เฉลยแบบฝึกหัด

MA 226 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น 1

บทที่ 1
เมตริกซ์

1. จงหาราก (x, y) ของสมการต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้ว่า

$x + y = 3$ ......(1)

$x - y = 5$.(2)

(1) + (2) จะได้ $2x = 8$

$\therefore x = 4$

แทน x ใน (1) ได้ $y = -1$

2) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & 2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้ว่า

$x - y = 1$ ....(1)

$2x - 2y = 3$ ....(2)

(1) $\times$ 2 จะได้ $2x - 2y = 2$ ....(3)

จาก (2) และ (3) จะเห็นว่า เราไม่สามารถจะหาค่า x และ y ได้

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้าเป็นไปได้จงคำนวณหา

(1) C + E

วิธีทำ

$$C + E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

(2) 2C − 3E

วิธีทำ

$$2C - 3E = 2\begin{bmatrix} a43 & -111 & 353 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & -2 & 6 \\ 648 & 2 & 10 \\ & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -12 & 15 \\ 0 & 3 & 12 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10 & -9 \\ -5 & -4 & 3 \\ 8 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) AB และ BA

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$$

และ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 17 \end{bmatrix}$$

(4) CB + D

วิธีทำ

$$CR + D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 21 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า BC + D บวกกันไม่ได้

(5) 3(2A) และ 6A

วิธีทำ

$$3(2A) = 3(2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \end{bmatrix})$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

และ $\quad 6A = 6\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

(6) $AB + D^2$ เมื่อ $D^2 = D \cdot D$

วิธีทำ

$$AB + D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -6 \\ 30 & 21 \end{bmatrix}$$

(7) $A(BD)$ และ $(AB)D$

วิธีทำ

$$A\,(BD) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 0 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}$$

และ $\quad (AB)\,D = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}$$

(8) $A(C + E)$ และ $AC + AE$

วิธีทำ

$$A(C + E) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}$$

และ

$$AC + AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 4 & 22 \\ 18 & 3 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 4 & 16 \\ 16 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}$$

(9) $3A + 2A$ และ $5A$

วิธีทำ

$$3A + 2A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

และ $$5A = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

(10) A'

วิธีทำ

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(11) $(A^t)^t$

วิธีทำ

$$\because \ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (A')' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(12) (AB)'

วิธีทำ

$$\therefore \ AB = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (AB)' = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(13) B^tA^t

วิธีทำ

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^tA^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(14) $(C + E)^t$

วิธีทำ

$$\because (C + E) = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (C + E)^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

(15) $C^t + E^t$

วิธีทำ

$$C^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & & \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ C^t + E^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงให้เห็นว่า $AB \neq BA$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

และ $$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $AB \neq BA$

4 . ให้ $A = [2\ 1\ \ 4\ \ 3]$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา **AB และ BA**

วิธีทำ

$$AB = [2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\,15\,]$$

และ
$$BA = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[2\ \ 1\ \ 4\ \ 3]$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5. จงหาผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$
\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

6. จงให้เหตุผลว่าเพราะเหตุใด $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ และ $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

วิธีทำ

เนื่องจาก $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$

$= A(A + B) + B(A + B)$

$= A^2 + AB + BA + B^2$

แต่ AB ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ BA

ดังนั้น $(A + B)^2$ จึงไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ $A^2 + 2AB + B^2$

และเนื่องจาก $(A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

แต่ AB ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ BA

ดังนั้น $(A + B)(A - B)$ จึงไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับ $A^2 - B^2$

7. ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^2, A^3 และ A^4 เมื่อ $i^2 = -1$

วิธีทำ

จาก $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = A^2\,A$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \\ i & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

และ $\quad A^4 = A^3(A)$

$$= \begin{bmatrix} & \\ -i\ 0 & 0- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (& i \\ i\ \ 0i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & \\ (-i^2 & 0 - i^2 I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & \\ 01 & 01 \end{bmatrix}$$

8. ให้ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ จงเขียนเมตริกซ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลคูณของเมตริกซ์

วิธีทำ

(1) $\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}\right] = AB'$

(2) $\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk}\right] = A^t\,B^t$

(3) $\left[\sum_{k=}^{n}, b_{ik}\,a_{kj}\right] = BA$

(4) $\left[\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\,a_{ik}\right] = B^tA^t$

9. จงเขียนเมตริกซ์ต่อไปนี้ในรูปของผลคูณของเมตริกซ์ เมื่อ i เป็นตัวชี้แถว และ j เป็นตัวชี้คอลัมน์ และ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

วิธีทำ

(1) $\left[\sum_{r=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj} \right] = (AB)C$

(2) $\left[\sum_{r=1}^{q} c_{jr} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ki} b_{kr} \right) \right] = C(A^{t}B)$

10. ถ้า c เป็นสกาลาร์ใด ๆ และ A, B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาดเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า

(1) $Tr(cA) = c\, Tr(A)$

(2) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

(3) $Tr(AB) = Tr(BA)$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$

(1) $$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\therefore c\, Tr(A) = c \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

แต่ $cA = [c\, a_{ij}]$

$$\therefore Tr(cA) = \sum_{i=1}^{n} c\, a_{ii} = c \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c\, Tr(A)$$

(2) $$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$Tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

$$= Tr(A) + Tr(B)$$

(3) $$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]$$

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right)$$

แต่ $$BA = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right]$$

$$\therefore Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right)$$

$$= Tr(AB)$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1. จงแสดงว่า $A(BC) = (AB)C$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 34 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$$

และ

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 14 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 34 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$$

2. จงแสดงว่า $A(rB) = r(AB)$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $r = -3$

วิธีทำ

$$A(rB) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left(-3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -9 & -6 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 18 & 12 \\ 9 & -27 & -18 \end{bmatrix}$$

และ $$r(AB) = -3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 18 & 12 \\ 9 & -27 & 18 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $A(rB) = r(AB)$

3. จงแสดงว่า $C(A + B) = CA + CB$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$C(A + B) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & -8 & 4 \\ 10 & 14 & -12 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 & -4 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 4 & 9 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ CA + CB = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 4 \\ 10 & 14 & -12 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $C(A + B) = CA + CB$

4. จงแสดงว่า $(r + s)A = rA + sA$ เมื่อ $r = 4$, $s = -2$ และ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$(r + s)A = (4 - 2) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$rA = 4\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$sA = -2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ rA + sA = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 16 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(r + s)A = rA + sA$

5. จงแสดงว่า $r(A + B) = rA + rB$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } r = -3$$

วิธีทำ

$$r(A + B) = -3\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -3\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -15 & 0 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$rA = -3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -9 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$rB = -3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -12 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$rA + rB = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -15 & 0 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $r(A + B) = rA + rB$

6. จงแสดงว่า $(A \pm B)' = A' \pm B'$ และ $(cA)' = cA'$

เมื่อ $A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ และ $c = -4$

วิธีทำ

$$(A + B) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A' + B^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(A + B)' = A' + B'$

และ $$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

และ $$A^t - B^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(A - B)' = A' - B^t$

$$cA = -4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -12 & -8 \\ -8 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(cA)^t = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -12 & -4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$cA^t = -4 \begin{bmatrix} & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -12 & -4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(cA)^t = cA'$

7. จงแสดงว่า $(AB)^t = B^tA^t$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 11 & \\ 15 & - \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -31 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$$

นั่นแสดงว่า $(AB)' = B'A'$

8. จงหาเมตริกซ์ A และ B ซึ่งมีขนาด 2×2 และ $A \neq B \neq 0$ และทำให้ $AB = 0$

ตอบ เช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. จงหาเมตริกซ์ $A \neq 0$ ซึ่งมีขนาด 2×2 และทำให้ $A^2 = 0$

ตอบ เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. จงหาเมตริกซ์ A, B และ C ซึ่งมีขนาด 2×2 และทำให้ $AB = AC$ โดยที่ $B \neq C$ และ $A \neq 0$

ตอบ เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $AB = AC$ โดย $B \neq C$ และ $A \neq 0$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.4

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้าเมตริกซ์ A เป็น *symmetric* แล้ว A^t จะเป็น *symmetric* ด้วย

จงพิสูจน์

ให้ A เป็น symmetric

แสดงว่า $A = A'$

ดังนั้น $(A')' = A'$

นั่นคือ A' เป็น symmetric

2. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส จงพิสูจน์ว่า

(1) AA' และ $A'A$ เป็น symmetric

(2) $A + A'$ เป็น symmetric

(3) $A - A'$ เป็น skew - symmetric

พิสูจน์

(1) $(AA')' = (A')'\,A' = AA'$

แสดงว่า AA' เป็น symmetric

ทำนองเดียวกัน $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A'A$

แสดงว่า $A'A$ เป็น symmetric

(2) เนื่องจาก $(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A^t$

แสดงว่า $A + A'$ เป็น symmetric

(3) เนื่องจาก $(A - A')' = A' - (A')' = A' - A = -(A - A')$

แสดงว่า $A - A'$ เป็น skew - symmetric

3. ถ้าเมตริกซ์ A และ B เป็น symmetric จงพิสูจน์ว่า

(1) $A + B$ เป็น symmetric

(2) AB เป็น symmetric ก็ต่อเมื่อ $AB = BA$

พิสูจน์

(1) เนื่องจาก $(A + B)' = A' + B' = A + B$

ดังนั้น $A + B$ จึงเป็น symmetric

(2) ให้ AB = BA ดังนั้นจะได้

$$(AB)' = B'A' = BA = AB$$

แสดงว่า AB เป็น symmetric

ในทางกลับกัน สมมุติให้ AB เป็น symmetric

นั่นคือ $(AB)' = AB$

หรือ $B'A' = AB$

ดังนั้น $BA = AB$

4. จงเขียนเมตริกซ์ A ให้อยู่ในรูปผลบวกของ symmetric matrix และ skew - symmetric matrix- เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

ให้ $S = \frac{1}{2}(A + A')$ และ $K = \frac{1}{2}(A - A')$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 2 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น symmetric

และ $K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น skew-symmetric

และ S + K $= \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = A$

5. ถ้า c คือสกาลาร์ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

(1) $(cA)^* = \bar{c}A^*$ (2) $A = \bar{\bar{A}}$

(3) $(\bar{A})^t = \overline{A^t}$ (4) $(A^*)^* = A$

(5) $(A + B)^* = A^* + B^*$ (6) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

(7) $(AB)^* = B^*A^*$

พิสูจน์

(1) ให้ $A = [a_{ij}]$

ดังนั้น $cA = [c\, a_{ij}]$

$(cA)^* = [(c\, a_{ij})^*]$

$= [(\bar{c}\, \bar{a}_{ij})^t]$

$= \bar{c}\, [\bar{a}^t_{ij}]$

$= \bar{c}\, A^*$

(2) $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$

$\bar{\bar{A}} = [\bar{\bar{a}}_{ij}] = [a_{ij}] = A$

(3) $\overline{A^t} = [\bar{a}_{ij}{}^t] = [\overline{a^t_{ij}}] = \bar{A}^t$

(4) $(A^*)^* = [(a_{ij}^*)^*] = [a_{ij}] = A$

(5) $(A + B)^* = \overline{A + B}^t = (\bar{A} + \bar{B})^t = \bar{A}^t + \bar{B}^t = A^* + B^*$

(6) $\overline{AB} = [\overline{\Sigma a_{ij} b_{jk}}] = [\Sigma \overline{a_{ij} b_{jk}}] = [\Sigma\, \bar{a}_{ij} \bar{b}_{jk}] = \bar{A}\,\bar{B}$

(7) $(AB)^* = \overline{AB}^t = (\bar{A}\,\bar{B})^t = \bar{B}^t\, \bar{A}^t = B^*\, A^*$

6. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า A^*A และ AA^* เป็น Hermitian

พิสูจน์

$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ จาก (1) และ (4) ในข้อ 5

แสดงว่า A^*A เป็น Hermitian

7. ถ้าเมทริคซ์ H เป็น Hermitian จงพิสูจน์ว่า B^*HB จะเป็น Hermitian ด้วย

พิสูจน์

$(B^*HB)^* = B^*H^*(B^*)^* = B^*HB$

แสดงว่า B^*HB เป็น Hermitian

8. จงพิสูจน์ว่า สมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของ Hermitian matrix เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น Hermitian

ดังนั้น $a_{ii}^* = a_{ii}$ หรือ $\bar{a}_{ii} = a_{ii}$ แสดงว่า a_{ii} เป็นจำนวนจริง

9. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่ง $A = -A^*$ (นั่นคือ $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$) เราจะเรียกเมตริกซ์ A ว่า Skew Hermitian จงพิสูจน์ว่า

(1) iA เป็น Skew Hermitian ถ้า A เป็น Hermitian

(2) iA เป็น Hermitian ถ้า A เป็น Skew Hermitian

พิสูจน์

(1) ถ้า A เป็น Hermitian แสดงว่า $A^* = A$

ดังนั้น $-(iA)^* = -\bar{i}A^* = iA^* = iA$

แสดงว่า iA เป็น Skew - Hermitian

(2) ถ้า A เป็น Skew - Hermitian แสดงว่า $A = -A^*$

ดังนั้น $(iA)^* = \bar{i}A^* = (-i)(-A) = iA$

แสดงว่า iA เป็น Hermitian

10. ถ้า H เป็น Hermitian และ $H = A + iB$ เมื่อ A และ B เป็น real matrix จงพิสูจน์ว่า A เป็น symmetric และ B เป็น Skew - symmetric

พิสูจน์

จาก $H = A + iB$ ดังนั้น

$H^* = (A + iB)^* = A^* + (iB)^* = A^* + \bar{i} B^*$

$= A' - iB'$ (เพราะ A และ B เป็น real matrix)

แต่ $H^* = H$ เพราะ H เป็น Hermitian ดังนั้น

$A' - iB' = A + iB$

นั่นคือ $A' = A$ และ $-B' = B$

แสดงว่า A เป็น symmetric และ B เป็น Skew - symmetric

11. จงหาเมตริกซ์ขนาด 2×2 และเป็น idempotent ซึ่งมี 1 อยู่ที่มุมล่างด้านซ้าย

ตอบ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. จงหา diagonal matrix ขนาด 3 x 3 และเป็น idempotent

ตอบ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. จงหาเมทริคซ์ขนาด 2 x 2 และเป็น involutory

ตอบ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

14. จาก $(A - I)(A + I) = 0$ จำเป็นหรือไม่ว่า $A = I$ หรือ $A = -I$ จงยกตัวอย่างประกอบ

ตอบ ไม่จำเป็นเพราะเมื่อ $(A - I)(A + I) = 0$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $A - I = 0$ หรือ $A + I = 0$ เช่น

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ในที่นี้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ซึ่งไม่เท่ากับ I หรือ -I เลย

15. จงแสดงให้เห็นว่า A + B และ AB เป็น upper Triangular ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -5 & 14 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า A + B และ AB เป็น upper Triangular แสดงว่า ผลบวกของเมตริกซ์ที่เป็น upper Triangular จะเป็น upper Triangular และผลคูณของเมตริกซ์ที่เป็น upper Triangular จะเป็น upper Triangular

16. ให้ A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีขนาดเป็น $n \times n$ จงหา S_nA เมื่อ

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 & 0 & 0 & . & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และจงหา S_n^k เมื่อ k คือ จำนวนเต็มบวกใด ๆ

วิธีทำ

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} & a_{n2} & & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } S_nA = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & . & a_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

และ $S_n^k = 0$ เมื่อ $k \geqslant n$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงแบ่งเมทริกซ์ A และ B อย่างเหมาะสมแล้วหาผลคูณ

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

เรามีวิธีแบ่งได้หลายแบบ ในที่นี้เป็นเพียงแบบหนึ่งในหลายแบบเท่านั้นคือ

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 2 & 10 \\ \hline 11 & -11 & 12 \end{array}\right]$$

นักศึกษาลองแบ่งแบบอื่น และหาผลคูณ AB

2. จงหาผลคูณ AB ถ้า $A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & I_1 & B_3 \end{bmatrix}$

เมื่อ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = [\,8\,]$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

$B_3 = [\,7\,]$, $I_1 = [\,1\,]$ และ 0 คือเมทริกซ์ศูนย์ ซึ่งมีขนาดพอเหมาะ

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & I_1 & B_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 21 \end{array}\right]$$

3. จงแบ่งเมตริกซ์ข้างล่างนี้ให้มีเมตริกซ์ศูนย์ แล้วหาผลคูณ

$$[\text{illegible}] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

4. จงหาเมตริกซ์ย่อย ซึ่งได้จากการตัดแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของ A ออกเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

หลังจากตัดแถวที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2 ของ A ออกแล้ว จะได้เมทริคซ์ใหม่ คือ

$$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

5. จงพิจารณาเมตริกซ์ A มีลักษณะพิเศษอย่างไรเมื่อ

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ข้อสังเกตุ จะเห็นว่า A’ = A นั่นคือ A เป็น Symmetric Matrix

เฉลยแบบฝึกหัด 1.6

1. จงหา S^{-1} โดยใช้วิธีตรวจสอบดูไม่ต้องคำนวณ เมื่อ S คือ

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & n \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & n \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 2 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

คำตอบ

(1) $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & . & 0 \\ . & & & \\ 0 & 0 & . & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$ (2) $S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & \frac{1}{2} & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \frac{1}{n} & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$

(3) $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$

(5) $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

2. จงพิสูจน์ว่า $(A^{-1})^{-1} = A$

พิสูจน์

เพราะว่า $A^{-1}A = AA^{-1} = A$

แสดงว่า อินเวอร์สของ A คือ A^{-1} หรือกล่าวว่า

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. จงพิสูจน์ว่า $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
(A^{-1})^t A^t &= (AA^{-1})^t \qquad &&\text{(จากทฤษฎีที่ว่า } (AB)^t = B^tA^t\text{)} \\
&= I^t &&\text{(เพราะ } AA^{-1} = I\text{)} \\
&= I
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$A^t (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$$

นั่นคือ $(A^{-1})^t A^t = A^t(A^{-1})^t = I$

แสดงว่าอินเวอร์สของ A^t คือ $(A^{-1})^t$ หรือกล่าวว่า

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

4. ถ้า AB = AC และ A เป็น nonsingular จงพิสูจน์ว่า B = C

พิสูจน์

A เป็น nonsingular แสดงว่า A มีอินเวอร์ส คือ A^{-1} ซึ่งทำให้

AA-’ = A-‘A = I

จาก AB = AC เอา A-’ คูณทั้งสองข้างจะได้

A-‘(AB) = A-‘(AC)

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)\ C$

$IB = IC$

B = c

5. ถ้า A เป็น symmetric และ A เป็น nonsingular จงพิสูจน์ว่า A^{-1} เป็น symmetric

วิธีคิด

ถ้า A^{-1} เป็น symmetric จริง จะต้องได้ว่า

$(A^{-1})^t = A^{-1}$ ดังนั้น เราจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $(A^{-1})^t = A^{-1}$

พิสูจน์

จากแบบฝึกหัดข้อ 3 จะได้ว่า

$(A^{-1})^t \;=\; (A^t)^{-1}$

$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;= \; A^{-1}$ (เนื่องจาก A เป็น symmetric นั่นคือ $A^t = A$)

แสดงว่า A-' เป็น symmetric

6. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้าแถว (คอลัมน์) ใด แถว (คอลัมน์) หนึ่ง ของ A เป็นศูนย์ทั้งแถว (คอลัมน์) จงพิสูจน์ว่า A เป็น singular

พิสูจน์

สมมุติให้ A เป็น non singular และแถวที่ i
ของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์ทั้งแถว ดังนั้น
จาก Aเป็น non singular แสดงว่า จะต้องมี A^{-1} ซึ่งทำให้

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

จะเห็นว่าเป็นไปไม่ได้ เพราะแถวที่ i ของ A เป็นศูนย์ทั้งแถวซึ่งจะทำให้แถวที่ i ของ-
AA^{-1} หรือ I เป็นศูนย์ทั้งแถว
ดังนั้น A จะต้องเป็น Singular

7. จงหาเมตริกซ์ 2 เมทริคซ์ ซึ่งมีขนาด 2×2 และเป็น singular แต่ผลบวกเป็น nonsingular

ตัวอย่าง

เช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น nonsingular

8. จงหาเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ ซึ่งมีขนาด 2 × 2 และเป็น nonsingular แต่ผลบวกเป็น singular

ตัวอย่าง

เช่น $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น singular matrix

เฉลยแบบฝึกหัด 1.7

1. จงพิสูจน์ว่า

(1) A row (column) equivalent กับ A

(2) ถ้า A row (column) equivalent กับ B แล้ว

B จะ row (column) equivalent กับ A

(3) ถ้า A row (column) equivalent กับ B และ B row (column) equivalent กับ C แล้ว

A จะ row (column) equivalent กับ C

พิสูจน์

(1) ถ้า c คือการกระทำตามแถว (หรือตามคอลัมน์) ที่ไม่ทำให้เมตริกซ์ A เปลี่ยนแปลง นั่นคือ $c(A) = A$ แสดงว่า A row (column) equivalent กับ A

ตัวอย่างของ c เช่น $c = 1\,R_2$ เป็นต้น

(2) ให้ A row (column) equivalent กับ B แสดงว่า เมตริกซ์ B ได้จากการกระทำตามแถว (ตามคอลัมน์) บนเมตริกซ์ A

สมมุติให้การกระทำเหล่านั้นคือ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ นั่นคือ

$$c_k\ c_{k-1}\ c_2\ c_1\ (A) = B$$

ดังนั้น $A = c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c_k (B)$

นั่นคือ A ได้จากการกระทำตามแถว (หรือคอลัมน์) บนเมตริกซ์ B

แสดงว่า B row (column) equivalent กับ A

(3) ให้ A row (column) equivalent กับ B และ B row (column) equivalent กับ C

สมมุติให้ $c_1, c_2, \ldots c_r$ และ $c_1', c_2', \ldots . c_s'$ เป็นการกระทำตามแถว (ตามคอลัมน์) ซึ่งทำให้

$$c_r\ c_{r-1} \ldots c_2\ c_1\ (A) = B$$

และ $c_s'\ c_{s-1}', \ldots c;\ c_1'\ (B) = C$

ดังนั้น $c_s'\ c_{s-1}', \ldots c_2'\ c;\ (c,\ c_{r-1} \ldots c_2 c_1)\ (A) = C$

แสดงว่า A row (column) equivalent กับ C

2. จงพิสูจน์ว่า

(1) A equivalent กับ A

(2) ถ้า A equivalent กับ B แล้ว B จะ equivalent กับ A

(3) ถ้า A equivalent กับ B และ B equivalent กับ C แล้ว A จะ equivalent กับ C

พิสูจน์

ในทำนองเดียวกับข้อ 1 ต่างกันที่ c ทุกตัวในข้อ 1 จะต้องเป็นการกระทำตามแถวทั้งหมด หรือเป็นการกระทำตามคอลัมน์ทั้งหมด

แต่ c ในข้อ 2 นี้ บางตัวอาจจะเป็นการกระทำตามแถวและบางตัวอาจจะเป็นการกระทำตามคอลัมน์ก็ได้

3. จงแสดงว่า A และ B equivalent กัน ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow 3R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow 5R_3 + R_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & -23 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -23 & 13 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow -16C_1 + C_3, \quad C_4 \leftarrow 9C_1 + C_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -23 & 13 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow -3C_2 + C_3, \quad C_4 \leftarrow -6C_2 + C_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -23 & 13 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \leftarrow -\frac{38}{23} C_3 + C_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -23 & -25 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow -\frac{1}{23} C_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -14R_3 + R_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow 4C_4 + C_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow 2R_1 + R_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

4. จงกระทำบนเมตริกซ์ A จนกระทั่งได้เมตริกซ์ B ถ้า

(1)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

(1)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R3 \leftarrow R_3 - R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ \\ R_3 \leftarrow 3R_2 + R_3 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} \\ \\ 0\ 0\ 10\ 0\ 1\ -1\ 2\ 1\ -1\ -5\ 6 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \leftarrow 3C_3 + C_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 01 & & & 12 \\ 00 & & & 21 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_4 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 012 & & & 1 \\ 001 & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 001 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} C_4 \leftarrow 2C_2 + C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 011 & & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\ \\ C_4 \leftarrow 4C_1 + C_4 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

(2) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \qquad \begin{bmatrix} 010101 & -1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \qquad \begin{bmatrix} 010100 & -2\,1\,1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow 2R_2 + R_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3- \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow (-3)R_2 \quad R_3 \leftarrow (-3)R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_2 + R3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow 2R_1 + R_2 \quad R_3 \leftarrow 3R_1 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = B$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.8

1. จงหาเมตริกซ์เบื้องต้นแบบที่ 1 (สลับที่ระหว่างแถวหรือคอลัมน์) ที่มีขนาด 3×3 ทั้งหมดที่เป็นไปได้

คำตอบ

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 2 (คอลัมน์ที่ 1 และคอลัมน์ที่ 2) ของ I_3

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 3 (คอลัมน์ที่ 1 และคอลัมน์ที่ 3) ของ I_3

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 2 และแถวที่ 3 (คอลัมน์ที่ 2 และคอลัมน์ที่ 3) ของ I_3

ข้อสังเกต เมตริกซ์เบื้องต้นประเภทนี้จะเหมือนกันไม่ว่าจะเกิดจากการกระทำตามแถวหรือเกิดจากการกระทำตามคอลัมน์บน I_3

2. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×3 จงหาเมตริกซ์เบื้องต้น ซึ่งเมื่อเอาไปคูณข้างหน้าเมตริกซ์ A แล้ว เหมือนกับการกระทำตามแถวต่อไปนี้บนเมตริกซ์ A
   (1) คูณแถวที่ 3 ด้วย 7
   (2) สลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 3
   (3) เอา 7 เท่าของแถวที่ 3 บวกกับ แถวที่ 2

คำตอบ

(1) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการเอา 7 ไปคูณแถวที่ 3 ของ I_4

(2) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 3 ของ I_4

(3) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการเอา 7 ไปคูณ แถวที่ 3 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 ของ I_4

ข้อสังเกต เนื่องจากเป็นการกระทำตามแถวบนเมตริกซ์ A ดังนั้น เมตริกซ์เบื้องต้นที่ได้จะต้องนำไปคูณข้างหน้าเมตริกซ์ A แต่ A มีขนาด 4×3 ดังนั้น เมตริกซ์ข้างหน้าจะต้องมีขนาดที่เหมาะสม นั้นคือ จะต้องเกิดจากการกระทำบน I_4

3. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×4 จงหาเมตริกซ์เบื้องต้น ซึ่งเมื่อเอาไปคูณข้างหลังเมตริกซ์ A แล้ว เหมือนกับการกระทำตามคอลัมน์ต่อไปนี้บนเมตริกซ์ A

(1) คูณคอลัมน์ที่ 2 ด้วย -2

(2) สลับที่ระหว่างคอลัมน์ที่ 2 และคอลัมน์ที่ 3

(3) เอา -4 คูณคอลัมน์ที่ 2 แล้วบวกกับคอลัมน์ที่ 1

คำตอบ

(1) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) เมตริกซ์เบื้องต้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. จงเขียนเมตริกซ์ C ให้อยู่ในรูปผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น เมื่อ

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

และหา C^{-1}

วิธีทำ

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = \frac{1}{2} R_1$

$$e_1(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e_1(I_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$e_2 = -1\, R_1 + R_3$

$$e_2 e_1(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e_2(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

$e_3 = \frac{1}{3} R_3$

$$e_3 e_2 e_1(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e_3(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = E_3$$

แสดงว่า $E_3E_2E_1C = I_3$

ดังนั้น $C = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$

$$\text{ในที่นี้}\quad E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{จะได้} \quad E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{จะได้} \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{จะได้} \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{นั่นคือ}\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1})^{-1} = E_3E_2E_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5. จงหาอินเวอร์สของผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้โดยไม่ต้องคูณเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คำตอบ

$$\text{อินเวอร์สคือ}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. จงหาเมทริคซ์ P และ Q ซึ่งทำให้

$$P \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad I_3 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$e_1 = C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$e_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad e_1(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$

$e_2 = C_1 \leftarrow -3C_3 + C_1$

$e_2e_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad e_2(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$

$e_3 = C_2 \leftarrow C_3 + C_2$

$e_3e_2e_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad e_3(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = E_3$

$e_4 = 2C_3$

$e_4e_3e_2e_1(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad e_4(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_4$

$e_5 = C_3 \leftarrow C_1 + C_3$

$$e_5e_4e_3e_2e_1\,(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad e_5(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_5$$

ดังนั้น $A\,E_1\,E_2\,E_3\,E_4\,E_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $P = I_2$ และ $Q = E_1E_2E_3E_4E_5$

หรือ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.9

1. ให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) จงหาเมตริกซ์ B ซึ่งอยู่ในรูป row echelon และ row equivalent กับ A

(2) จงหาเมตริกซ์ C ซึ่งอยู่ในรูป row reduced echelon และ row equivalent กับ A

94

วิธีทำ

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1 \\ R_2 \leftarrow (-1)R_2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2} R_2 \\ R_4 \leftarrow \frac{5}{2} R_2 + R_4 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \leftarrow (-\frac{1}{7}) R_3 \\ R_4 \leftarrow (-\frac{1}{4}) R_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

วิธีทำ

(2) **จากเมตริกซ์** B ทำต่อไปดังนี้

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - \frac{5}{2} R_4 \\ R_2 \leftarrow 3R_4 + R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \\ R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{3}{2} R_2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

ข้อสังเกตุ : วิธีที่ทำให้ดูนี้เป็นวิธีซึ่งทำตามขั้นตอนซึ่งแสดงไว้ในการพิสูจน์ทฤษฎี 1.9.1 แต่เพื่อหลีกเลี่ยงตัวเลขซึ่งเป็นเศษส่วน เราอาจทำได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

วิธีทำ (1) :

เริ่มต้นจากเมตริกซ์ A และทำต่อไปดังนี้

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow (-1)R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow 2R_2 + R_3 \\ R_4 \leftarrow 7R_2 + R_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -26 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{7})R_3 \\ R_4 \leftarrow (-\frac{1}{8})R_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

วิธีทำ (2) :

จากเมตริกซ์ B ทำต่อไปให้อยู่ในรูป row reduced echelon ดังนี้

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_4 \\ R_2 \leftarrow 3R_4 + R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{26}{7} R_4 \\ \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_2 \leftarrow 2R_3 + R_2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

ข้อสังเกตุ : จะเห็นว่าเมตริกซ์ B ซึ่งได้จากการทำทั้ง 2 วิธี เป็นเมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูป row echelon ทั้งคู่ แต่ไม่เท่ากัน ส่วนเมตริกซ์ C ซึ่งได้จากการทำทั้ง 2 วิธี อยู่ในรูป row reduced echelon และเท่ากัน

2. ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) จงหาเมตริกซ์ B ซึ่งอยู่ในรูป column echelon และ column equivalent กับ A

(2) จงหาเมตริกซ์ C ซึ่งอยู่ในรูป column reduced echelon และ column equivalent กับ A

วิธีทำ (1) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \\ \overset{1}{0} & 2^{0} & 0^{1} \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

วิธีทำ (2) :

จะเห็นว่าเมตริกซ์ B อยู่ในรูป column echelon และในขณะเดียวกันก็อยู่ในรูป column-reduced echelon ด้วย ดังนั้น B = C

ข้อสังเกตุ : จะเห็นว่า

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

อยู่ในรูป row echelon (และอยู่ในรูป row reduced echelon ด้วย)

3. จงหาเมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูป normal form

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k \times (n-k)} \\ O_{(m-k) \times k} & O_{(m-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

และ equivalent กับเมตริกซ์ A ในข้อ 1

วิธีทำ :

จากเมตริกซ์ A ทำให้อยู่ในรูป row reduced echelon จะได้เมตริกซ์ C ดังในข้อ 1 จากเมตริกซ์ C ใช้การสลับที่ระหว่างคอลัมน์ จนกระทั่งได้เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 & O_{4 \times 1} \end{bmatrix}$$

ซึ่งอยู่ในรูป normal form ที่ต้องการ