}
1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\
c & d & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
R_2 \leftarrow (-c)\, R_1 + R_2 \quad
\left[\begin{array}{cc|cc}
1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & \frac{ad - bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1
\end{array}\right]
$$

จะเห็นว่า ถ้า $ad - bc \neq 0$ จะทำ $\frac{ad - bc}{a} \neq 0$ แสดงว่า A เป็น nonsingular ในทางกลับกัน ถ้า A เป็น nonsingular จะได้ว่า $\frac{ad - bc}{a} \neq 0$ นั่นคือ $ad - bc \neq 0$

3. จงพิสูจน์ว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เป็น nonsingular และจงเขียนเมตริกซ์ A ในรูปผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น

พิสูจน์

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

01 2 121010 3 |1 0 0

$R_3 \leftarrow (-1) R_1 + R_3$ o -2 o | -I o 1I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$R_1 \leftarrow (-2) R_2 + R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

R , $\leftarrow 2R_2 + R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

$R_3 \leftarrow \frac{1}{4} R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ) & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = E_4$$

$R_1 \leftarrow R_3 +$ RI

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

((||| |||1 ||■ $= E_5$

$R_2 \leftarrow$ (-2) R3 + R_2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

((1 0I 0 E_6

แสดงว่า A เป็น nonsingular และ

จะเห็นว่า $E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = I_3$

ดังนั้น $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} E_6^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. จงพิจารณาว่าเมตริกซ์ใดต่อไปนี้เป็น singular และหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่เป็น nonsingular

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (4) .11 211 3211

วิธีทำ (1)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

แสดงว่า $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ เป็น singular

(2) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{12} R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow (-3)R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right]$$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ เป็น nonsingular และมีอินเวอร์สคือ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$

(3) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_2 + R_3 \\ R_1 \leftarrow 2R_2 + R_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow (-1)R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow R_3 + R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow (-1)R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ เป็น nonsingular มีอินเวอร์สคือ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$
R_2 \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
R_3 \leftarrow R_2 + R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น singular (ท.บ. 2.4.2)

5. จงพิสูจน์ว่า diagonal matrix เป็น nonsingular ก็ต่อเมื่อสมาชิกที่อยู่บนแนวทแยงมุมทุกตัวไม่เป็น 0

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i = j$

ถ้า A เป็น nonsingular A จะ row equivalent กับ I_n

นั่นคือ $a_{ii} \neq 0$

ในทางกลับกัน ถ้าให้ $a_{ii} \neq 0$

เอา $\dfrac{1}{a_{ii}}$ คูณแถวที่ i ของ A จะได้ I_n

นั่นคือ A row equivalent กับ I_n

แสดงว่า A เป็น nonsingular

6. จงพิสูจน์ว่า upper triangular matrix เป็น nonsingular ก็ต่อเมื่อ สมาชิกที่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมทุกตัวไม่เป็น 0

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]$ โดยที่ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$ และ $a_{ii} \neq 0$

ดังนั้น เราสามารถทำ a_{ii} ให้เป็น 1 ได้ โดยเอา a_{ii} หารแถวที่ i เมื่อ $i = 1, 2, \dots n$

จะได้เมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวที่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมเป็น 1 และเราสามารถจะทำสมาชิกที่อยู่ข้างใต้ 1 ที่ไม่ใช่ 0 ให้เป็น 0 ได้ เช่น ถ้า $a_{32} \neq 0$ เราทำให้เป็น 0 ได้โดยเอา $-a_{32}$ คูณแถวที่ 2 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 3 ดังนั้น เราจะได้เมตริกซ์ที่อยู่ในรูป I_n

นั่นคือ A row equivalent กับ I_n แสดงว่า A เป็น nonsingular