
คำตอบ

แบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. (ก) เมตริกซ์ A, B, D (ข) เมตริกซ์ C, E
 (ค) เมตริกซ์ A, D (ง) เมตริกซ์ B, D
 (จ) เมตริกซ์ D
 (ฉ) A มีขนาด 2×2 , B มีขนาด 1×3 , C มีขนาด 2×3 , D มีขนาด 1×1 และ E มีขนาด 3×2
2. (ก) เมตริกซ์ B, C, D (ข) เมตริกซ์ A, E
 (ค) เมตริกซ์ D, E (ง) เมตริกซ์ A, D
 (จ) เมตริกซ์ B, D
 (ฉ) A มีขนาด 1×4 , B มีขนาด 1×3 , C มีขนาด 2×3 , D มีขนาด 1×1 และ E มีขนาด 2×2
3. การจัดเรียงไม่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก
4. (ก) $a_{22} = 5$ (ข) $6 = a_{23}$
 (ค) A มีขนาด 2×3
5. (ก) $a_{21} = 5$ (ข) ไม่นิยาม
 (ค) a_{31} (ง) A มีขนาด 3×2
6.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
7.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$
8. 1, 5, 9
9. $w = 2, x = 3, y = 8, z = 7$
10. $u = -9, v = 2$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

1. (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

(ค) $[10]$

(จ) $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & \\ 7 & 3 & -2 & \end{bmatrix}$

3. (น) $A+B = [4+b_{11} \quad 3+b_{12} \quad 4+b_{13} \quad -5+b_{14}]$

(ข) $b_{11} = 4, b_{12} = 5, b_{13} = -1, b_{14} = 6$

4. $AB = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 29 \\ -2 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

A มีขนาด 2×4 , B มีขนาด 4×3 , และ AB มีขนาด 2×3

5. (ก) $AB = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}$

(ข) $BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ค) $AB \neq BA$

6. (ก) $CA = \begin{bmatrix} 28 & 48 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

(ข) คูณไม่ได้

(ค) $C^2 = \begin{bmatrix} 49 & 48 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$

(ง) คูณไม่ได้

(จ) $(2A+C)B = \begin{bmatrix} 2 & 71 & 21 \\ -29 & 67 & 18 \\ -56 & 188 & 52 \end{bmatrix}$

(ฉ) $(AC)B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 125 & 37 \end{bmatrix}$

7. (ก) $|55|$

(ค) คูณกันไม่ได้

(จ)
$$\begin{bmatrix} -7 & 4 & 2 & 5 \\ -19 & 32 & 51 & 24 \\ -19 & 28 & 34 & 17 \end{bmatrix}$$

(ข) $|-2 \ 34 \ 12|$

(ง) $|35|$

(ฉ)
$$\begin{bmatrix} -2+7i \\ 3 \end{bmatrix}$$

8. (ก) AB คูณกันได้เมื่อ $t = 4$

(ข) ขนาดของ AB คือ 3×5 (ค) BA คูณกันไม่ได้

9. $a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} + a_{24}b_{43} + a_{25}b_{53}$

10. $[70 \ -5 \ 19 \ 10 \ -3]$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1. $[7] = [2] + [5]$

3. $[5] = [4] + [1]$

5.
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6.
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

7. (ก) $(A+B)+C = A+(B+C) = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

(ข) $A(BC) = (AB)C = \begin{bmatrix} -31 & -37 \\ 11 & 29 \end{bmatrix}$

(ค) $A(B+C) = AB+AC = \begin{bmatrix} 6 & 48 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

(ง) $c(AB) = (cA)B = \begin{bmatrix} -3 & 87 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$

(จ) $AB = \begin{bmatrix} -1 & 29 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$

(ฉ) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 48 & 8 \\ 6 & 28 \end{bmatrix} \neq A^2+2AB+B^2 = \begin{bmatrix} 39 & 42 \\ 3 & 37 \end{bmatrix}$

(ช) $(AC)^2 = \begin{bmatrix} 30 & 114 \\ -6 & -18 \end{bmatrix} \neq A^2C^2 = \begin{bmatrix} -7 & 95 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

9. $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} -18 & 52 & 32 \\ -27 & 78 & 48 \\ -36 & 104 & 64 \end{bmatrix}$

11. $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$

13. (ก) $AB = BA = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ (ข) สลับที่ได้

คำตอบแบบฝึกหัด 1.4

1. (ก) เป็นเมตริกซ์สมมาตร
 (ข) ไม่เป็นเมตริกซ์สมมาตร เพราะที่ไม่เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และไม่สามารถเท่ากับการสลับเปลี่ยนของมัน
 (ค) ไม่เป็นเมตริกซ์สมมาตร เพราะว่ามีเมตริกซ์นี้ไม่เท่ากับการสลับเปลี่ยนของมัน
2. เป็นเมตริกซ์สมมาตร
7. (ก) ไม่เป็นเมตริกซ์เสมีอนสมมาตร
 (ข) เป็นเมตริกซ์เสมีอนสมมาตร
 (ค) ไม่เป็นเมตริกซ์เสมีอนสมมาตร
 (ง) เป็นเมตริกซ์เสมีอนสมมาตร

$$11. \text{ (ก) } \begin{bmatrix} 9 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ (ข) } \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$13. \text{ (ก) เมตริกซ์สังยุคคือ } \begin{bmatrix} i & 2+i & 2 \\ 0 & -3i & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนคือ } \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 2+i & -3i \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ (ข) เมตริกซ์สังยุคคือ } \begin{bmatrix} 2 & 2-i \\ -i & -2i \end{bmatrix}$$

$$\text{เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนคือ } \begin{bmatrix} 2 & -i \\ 2-i & -2i \end{bmatrix}$$

$$\text{ (ค) เมตริกซ์สังยุคคือ } \begin{bmatrix} 0 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนคือ $\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$

(ง) เมตริกซ์สังยุคและเมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนเท่ากับเมตริกซ์เริ่มแรก

(จ) เมตริกซ์สังยุคคือ $\begin{bmatrix} 0 & -i & -2i \\ -i & 0 & -4 \\ -2i & 4 & 0 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนคือ $\begin{bmatrix} 0 & -i & -2i \\ -i & 0 & 4 \\ -2i & -4 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิแทน

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เฮอร์มิแทน

$\begin{bmatrix} 0 & i & 2i \\ i & 0 & -4 \\ 2i & 4 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เสมือนเฮอร์มิแทน

คำตอบแบบฝึกหัด 1.5

$$1. \text{ (ก)} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 8 \\ \hline 4 & 20 \\ \hline 2 & 8 \end{array} \right]$$

$$\text{ (ข)} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 16 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ (ค)} \left[\begin{array}{c|c} 23 & 4 \\ \hline 16 & 7 \\ \hline 26 & 12 \end{array} \right]$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$4. \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$5. \text{ (ก)} \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{ (ข)} \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & f \end{array} \right]$$

$$6. \left[\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 3 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 7 & -4 & 3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 & 9 \\ 11 & -7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 2 & 10 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.6

1. (ก) ไม่เป็น
- (ข) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม, เป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น
- (ค) เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น
- (ง) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม
- (จ) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม, เป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น
- (ฉ) เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น
- (ช) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม
- (ซ) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม
- (ฌ) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม
- (ญ) เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม

2. ไม่ใช่

3. ใช่

4. (ก) จริง

$$(ข) \text{เท็จ} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ค) จริง

$$(ง) \text{เท็จ} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

(จ) จริง

$$(ฉ) \text{เท็จ} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ช) จริง

$$5. (ก) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(ข) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ค) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

$$(จ) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3

1. (น) จริง (ข) จริง (ง) เท็จ
3. -8
5. 108 โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.7 3 ครั้ง
9. 15
11. (น) $612 = |AB| = |A| |B|$ (ข) $14 = |AB| = |A| |B|$
13. (น) -17 (ข) -5 (ค) 0
(ง) -13 (จ) 39
17. 8
19. 4
21. 5
23. 0

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ & & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$
7. $\text{cof } A = \text{adj } A$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.5

1. (ก) เท็จ; ถ้าตัวกำหนดของทุก ๆ เมตริกซ์ย่อยขนาด 4×4 เป็นศูนย์ ดังนั้น ลำดับชั้นคือ 3 หรือน้อยกว่า
 (ข) จริง; สมัยกับทุก ๆ เมตริกซ์จัตุรัสย่อย B ของเมตริกซ์ A จะมีเมตริกซ์ย่อย B^T ของเมตริกซ์ A^T โดยทฤษฎีบท 2.3.2 $|A^T| = |A|$
 (ค) จริง; ถ้า $A = -A^T$ ดังนั้น $|A| = |-A^T| = (-1)^3|A^T|$ และ $|A| = -|A^T|$
 ถ้า $|A| = 0$

3. (ก) 2 (ข) 3 (ค) 1 (ง) 0 (จ) 1

5. ลำดับชั้นของ A คือ 2 ลำดับชั้นของ $[A|B]$ คือ 3

7. ลำดับชั้นคือ 2 หรือน้อยกว่า

9. (ก) 2; ลำดับชั้นเต็ม

(ข) 3; ลำดับชั้นเต็ม

(ค) 3

(ง) 3

10. $(AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

เมตริกซ์ $(A^T A)$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×4 มีลำดับชั้นเป็น 2 ดังนั้น ไม่มีตัวผกผัน ตามทฤษฎีบท 2.3.5

คำตอบแบบฝึกหัด 2.6

1. (ก) $x = 4, \quad y = 1$

(ข) $x = \frac{11}{2}, \quad y = -5, \quad z = -\frac{1}{2}$

(ค) $x = 1, \quad y = -1, \quad z = -3$ และ $t = 3$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2

1. (1) $\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

(3) ไม่มีตัวผกผันเพราะว่า $\det A = 0$

(4) $\frac{1}{65} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 32 \\ 8 & 1 & -4 \\ -2 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. ไม่นิยาม เพราะที่ B ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส เพราะฉะนั้น B^{-1} จึงหาค่าไม่ได้ และ B^{-3} หาค่าไม่ได้ด้วย

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. 5

9. $A^* = A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A(\text{adj } A) = |A|I_n$

$$\det[A(\text{adj } A)] = \det(|A|I_n)$$

$$|A|\det(\text{adj } A) = |A|^n$$

$$\det(\text{adj } A) = |A|^{n-1}$$

$$\det(\text{adj } A) = |A|^{n-1} = 121$$

13. (ก) $\det A = \sum_{i=1}^n (a_{ij})^2 ; j = 1, 2, \dots, n$

(ข) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^T$ กำหนดว่า $|A| \neq 0$

(จ) ใช่

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3

1. (ก) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3/6 \\ -2/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ข) $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 3/6 \\ -2/6 & 1/6 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. ลำดับชั้นของ $A =$ ลำดับชั้นของ $B = 1$ เพราะว่าตามทฤษฎีบท 3.3.6

9. ตัวอย่างเช่น $([2] + [3])^{-1} = [5]^{-1} = \left[\frac{1}{5} \right]$

แต่ $[2]^{-1} + [3]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{3} \right] = \left[\frac{5}{6} \right]$

สรุปว่า $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.4

1. $x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = \frac{-1}{4}$
3. $x_1 = \frac{9}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{7}{2}$
5. $x = 3, y = 3$
7. $X = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -9/2 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.1

1. (ก) การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุแบบ 3 ($-2R_1 + R_2$)
 (ข) การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุแบบ 2 ($\frac{1}{2}R_1$)
 (ค) การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุแบบ 1 ($R_2 \leftrightarrow R_1, R_2 \leftrightarrow R_3$)
3. (ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 3 \\ y = 1 \end{cases}; x = \frac{5}{2}, y = 1$$

 (ข) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -21 \end{array} \right]$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 6 \\ z = -21 \end{cases}; x = -2, y = 27, z = -21$$
5. (ก) ไม่สมมูลกัน เพราะว่าเมตริกซ์แต่งเติมไม่สมมูลตามแถว
 (ข) สมมูลกัน เพราะว่าเมตริกซ์แต่งเติมสมมูลตามแถว
7. ขนาดของ A = ขนาดของ B

คำตอบแบบฝึกหัด 4.2

1. ลำดับชั้น 2
3. ลำดับชั้น 2
5. ลำดับชั้น 2
7. ลำดับชั้น 3

$$9. \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

1. $A \sim G, B \sim E$
13. รูปนอร์แมลทั้งสองเท่ากัน หรือเมตริกซ์หนึ่งสามารถแปลงไปเป็นเมตริกซ์อื่นโดยการดำเนินการเชิงธาตุมูล หรือลำดับชั้นเท่ากัน และมีขนาดเท่ากัน

คำตอบแบบฝึกหัด 4.3

$$1. E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$5. E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7. P และ Q ไม่ใช่มีเพียงค่าเดียว (not unique) แต่ P และ Q ซึ่งสอดคล้องทฤษฎีบท 4.3.2 คือ

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

P คือ ผลคูณของสองเมตริกซ์ธาตุมูล

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Q เป็นเมตริกซ์ธาตุมูล

9. P และ Q ไม่ใช่มีเพียงค่าเดียว แต่ P และ Q ซึ่งสอดคล้องตามทฤษฎีบท 4.3.2 คือ

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$11. E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$13. E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.4

$$1. \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. ไม่มีตัวผกผัน

$$7. x_1 = \frac{13}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

$$9. x_1 = \frac{9}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{7}{2}$$

$$11. A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{26}{27} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$13. B = kA^{-1}$$

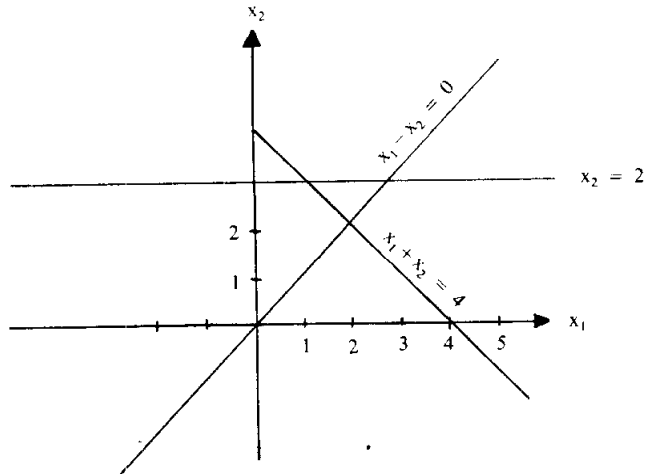
15. เมตริกซ์ A สามารถแปลงไปเป็น I_n โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล แต่ถ้า A ไม่สามารถหาตัวผกผันได้ A ไม่สมมูลกับ I_n

คำตอบแบบฝึกหัด 5.1

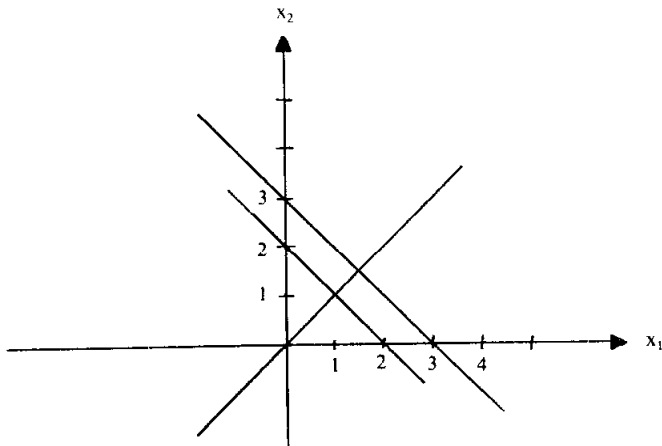
1. (ก) ระบบไม่สอดคล้อง; ลำดับชั้นของ $A \neq$ ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$.
- (ข) ระบบสอดคล้อง และ $r = 2 = n$; ดังนั้นจะมีคำตอบเพียงค่าเดียว
- (ค) ระบบสอดคล้อง $r = 3 = n$; ดังนั้น จะมีคำตอบเพียงค่าเดียว
- (ง) ระบบสอดคล้อง $r = 2, n = 3, r < n$; จะมีคำตอบจำนวนไม่จำกัด
- (จ) เป็นระบบเอกพันธ์ เพราะว่า $B = 0$; ดังนั้น เป็นระบบสอดคล้อง $r = 2 < n$ เพราะฉะนั้น จะมีจำนวนคำตอบไม่จำกัด
- (ฉ) เป็นระบบเอกพันธ์ เพราะว่า $B = 0$; ดังนั้น เป็นระบบสอดคล้อง $r = 3 = n$ เพราะฉะนั้น จะมีคำตอบเพียงค่าเดียว
- (ช) ระบบสอดคล้อง $r = 3 < n$ ดังนั้น จะมีจำนวนคำตอบไม่จำกัด
- (ซ) ระบบไม่สอดคล้อง เพราะว่าลำดับชั้นของ A ไม่เท่ากับลำดับชั้นของ $[A \mid B]$
3. ไม่ใช่คำตอบ
5. คำตอบมีเพียงค่าเดียว; อย่างไรก็ตาม คำตอบเป็นคำตอบสำคัญน้อย
7. r คือ ลำดับชั้นของ A และ A มีขนาด $m \times n$ เพราะฉะนั้น $r \leq n$ และ $r \leq m$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.2

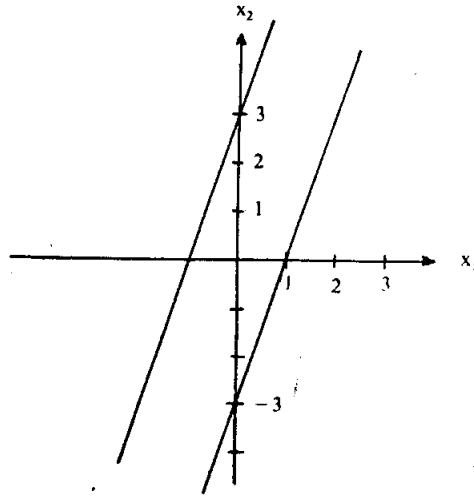
1. (ก) ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ = 2
 ลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเต็ม = 3



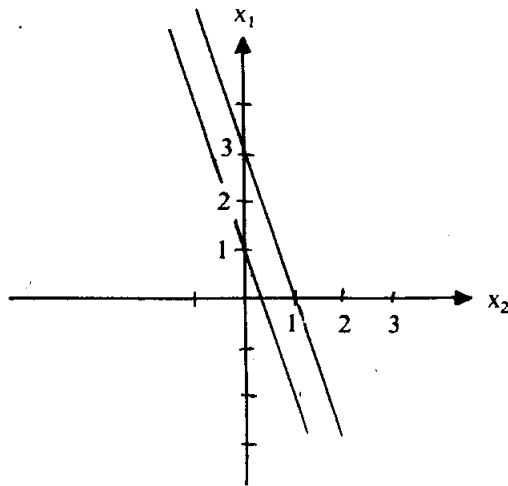
- (ข) ลำดับชั้นของ A คือ 2; ลำดับชั้นของ $[A \ ; B]$ คือ 3



(ค) ลำดับชั้นของ A คือ 1; ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 2



(ง) ลำดับชั้นของ A คือ 1; ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 2



2. ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 3 ลำดับชั้นของ A มากที่สุดคือ 2 เพราะฉะนั้น r ไม่สามารถหาค่าได้
3. ถ้า $b = 4$ จุดใด ๆ บนเส้นตรง $x_1 + x_2 = 4$ จะสอดคล้องระบบ แต่ถ้า $b \neq 4$ ระบบจะไม่สอดคล้องโดยการเขียนกราฟจะได้เส้นตรงสองเส้นขนานกัน

คำตอบแบบฝึกหัด 5.3

1. (ก) คำตอบคือ (2, 1) (ข) คำตอบคือ (0, 0)
 (ค) ระบบไม่สอดคล้อง (ง) ระบบไม่สอดคล้อง
 (จ) คำตอบคือ (1, 3) (ฉ) ระบบไม่สอดคล้อง
3. แถวสุดท้ายซึ่งสมาชิกทั้งหมดไม่ใช่ศูนย์ จะมีสมาชิกไม่ใช่ศูนย์เฉพาะในสดมภ์สุดท้าย
5. $I_1 = \frac{3}{140}E_0$, $I_2 = \frac{1}{140}E_0$, $I_3 = \frac{1}{70}E_0$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.4

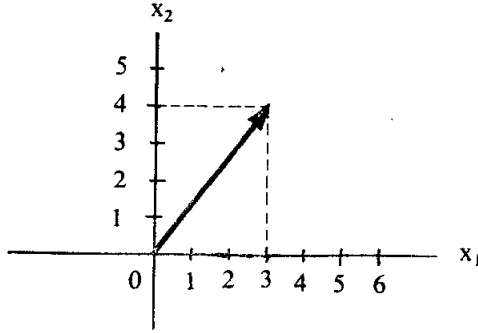
1. (ก) จำนวนคำตอบไม่จำกัด
 (ข) จำนวนคำตอบไม่จำกัด
 (ค) ไม่มีคำตอบ
 (ง) คำตอบมีค่าเดียว (0, 0)
3. จำนวนของแถวซึ่งไม่ได้ประกอบด้วยสมาชิกศูนย์ทั้งหมดจะน้อยกว่าจำนวนของตัวไม่รู้ค่า และแถวสุดท้ายของแถวเหล่านี้มีสมาชิกไม่เป็นศูนย์ก่อนสดมภ์สุดท้าย
5. ไม่ได้, ทฤษฎีบท 5.4.1
7. (ก) ให้ $x_1 = x_2 = 0$
 คำตอบพื้นฐานคือ (0, 0, 4, 5)
 (ข) ตัวไม่รู้ค่าสองตัวใด ๆ สามารถเขียนในพจน์ของสองตัวไม่รู้ค่าอื่น ๆ ยกเว้น x_1 และ x_2 ไม่สามารถเขียนในพจน์ของ x_3 และ x_4

คำตอบแบบฝึกหัด 6.1

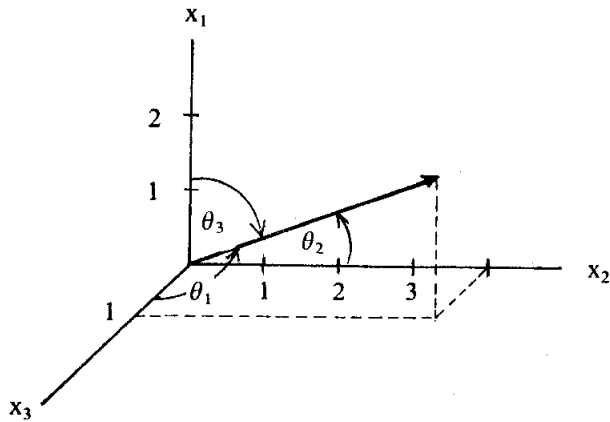
1. (น) (25, 20, -5) (ข) (31, 14, -14)
 (ค) (12, 6, -5)
2. (ก) (-3, -6, -9, 0, 1) (ข) (23, 16, 0, 15, 9)
 (ค) มี 5 พิกัด (ง) $x = \frac{15}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

คำตอบแบบฝึกหัด 6.2

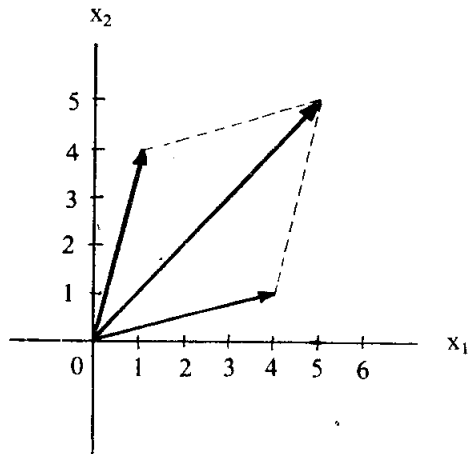
1. $\|\vec{v}_1\| = 5$



3.

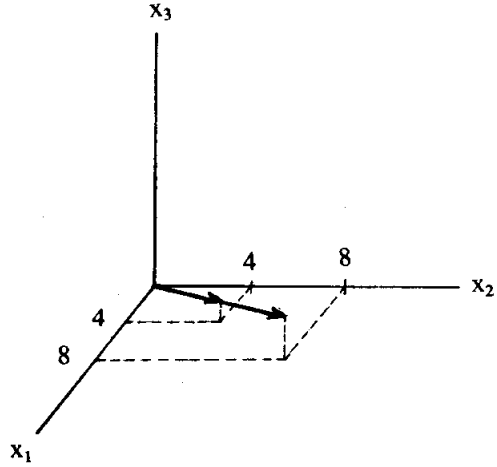


5. $\sqrt{74}$



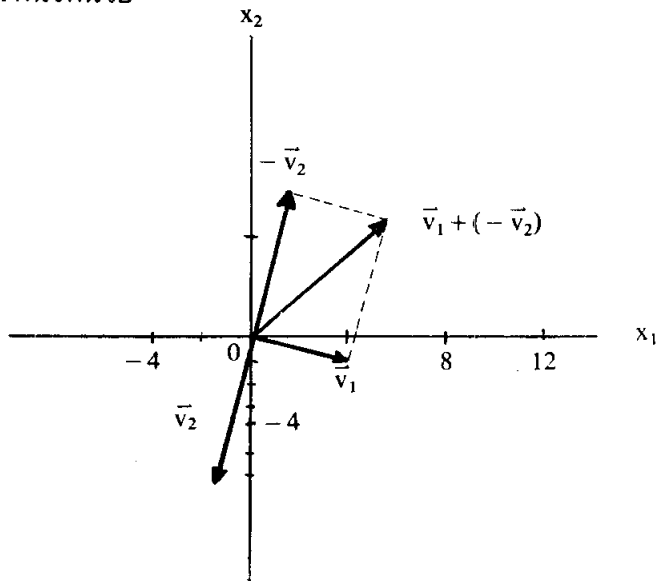
7.

9. $\vec{v} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$



11. \vec{v}_2 เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

13.



คำตอบแบบฝึกหัด 6.3

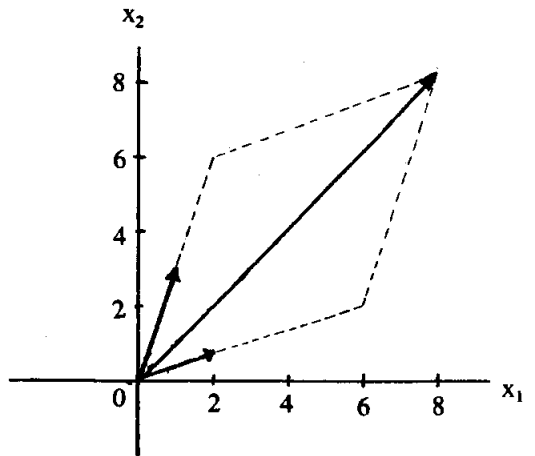
1. (ก) 10 (ข) 10 (ค) 0
(ง) 0 (จ) เป็นไปไม่ได้ (ฉ) -2
3. $\frac{-1}{5\sqrt{2}}$; มุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมป้าน
5. (ก) $\|\vec{\alpha}\|^2$ หรือ $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$
(ข) $\sqrt{56}$
7. $x = -1$
9. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; มุมระหว่างเวกเตอร์เป็นมุมป้าน
11. 14 หน่วย

คำตอบแบบฝึกหัด 7.1

1. คุณสมบัติข้อ (3), (4) และ (๗)
3. คุณสมบัติข้อ (5), (6) และ (8)
5. คุณสมบัติข้อ (8)
9. ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์
11. ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์
13. เซตย่อยในข้อ ก และ ค เป็นปริภูมีย่อย

คำตอบแบบฝึกหัด 7.2

1. $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$
3. $(8, 9) = 3(2, 1) + 2(1, 3)$



5. จงแสดงว่า $(4, 2) = c_1(-3, 2) + c_2(9, -6)$ จะนำไปสู่ระบบไม่สอดคล้องของสมการเชิงเส้น
7. ใช่ เพราะว่าเวกเตอร์ใด ๆ ใน \mathbb{R}^3 กล่าวได้ว่า (a, b, c) สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 5)$ และ $(0, 1, 1)$
9. ไม่ใช่ เพราะว่าเวกเตอร์ใด ๆ ซึ่งไม่ได้วางบนระนาบของสองเวกเตอร์ที่กำหนดให้ไม่สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของสองเวกเตอร์ที่กำหนดให้
11. (ก) \mathbb{R}^3 หรือปริภูมิ 3 มิติ
 (ข) หนึ่งของพิกักระนาบในปริภูมิ 3 มิติ
 (ค) ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งมี 2 เวกเตอร์ที่กำหนดให้วางอยู่

คำตอบแบบฝึกหัด 7.3

1. ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
3. เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
5. ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
7. เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
9. (ก) ไม่ใช่ เพราะว่า

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + k_3 \vec{v}_3 = (0, 0)$$

จะให้ระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ ใน 3 ตัวไม่รู้ค่า ระบบนี้จะมีคำตอบอื่นนอกจาก (0, 0, 0)

(ข) ใช่ เพราะว่า เหตุผลเหมือนที่กำหนดในข้อ (ก)

(ค) ใช่ เพราะว่า

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 = (0, 0, 0)$$

จะให้ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ ใน 2 ตัวไม่รู้ค่า ระบบนี้อาจจะมีคำตอบเฉพาะ (0, 0)

(ง) ใช่ เพราะว่า

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 = (0, 0, 0)$$

จะให้ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ ใน 2 ตัวไม่รู้ค่า

ระบบนี้อาจจะมีคำตอบอื่นนอกจาก (0, 0)

11. เซต $\{(0, 0)\}$ ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

เซต $\{(1, 2)\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

15. (ก) u_2 คือ ผลคูณสเกลาร์ของ u_1
- (ข) เวกเตอร์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองตามทฤษฎีบท
- (ค) p_2 คือ ผลคูณสเกลาร์ของ p_1
- (ง) B คือ ผลคูณสเกลาร์ของ A

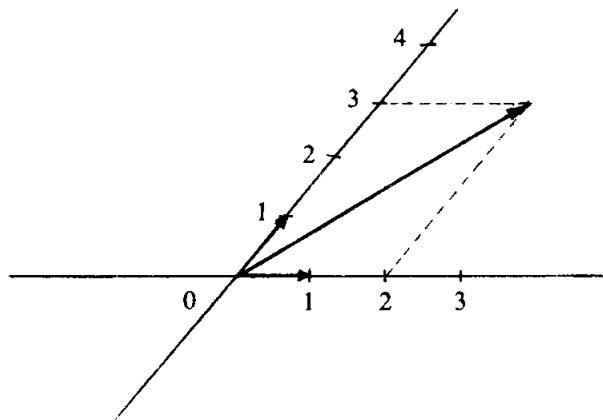
16. (ก) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ข) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
- (ค) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ง) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
17. (ก), (ข), (ค), (ง) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

18. (ก) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ข) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
(ค) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ง) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
19. (ก) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ข) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
(ค) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ง) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
(จ) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ฉ) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

คำตอบแบบฝึกหัด 7.4

3. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V_3(\mathbb{R})$
5. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V_3(\mathbb{R})$
7. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์
9. เป็น เพราะว่าเซตนี้เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์
11. ไม่ใช่ เพราะว่า 3 เวกเตอร์ทั้งหมดไม่แผ่ทั่วปริภูมิและไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
13. มิติ คือ 3 หรือน้อยกว่า

15.



คำตอบแบบฝึกหัด 7.5

1. (n) มูลฐานสำหรับ R^2 มี 2 เวกเตอร์
 (Y) มูลฐานสำหรับ R^3 มี 3 เวกเตอร์
 (ค) มูลฐานสำหรับ P_2 มี 3 เวกเตอร์
 (9) มูลฐานสำหรับ $M_{2 \times 2}$ มี 4 เวกเตอร์
2. n, ข 3. n, ข 4. ค, ง
6. สองเวกเตอร์ใด ๆ ของเวกเตอร์ v_1, v_2, v_3
7. มูลฐาน : $(1, 0, 1)$; มิติ = 1
8. มูลฐาน : $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$ มิติ = 2
9. มูลฐาน : $(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$; มิติ = 3
10. มูลฐาน : $(3, 1, 0), (-1, 0, 1)$ มิติ = 2
11. ไม่มีมูลฐาน ; มิติ = 0
12. มูลฐาน : $(4, -5, 1)$ มิติ = 1

10. (ก) 0 (ข) 0
 11. (ก) $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ (ข) 0
 12. (ก) $k = -3$ (ข) $k = -2, -3$
 14. เมตริกซ์ข้อ (ก), (ข) และ (ค) ตั้งฉากกับ A
 15. $\pm \frac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$

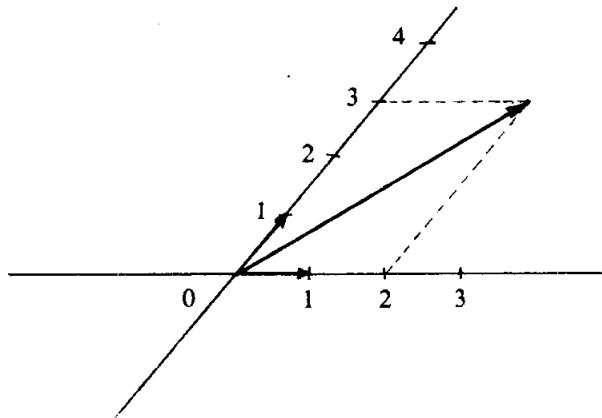
คำตอบแบบฝึกหัด 8.4

1. (ข)
 2. (ข), (ง)
 3. (ก)
 4. (ก)
 7. (ก) $(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}), (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ (ข) $(1, 0), (0, -1)$
 8. (ก) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$
 (ข) $(1, 0, 0), (0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}), (0, \frac{30}{\sqrt{11925}}, \frac{105}{\sqrt{11925}})$
 9. $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0),$
 $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}), (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$
 10. $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$
 11. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$

คำตอบแบบฝึกหัด 7.4

3. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V_3(\mathbb{R})$
5. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V_3(\mathbb{R})$
7. ไม่เป็น เพราะว่าเซตนี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์
9. เป็น เพราะว่าเซตนี้เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์
11. ไม่ใช่ เพราะว่า 3 เวกเตอร์ทั้งหมดไม่แผ่ทั่วปริภูมิและไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
13. มิติ คือ 3 หรือน้อยกว่า

15.



คำตอบแบบฝึกหัด 7.5

1. (n) มूलฐานสำหรับ R^2 มี 2 เวกเตอร์
 (91) มूलฐานสำหรับ R^3 มี 3 เวกเตอร์ •
 (ค) มूलฐานสำหรับ P_2 มี 3 เวกเตอร์
 (9) มूलฐานสำหรับ $M_{2 \times 2}$ มี 4 เวกเตอร์
2. n, ข 3. n, ข 4. ค, ง
6. สองเวกเตอร์ใด ๆ ของเวกเตอร์ v_1, v_2, v_3
7. มूलฐาน : $(1, 0, 1)$; มิติ = 1
8. มूलฐาน : $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$; มิติ = 2
9. มूलฐาน : $(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$; มิติ = 3
10. มूलฐาน : $(3, 1, 0), (-1, 0, 1)$; มิติ = 2
11. ไม่มีมूलฐาน มิติ = 0
12. มूलฐาน : $(4, -5, 1)$ มิติ = 1

10. (น) 0 (ข) 0
11. (น) $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ (ข) d
12. (น) $k = -3$ (ข) $k = -2, -3$
14. เมตริกซ์ข้อ (น), (91) และ (ค) ตั้งฉากกับ A
15. $\pm \frac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$

คำตอบแบบฝึกหัด 8.4

1. (ข)
2. (ข), (ง)
3. (ก)
4. (ก)
7. (น) $(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}), (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ (ข) $(1, 0), (0, -1)$
8. (น) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$
 (ข) $(1, 0, 0), (0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}), (0, \frac{30}{\sqrt{11925}}, \frac{105}{\sqrt{11925}})$
9. $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, 0),$
 $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}), (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$
10. $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$
11. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$