ภาคผนวก

สรุปคุณสมบัติที่สำคัญของเมตริกซ์และตัวกำหนด

ทฤษฎีบท 1 การสลับเปลี่ยนมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A^T)^T = A$ สำหรับทุก ๆ เมตริกซ์ A
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ ถ้า A และ B สามารถบวกกันได้
3. $(aB)^T = aB^T$ สำหรับสเกลาร์ a ใด ๆ และเมตริกซ์ B ใด ๆ
4. $(AB)^T = B^T A^T$ ถ้า A และ B สามารถคูณกันได้

ทฤษฎีบท 2 การสังยุคสลับเปลี่ยนมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A^*)^* = A$ สำหรับทุก ๆ เมตริกซ์เชิงซ้อน A
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(aB)^* = \bar{a} B^*$ สำหรับสเกลาร์เชิงซ้อนใด ๆ และเมตริกซ์ B ใด ๆ
4. $(AB)^* = B^* A^*$ ถ้า A และ B สามารถคูณกันได้

ทฤษฎีบท 3 ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ a, b เป็นสเกลาร์ ดังนั้น คุณสมบัติของผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงหลัก (trace) มีดังนี้

1. $Tr(aA + bB) = aTr(A) + bTr(B)$
2. $Tr(A^T) = Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า A^{-1} และ B^{-1} หาค่าได้ และ c เป็นสเกลาร์ $(c \neq 0)$ เมตริกซ์ผกผันมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
5. ถ้า A^{-1} หาค่าได้ และ $AB = AC$ ดังนั้น $B = C$
6. ถ้า A^{-1} หาค่าได้ และ $BA = CA$ ดังนั้น $B = C$

การหาตัวกำหนดอย่างง่ายสำหรับบางเมตริกซ์

1. ทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด 1×1

$$\det[a] = a$$

2. ทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด 2×2

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

3. ทุก ๆ เมตริกซ์สามเหลี่ยม ให้ T เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมใด ๆ ในรูป

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ t_{n1} & \cdots & \cdot & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{หรือ}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdot & t_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\det[T] = t_{11}\cdot t_{22}\cdot t_{33}\cdot\ldots\cdot t_{nn}$

4. ถ้า $\det[B] = 0$ (แต่ไม่ทุกกรณี) ก็ต่อเมื่อ
   (ก) B มีสมาชิกในแถวหรือสดมภ์หนึ่งเป็นศูนย์ทั้งหมด
   (ข) B มีสมาชิกเหมือนกันสองแถวหรือสองสดมภ์
   (ค) แถวหนึ่งของ B เป็นผลคูณของสเกลาร์กับแถวอื่นหรือสดมภ์หนึ่งของ B เป็นผลคูณของสดมภ์อื่น