บทที่ 8
ปริภูมิยูคลิเดียน

บทที่ 8
ปริภูมิยูคลิเดียน
(Euclidean space)

8.1 ผลคูณภายในยูคลิเดียน (Euclidean inner product)

นิยาม 8.1.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น n สิ่งที่เป็นอันดับ (ordered – n – tuple) คือ ลำดับของจำนวนจริง n จำนวนในรูป $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เซตของ n สิ่งที่เป็นอันดับทั้งหมดเรียกว่า ปริภูมิ n มิติ (n – space) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R^n

ตัวอย่างเช่น เมื่อ n = 2 บ่อยครั้งที่ใช้ในรูปของคู่อันดับ (ordered pair) และเมื่อ n = 3 จะใช้ในรูปของสามอันดับ (ordered triple) นอกจากคู่อันดับและสามอันดับดังกล่าวแล้ว เมื่อ n = 1 แต่ละ n สิ่งที่เป็นอันดับประกอบด้วยจำนวนจริงเพียง 1 จำนวนเท่านั้น และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R^1 ซึ่งมีความหมายเหมือนเซตของจำนวนจริง และโดยทั่วไปจะแทนเซตจำนวนจริงนี้ด้วย R มากกว่าจะแทนด้วย R^1

นิยาม 8.1.2 ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ คือเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^n ดังนั้น ผลคูณภายในยูคลิเดียน (Euclidean inner product) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $u \cdot v$ นิยามโดย

$$\boxed{u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n} \qquad \ldots\ldots\ldots.(8.1.1)$$

ข้อสังเกต เมื่อ $n = 2$ หรือ 3 ผลคูณภายในยูคลิเดียนก็คือผลคูณสเกลาร์ ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 6.3

ตัวอย่างที่ 8.1.1 ผลคูณภายในยูคลิเดียนของเวกเตอร์ $u = (-1, 3, 5, 7)$ และ $v = (5, -4, 7, 0)$ ใน R^4 คือ

$$u \cdot v = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = 18$$

คุณสมบัติทางพีชคณิต 4 ข้อของผลคูณภายในยูคลิเดียนจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.1 ถ้า u, v และ w คือ เวกเตอร์ใด ๆ ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ ดังนั้น

(1) $u \cdot v = v \cdot u$

(2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(3) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

(4) $v \cdot v \geqslant 0$ ถ้า $v \cdot v = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = 0$

พิสูจน์ ให้

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

พิสูจน์ข้อ (1) ใช้นิยามผลคูณภายในยูคลิเดียน ดังนั้น

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= v \cdot u \end{aligned}$$ #

พิสูจน์ข้อ (2) ใช้นิยามการบวกเวกเตอร์และนิยามผลคูณภายในยูคลิเดียน ดังนั้น

$$\begin{aligned} (u+v) \cdot w &= \left[(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)\right] \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &= (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + \ldots + (u_n+v_n)w_n \\ &= (u_1w_1+v_1w_1) + (u_2w_2+v_2w_2) + \ldots + (u_nw_n+v_nw_n) \end{aligned}$$

ใช้คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative property) ของจำนวนจริง

$$\begin{aligned} &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots + v_nw_n) \\ &= u \cdot w + v \cdot w \end{aligned}$$

พิสูจน์ข้อ (3) ให้ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ ดังนั้น

$$(ku) \cdot v = \left[k(u_1, u_2, \ldots, u_n)\right] \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$= (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)\cdot(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$= (ku_1v_1, ku_2v_2, \ldots, ku_nv_n)$$
$$= k(u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n)$$
$$= k(u\cdot v) \qquad \#$$

พิสูจน์ข้อ (4)

$$v\cdot v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\cdot(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$= v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geqslant 0$$

เพราะว่า ถ้า $v = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$ ดังนั้น

$$v\cdot v = 0$$

แต่ถ้า $v \neq 0$ จะมี $v_i \neq 0$ และจะได้ว่า

$$v\cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \neq 0 \qquad \#$$

โดยการเปรียบเทียบกับสูตรที่เรียนรู้มาแล้วใน R^2 และ R^3 เราจะนิยามค่าประจำยูคลิเดียน (Euclidean norm) หรือความยาวยูคลิเดียน (Euclidean length) ของเวกเตอร์ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ใน R^n โดย

$$\boxed{\|u\| = (u\cdot u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots.(8.1.2)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ระยะทางยูคลิเดียน (Euclidean distance) ระหว่างจุด $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน R^n นิยามโดย

$$\boxed{d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}} \qquad \ldots..(8.1.3)$$

ตัวอย่าง 8.1.2 ถ้า $u = (1, 3, -2, 7)$ และ $v = (0, 7, 2, 2)$

ดังนั้น $\|u\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

และ

$$d(u, v) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$

แบบฝึกหัด 8.1

1. ให้ $u_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $u_2 = (2, 0, 4, -1)$, $u_3 = (7, 1, 1, 4)$ และ $u_4 = (6, 3, 1, 2)$ จงหาสเกลาร์ c_1, c_2, c_3 และ c_4 ซึ่งสอดคล้องตามสมการ $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = (0, 5, 6, -3)$
2. จงแสดงว่า จะไม่สามารถหาค่าสเกลาร์ c_1, c_2 และ c_3 ได้ เมื่อกำหนดให้

$$c_1(1, 0, -2, 1) + c_2(2, 0, 1, 2) + c_3(1, -2, 2, 3) = (1, 0, 1, 0)$$

3. จงหาค่าประจำยูคลิเดียนของ v เมื่อ
   (ก) $v = (4, -3)$
   (ข) $v = (1, -1, 3)$
   (ค) $v = (2, 0, 3, -1)$
   (ง) $v = (-1, 1, 1, 3, 6)$
4. ให้ $u = (3, 0, 1, 2)$, $v = (-1, 2, 7, -3)$ และ $w = (2, 0, 1, 1)$ จงหา
   (ก) $\|u + v\|$
   (ข) $\|u\| + \|v\|$
   (ค) $\|-2u\| + 2\|u\|$
   (ง) $\|3u - 5v + w\|$
   (จ) $\frac{1}{\|w\|}w$
   (ฉ) $\left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\|$
5. จงหาผลคูณภายในยูคลิเดียน $u \cdot v$ เมื่อ
   (ก) $u = (-1, 3)$, $v = (7, 2)$
   (ข) $u = (3, 7, 1)$, $v = (-1, 0, 2)$
   (ค) $u = (1, -1, 2, 3)$, $v = (3, 3, -6, 4)$
   (ง) $u = (1, 3, 2, 6, -1)$, $v = (0, 0, 2, 4, 1)$
6. จงหาระยะทางยูคลิเดียนระหว่าง u และ v เมื่อ
   (ก) $u = (2, -1)$, $v = (3, 2)$
   (ข) $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 6, 0)$
   (ค) $u = (2, 0, 1, 3)$, $v = (-1, 4, 6, 6)$
   (ง) $u = (6, 0, 1, 3, 0)$, $v = (-1, 4, 2, 8, 3)$

8.2 ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner product spaces)

ในหัวข้อ 8.1 ได้ศึกษาถึงผลคูณภายในยูคลิเดียนบนปริภูมิเวกเตอร์ R^n สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความคิดรวบยอดของผลคูณภายในบนปริภูมิเวกเตอร์เจาะจง (arbitrary vector space) เช่นเดียวกับข้อสรุปที่ผ่านมา ทำให้เราสามารถนิยามความหมายของมุม ความยาวและระยะทางในปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไป นอกเหนือจากที่ผ่านมา

ในทฤษฎีบท 8.1.1 หัวข้อ 8.1 ได้รวบรวมคุณสมบัติที่สำคัญที่สุดของผลคูณภายในยูคลิเดียน ในปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไป ผลคูณภายในนิยามเป็นสัจพจน์ โดยอาศัยคุณสมบัติในทฤษฎีบท 8.1.1 เป็นสัจพจน์

นิยาม 8.2.1 ผลคูณภายในบนปริภูมิเวกเตอร์ V คือ ฟังก์ชันซึ่งสัมพันธ์กับจำนวนจริง $\langle u, v\rangle$ เมื่อเทียบกับแต่ละคู่ของเวกเตอร์ u และ v ใน V ในวิธีเช่นนี้สัจพจน์ต่อไปนี้สอดคล้องกับทุก ๆ เวกเตอร์ u, v และ w ใน V และทุก ๆ สเกลาร์ k

(1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(3) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, k\rangle$

(4) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ และ $\langle v, v\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v = 0$

ปริภูมิเวกเตอร์เมื่อเทียบกับผลคูณภายในเรียกว่า "ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)"

คุณสมบัติเพิ่มเติมต่อไปนี้ ได้จากสัจพจน์ผลคูณภายใน 4 ข้อข้างต้น กล่าวคือ

(ก) $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$

(ข) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(ค) $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$

พิสูจน์ สำหรับข้อ (ก) และข้อ (ค) จะละไว้ให้พิสูจน์เอง แต่จะพิสูจน์ข้อ (ข) ให้ ดังนั้น

$\langle u, v+w\rangle = \langle v+w, u\rangle$ โดยใช้คุณสมบัติข้อ (1)

$= \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$ โดยใช้คุณสมบัติข้อ (2)

$= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ โดยใช้คุณสมบัติข้อ (1)

ตัวอย่างที่ 8.2.1 ให้ $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ผลคูณภายในยูคลิเดียน $\langle u, v\rangle = u\cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$ สอดคล้องกับทุกสัจพจน์ของผลคูณภายใน โดยทฤษฎีบทที่ 8.1.1 ของหัวข้อ 8.1

ตัวอย่างที่ 8.2.2 ถ้า $u = (u_1, u_2)$ และ $v = (v_1, v_2)$ คือเวกเตอร์ใน R^2 ดังนั้น จงแสดงว่า

$$\langle u, v\rangle \quad = \quad 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \qquad \text{..........(8.2.1)}$$

นิยามผลคูณภายใน

พิสูจน์ ขั้นแรก ถ้า u และ v สลับที่กันในสมการ (8.2.1) จะพบว่าด้านขวามือยังคงเหมือนเดิม ดังนั้น

$$\langle u, v\rangle \quad = \quad \langle v, u\rangle \qquad \#$$

ถ้า $w = \langle w_1, w_2\rangle$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\langle u+v, w\rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \qquad \#\end{aligned}$$

ต่อไป

$$\begin{aligned}(ku,\ v) &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\ &= k\langle u, v\rangle \qquad \#\end{aligned}$$

สุดท้าย

$$(v,\ v) = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$$

และแน่นอนว่า

$$\langle v, v\rangle \quad = \quad 3v_1^2 + 2v_2^2 \geqslant 0$$

ในกรณีที่ $\langle v, v\rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $v_1 = v_2 = 0$

นั่นคือ ถ้า $v = (v_1, v_2) = 0$ ดังนั้น สัจพจน์ 4 ข้อสอดคล้อง

ผลคูณภายในในตัวอย่างนี้ แตกต่างจากผลคูณภายในบน R^2 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงว่าปริภูมิเวกเตอร์สามารถมีผลคูณภายในมากกว่าหนึ่งได้

ตัวอย่างที่ 8.2.3 ถ้า

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

คือ เมตริกซ์ใด ๆ ขนาด 2×2 ดังนั้น จงแสดงว่าสูตร

$$\langle U, V\rangle \quad = \quad u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

นิยามผลคูณภายในบน $M_{2\times 2}$ (พิสูจน์เอง)

ตัวอย่างเช่น ถ้า

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\langle U, V\rangle = 1(-1)+2(0)+3(3)+4(2) = 16$$

ตัวอย่างที่ 0.2.4 ถ้า $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ และ $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ คือ 2 เวกเตอร์ใด ๆ ใน P_2 ดังนั้น จงแสดงว่าสูตร

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

นิยามผลคูณภายในบน P_2

(1)
$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 \\ &= \langle q, p\rangle \end{aligned}$$ #

แสดงว่า สัจพจน์ข้อ (1) เป็นจริง

(2) ให้ $s = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \langle p+q, s\rangle &= (a_0+b_0)c_0 + (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 \\ &= a_0c_0 + b_0c_0 + a_1c_1b + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 \\ &= (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + (b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2) \\ &= \langle p, s\rangle + \langle q, s\rangle \end{aligned}$$ #

แสดงว่า สัจพจน์ข้อ (2) เป็นจริง

(3) ให้ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \langle kp, q\rangle &= ka_0b_0 + ka_1b_1 + ka_2b_2 \\ &= k(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= k\langle p, q\rangle \end{aligned}$$

แสดงว่า สัจพจน์ข้อ (3) เป็นจริง

(4)
$$\begin{aligned} \langle p, p\rangle &= a_0a_0 + a_1a_1 + a_2a_2 \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\langle p, p\rangle > 0$ และ $\langle p, p\rangle = 0$ เมื่อ $p = 0$ เพราะฉะนั้นแสดงว่า สัจพจน์ข้อ (4) เป็นจริง →

ตัวอย่างที่ 8.2.5 ให้ $p = p(x)$ และ $q = q(x)$ เป็นสองฟังก์ชันพหุนาม (polynomial functions) ใน P_n และนิยามให้

$$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx \qquad \text{.........}(8.2.2)$$

ในเมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่คงค่า และ $a < b$ จงแสดงว่า สมการ (8.2.2) นิยามผลคูณภายในบน P_n

(1) $$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)dx = \int_a^b q(x)p(x)dx = \langle q, p\rangle \qquad \#$$

ซึ่งพิสูจน์ว่า สัจพจน์ข้อ (1) เป็นจริง

(2) $$\langle p+q, s\rangle = \int_a^b \big(p(x) + q(x)\big)s(x)dx$$

$$= \int_a^b p(x)s(x)dx + \int_a^b q(x)s(x)dx$$

$$= \langle p, s\rangle + \langle q, s\rangle \qquad \#$$

ซึ่งพิสูจน์ว่า สัจพจน์ข้อ (2) เป็นจริง

(3) $$\langle kp, q\rangle = \int_a^b kp(x)q(x)dx$$

$$= k\int_a^b p(x)q(x)dx$$

$$= k\langle p, q\rangle \qquad \#$$

ซึ่งพิสูจน์ว่า สัจพจน์ข้อ (3) เป็นจริง

(4) ถ้า $p = p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใด ๆ ใน P_n ดังนั้น $p^2(x) \geqslant 0$ สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้น

$$\langle p, p\rangle = \int_a^b p^2(x)dx \geqslant 0$$

เพราะว่า $p^2(x) \geqslant 0$ และ $p(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เพราะฉะนั้น $\int_a^b p^2(x)dx = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) = 0$ สำหรับทุก x ซึ่งสอดคล้องตามอสมการ $a \leqslant x \leqslant b$ ดังนั้น

$$(p.\ p) = \int_a^b p^2(x)dx = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } p = 0 \qquad \#$$

ซึ่งพิสูจน์ว่า สัจพจน์ข้อ (4) เป็นจริง

ถ้า u และ v ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน R^3 ดังนั้น $u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$ เมื่อ θ คือมุมระหว่าง u และ v (ดูหัวข้อ 6.3) ถ้ายกกำลังสองทั้งสองด้านของอสมการนี้ แล้วใช้ความสัมพันธ์ $\|u\|^2 = u \cdot u$, $\|v\|^2 = v \cdot v$ และ $\cos^2\theta \leqslant 1$ จะได้อสมการใหม่

$$(u \cdot v)^2 = (u \cdot u)\,(v \cdot v)$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงว่าอสมการนี้สามารถวางหลักของปริภูมิผลคูณภายใน ผลลัพธ์อสมการนี้เรียกว่า "อสมการโคชี-ชวาร์ซ (Cauchy – Schwarz inequality)" ซึ่งทำให้เราสามารถเข้าใจความหมายเบื้องต้นของความยาว (length) และมุม (angle) ในปริภูมิผลคูณภายในได้

ทฤษฎีบท 8.2.1 (อสมการโคชี–ชวาร์ซ)

ถ้า u และ v คือ เวกเตอร์ในปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้น

$$\boxed{\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle} \qquad \text{..........(8.2.3)}$$

พิสูจน์ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $u = 0$ ดังนั้น $\langle u, v\rangle = \langle u, u\rangle = 0$ ดังนั้นอสมการ (8.2.3) เป็นจริง

กรณีที่ 2 ถ้า $u \neq 0$ ให้ $a = \langle u, u\rangle$, $b = 2\langle u, v\rangle$ และ $c = \langle v, v\rangle$ และให้ t เป็นจำนวนจริง ใช้สัจพจน์ข้อ (4) ของผลคูณภายใน จะพบว่าผลคูณภายในของเวกเตอร์ใด ๆ กับตัวมันเอง จะมีค่าไม่ติดลบ (มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์) เสมอ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle (tu+v), (tu+v)\rangle &= \langle u, u\rangle t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \langle v, v\rangle \\ &= at^2 + 2bt + c \end{aligned}$$

ใช้สูตรกำลังสอง (quadratic formula) แก้สมการหาค่ารากของสมการกำลังสอง $at^2 + 2bt + c$ จะได้ค่า a, b และ c ในรูปของ u และ v ดังนี้

สมการ $at^2 + 2bt + c$ หาค่ารากได้เมื่อดิสคริมิแนนต์ (discriminant) $b^2 - 4ac \leqslant 0$ แทนค่า a, b และ c จะได้

$$4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle \langle v, v\rangle \leqslant 0$$

หรือเขียนใหม่จะได้อสมการ

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 8.2.6 ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ คือ สองเวกเตอร์ใด ๆ ใน

R^n ดังนั้น อสมการโคชี–ชวาร์ซประยุกต์กับ u และ v จะได้

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)^2 \leqslant (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$$

ซึ่งจะเรียกว่า "อสมการของโคชี (Cauchy's inequality)"

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงหา $\langle u, v \rangle$ โดยใช้ผลคูณภายใน $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ เมื่อ

   (ก) $u = (2, -1), \ v = (-1, 3)$ (ข) $u = (0, 0), \ v = (7, 2)$

   (ค) $u = (3, 1), \ v = (-2, 9)$ (ง) $u = (4, 6), \ v = (4, 6)$

2. จงหา $\langle U, V \rangle$ โดยใช้ผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

   เมื่อกำหนดให้

   (ก) $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   (ข) $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3. จงหา $\langle p, q \rangle$ โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่างที่ 8.2.4

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

   เมื่อกำหนดให้

   (ก) $p = -1 + 2x + x^2 \qquad q = 2 - 4x^2$

   (ข) $p = -3 + 2x + x^2 \qquad q = 2 + 4x - 2x^2$

4. ให้ $u = (u_1, u_2)$ และ $v = (v_1, v_2)$ จงแสดงว่าข้างล่างต่อไปนี้เป็นผลคูณภายในบน R^2

   (ก) $\langle u, v \rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$

   (ข) $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

5. ให้ $u = (u_1, u_2, u_3)$ และ $v = (v_1, v_2, v_3)$ จงแสดงว่า หัวข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นผลคูณภายในบน R^3 สำหรับข้อใดที่ไม่เป็นผลคูณภายใน จงบอกสัจพจน์ซึ่งทำให้ไม่เป็นจริง เมื่อกำหนดให้

   (ก) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

   (ข) $\langle u, v \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

   (ค) $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

   (ง) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

6. ให้ $p = p(x)$ และ $q = q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใน P_2 จงแสดงว่า

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

   เป็นผลคูณภายในบน P_2

7. จงแสดงว่า อสมการโคชี–ชวาร์ซเป็นจริงสำหรับ

(ก) $u = (2, 1)$ และ $v = (1, -3)$ โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่างที่ 8.2.2

(ข) $u = (2, 1, 5)$ และ $v = (1, -3, 4)$ โดยใช้ผลคูณภายในยูคลิเดียน

(ค) $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ และ $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่างที่ 8.2.3

(ง) $p = -1+2x+x^2$ และ $q = 2-4x^2$ โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่างที่ 8.2.4

8. ใช้ผลคูณภายใน

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

จงหาค่า $\langle p, q\rangle$ สำหรับเวกเตอร์ $p = p(x)$ และ $q = q(x)$ ใน P_3 เมื่อกำหนดให้

(ก) $p = 1-x+x^2+5x^3$ $\quad q = x-3x^2$

(ข) $p = x-5x^3$ $\quad q = 2+8x^2$

9. ใช้ผลคูณภายใน

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx$$

จงหาค่า $\langle f, g\rangle$ สำหรับเวกเตอร์ $f = f(x)$ และ $g = g(x)$ ใน $C[0, 1]$ เมื่อ

(ก) $f = \cos 2\pi x$ $\quad g = \sin 2\pi x$

(ข) $f = x$ $\quad g = e^x$

(ค) $f = \tan \frac{\pi x}{4}$ $\quad g = 1$

10. ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า

(ก) $\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int_0^1 f^2(x)dx\right]\left[\int_0^1 g^2(x)dx\right]$

(ข) $\left[\int_0^1 [f(x)+g(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_0^1 f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^1 g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

(**แนะนำ**: ใช้อสมการโคชี–ชวาร์ซและผลคูณภายในของแบบฝึกหัดข้อ 9)

8.3 ความยาวและมุมในปริภูมิผลคูณภายใน

(Length and angle in inner product spaces)

ในหัวข้อนี้จะใช้อสมการโคชี–ชวาร์ซ พัฒนาความคิดในเรื่องของความยาว ระยะทาง และมุมในปริภูมิผลคูณภายในทั่ว ๆ ไป

นิยาม 8.3.1 ถ้า V คือ ปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้นค่าประจำหรือความยาว (norm or length) ของเวกเตอร์ u เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|u\|$ และนิยามโดยสูตร

$$\boxed{\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{..........(8.3.1)}$$

และระยะทางระหว่างสองจุด (เวกเตอร์) u และ v เขียนแทนด้วย d(u, v) และนิยามโดยสูตร

$$\boxed{d(u, v) = \|u - v\| = \langle u - v, u - v\rangle^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{..........(8.3.2)}$$

ตัวอย่างที่ 8.3.1 ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ คือเวกเตอร์ R^n พร้อมด้วยผลคูณภายในยูคลิเดียน ดังนั้น

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

และ

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \langle u - v, u - v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต สูตรเหล่านี้ คือ สูตรหาค่าประจำยูคลิเดียนและระยะทาง ซึ่งได้อธิบายมาแล้วในหัวข้อ 8.1

ตัวอย่างที่ 8.3.2 กำหนดให้ R^2 มีผลคูณภายใน $\langle u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ ถ้า $u = (I, 0)$ และ $v = (0, 1)$ ดังนั้น

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

และ

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = (u - v, u - v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= ((I, -1), (I, -1)\rangle^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= [3(1)(1)+2(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 8.3.2 จะพบว่า ค่าประจำ (norm) และระยะทาง จะขึ้นอยู่กับผลคูณภายในที่ใช้ ถ้าผลคูณภายในเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นค่าประจำและระยะทางระหว่างเวกเตอร์จะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ตัวอย่างเช่น ถ้า R^2 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน ดังนั้นค่าประจำของเวกเตอร์ u ในตัวอย่างที่ 8.3.2 คือ 1 และระยะทางระหว่างเวกเตอร์ u และ v คือ $\sqrt{2}$

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ อ้างเหตุผลสนับสนุนบทนิยามของค่าประจำและระยะทางในปริภูมิผลคูณภายใน

ทฤษฎีบท 8.3.1 ถ้า V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้น ค่าประจำ $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ และระยะทาง $d(u, v) = \|u-v\|$ สอดคล้องทุก ๆ คุณสมบัติตามตาราง 8.3.1

ตาราง 8.3.1

คุณสมบัติพื้นฐานของความยาว	คุณสมบัติพื้นฐานของระยะทาง
L1. $\|u\| \geqslant 0$	D1. $d(u, v) \geqslant 0$
L2. $\|u\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = 0$	D2. $d(u, v) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u = v$
L3. $\|ku\| = \|k\| \|u\|$	D3. $d(u, v) = d(v, u)$
L4. $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ (อสมการสามเหลี่ยม)	D4. $d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$ (อสมการสามเหลี่ยม)

พิสูจน์ (เฉพาะ L4.) จากอสมการโคชี–ชวาร์ซ

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle \qquad \text{..........(8.3.3)}$$

เพราะว่า $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ และ $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$ ดังนั้น อสมการโคชี-ชวาร์ซ สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\langle u, v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2 \qquad \text{..........(8.3.4)}$$

ถอดรากที่สองทั้งสองด้าน

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \|v\| \qquad (8.3.5$$

จากนิยาม

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &\leqslant \langle u, u\rangle + 2|\langle u, v\rangle| + \langle v, v\rangle\end{aligned}$$

$$\leqslant \langle u, u\rangle + 2\|u\|\|v\| + \langle v, v\rangle \qquad \text{ตามสมการ (8.3.5)}$$
$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$
$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

ถอดรากที่สองอีกครั้งจะได้

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \qquad \#$$

สมมติให้ u และ v ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิผลคูณภายใน V อสมการโคชี–ชวาร์ซตามสมการ (8.3.4) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|}\right)^2 \leqslant 1$$

หรือสมมูลกับ

$$-1 \leqslant \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} \leqslant 1$$

เมื่อสรุปผลลัพธ์นี้ จะมีมุม θ เพียงค่าเดียว ซึ่ง

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} \quad \text{และ} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \qquad \text{..........(8.3.6)}$$

เรานิยาม θ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ u และ v สังเกตว่าใน R^2 หรือ R^3 กับผลคูณภายในยูคลิเดียน สมการ (8.3.6) ก็คือสูตรโคไซน์ของมุมระหว่างเวกเตอร์ (ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์) ทั้งสอง (ดูหัวข้อ 6.3 ในบทที่ 6)

ตัวอย่างที่ 8.3.3 จงหาโคไซน์ของมุม θ ระหว่างเวกเตอร์ $u = (4, 3, 1, -2)$ และ $v = (-2, 1, 2, 3)$ เมื่อปริภูมิเวกเตอร์คือ R^4 เมื่อเทียบกับผลคูณภายในยูคลิเดียน

วิธีทำ

$$\|u\| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}$$
$$\|v\| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$$

และ $\langle u, v\rangle = (4)(-2) + (3)(1) + (1)(2) + (-2)(3) = -9$

ดังนั้น แทนค่าใน (8.3.6) จะได้

$$\cos\theta = \frac{-9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = \text{d \&} = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$$

ตัวอย่างที่ 8.3.4 ถ้า $M_{2\times2}$ มีผลคูณภายในกำหนดให้ตามตัวอย่างที่ 8.2.3 ดังนั้น จงหามุม θ

ระหว่างเมตริกซ์

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{\|U\| \ \|V\|} = \frac{1(0)+0(2)+1(0)+1(0)}{\|U\| \ \|V\|} = 0$$

ดังนั้น $\theta = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

นิยาม 8.3.2 ในปริภูมิผลคูณภายใน สองเวกเตอร์ u และ v เรียกว่า "ตั้งฉากกัน (orthogonal)" ถ้า $\langle u, v\rangle = 0$ ต่อไปถ้า u ตั้งฉากกับเวกเตอร์แต่ละตัวในเซต W กล่าวได้ว่า u ตั้งฉากกับ W

ตัวอย่างที่ 8.3.5 กำหนดให้ผลคูณภายใน

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

และ $P = x, \ q = x^2$

วิธีทำ ดังนั้น

$$\|p\| = \langle p, p\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} xx\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-1}^{1} x^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \langle q, q\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-1}^{1} x^4 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p,\ q\rangle = \int_{-1}^{1} xx^2dx \quad = \quad \int_{-1}^{1} x^3dx \quad = \quad 0$$

เพราะว่า $\langle p, q\rangle = 0$ เวกเตอร์ $p = x$ และ $q = x^2$ ตั้งฉากกันสัมพันธ์กับผลคูณภายในที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 8.3.2 ทฤษฎีบททั่ว ๆ ไปของปีทาโกรัส (Generalized theorem of Pythagoras)

ถ้า u และ v เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกันในปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้น

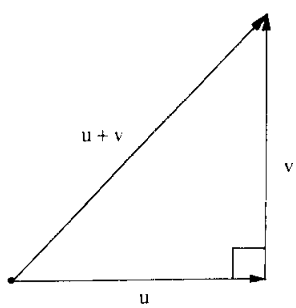
$$\|u+v\|^2 \quad = \quad \|u\|^2 + \|v\|^2$$

พิสูจน์

$$\|u+v\|^2 \quad = \quad \langle (u+v),\ (u+v)\rangle \quad = \quad \|u\|^2 + 2\langle u,\ v\rangle + \|v\|^2$$

$$= \quad \|u\|^2\ \|v\|^2$$

สังเกตว่า ใน R^2 หรือ R^3 กับผลคูณภายในยูคลิเดียน ทฤษฎีบทนี้จะลดรูปไปเป็นทฤษฎีบทปีทาโกรัสแบบธรรมดา ดูรูป 8.3.1



รูป 8.3.1

แบบฝึกหัด 8.3

1. ให้ R^2 มีผลคูณภายใน $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ ในเมื่อ $u = (u_1, u_2)$ และ $v = (v_1, v_2)$ จงหา $\|w\|$ เมื่อ

   (ก) $w = (-1, 3)$ (ข) $w = (6, 7)$

   (ค) $w = (0, 1)$ (ง) $w = (0, 0)$

2. ทำแบบฝึกหัดข้อ 1 ซ้ำ โดยใช้ผลคูณภายในยูคลิเดียนบน R^2

3. ให้ P_2 มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.4 จงหา $\|p\|$ เมื่อ

   (ก) $p = -1+2x+x^2$ (ข) $p = 3-4x^2$

4. ให้ $M_{2\times2}$ มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3 จงหา $\|A\|$ เมื่อ

   (ก) $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. ให้ R^2 มีผลคูณภายในตามแบบฝึกหัดข้อ 1 จงหา $d(x, y)$ เมื่อ

   (ก) $x = (-1, 2), \quad y = (2, 5)$ (ข) $x = (3, 9), \quad y = (3, 9)$

6. ทำแบบฝึกหัดข้อ 5 ซ้ำ โดยใช้ผลคูณภายในยูคลิเดียนบน R^2

7. ให้ P_2 มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.4 จงหา $d(p, q)$ เมื่อ $p = 2-x+x^2$ และ $q(x) = 1+5x^2$

8. ให้ $M_{2\times2}$ มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3 จงหา $d(A, B)$ เมื่อ

   (ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

   (ข) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. ให้ R^2, R^3 และ R^4 มีผลคูณภายในยูคลิเดียนในแต่ละส่วน จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง u และ v

   (ก) $u = (1, -3), \quad v = (2, 4)$

   (ข) $u = (-1, 0), \quad v = (3, 8)$

   (ค) $u = (-1, 5, 2), \quad v = (2, 4, -9)$

   (ง) $u = (4, 1, 8), \quad v = (1, 0, -3)$

   (จ) $u = (1, 0, 1, 0), \quad v = (-3, -3, -3, -3)$

   (ฉ) $u = (2, 1, 7, -1), \quad v = (4, 0, 0, 0)$

10. ให้ P_2 มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.4 จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง p และ q

(ก) $p = -1+5x+2x^2 \qquad q = 2+4x-9x^2$

(ข) $p = x-x^2 \qquad q = 7+3x+3x^2$

11. ให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3 จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง A และ B เมื่อ

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

12. ให้ R^3 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน จงหาค่าของ k ซึ่งทำให้ u และ v ตั้งฉากกัน

(ก) $u = (2, 1, 3) \qquad v = (1, 7, k)$

(ข) $u = (k, k, 1) \qquad v = (k, 5, 6)$

13. ให้ P_2 มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.4 จงแสดงว่า $p = 1-x+2x^2$ และ $q = 2x+x^2$ ตั้งฉากกัน

14. ให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3 จงแสดงว่าเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้ตั้งฉากกับเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(ก) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

15. ให้ R^4 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน จงหาสองเวกเตอร์ของค่าประจำ 1 ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ $u = (2, 1, -4, 0)$, $v = (-1, -1, 2, 2)$ และ $w = (3, 2, 5, 4)$

16. ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน จงแสดงว่าถ้า u และ v เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกันใน V ซึ่ง $\|u\| = \|v\| = 1$ ดังนั้น $\|u-v\| = \sqrt{2}$

17. ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน จงพิสูจน์เอกลักษณ์

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

สำหรับเวกเตอร์ใน V

18. ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใน จงพิสูจน์เอกลักษณ์

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

สำหรับเวกเตอร์ใน V

8.4 มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติและขบวนการกราม-ชมิดต์
(Orthonormal bases and Gram – Schmidt process)

นิยาม 8.4.1 เซตของเวกเตอร์ในปริภูมิผลคูณภายใน เรียกว่า "เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)" ถ้าทุกคู่ของเวกเตอร์ต่างกัน ในเซตตั้งฉากกัน เซตเชิงตั้งฉากซึ่งแต่ละเวกเตอร์มีขนาดหรือค่าประจำเป็น 1 เรียกว่า "เซตเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal set)"

ตัวอย่างที่ 8.4.1 ให้

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

เซต $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ถ้า R^3 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน เพราะว่า

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = 0$$

และ

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$$

ตัวอย่างที่ 8.4.2 ถ้า v ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้นคุณสมบัติ L3 ในตาราง 8.3.1 เวกเตอร์ $\frac{1}{\|v\|}v$ มีค่าประจำเป็น 1 เพราะว่า

$$\left\|\frac{1}{\|v\|}v\right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1$$

ขบวนการคูณเวกเตอร์ (ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์) กับส่วนกลับของความยาวของมัน จะได้เวกเตอร์ซึ่งมีค่าประจำเป็น 1 นี้ เรียกว่า "normalizing v"

ทฤษฎีบท 8.4.1 ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ คือ มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ สำหรับปริภูมิผลคูณภายใน V และ u คือเวกเตอร์ใด ๆ ใน V ดังนั้น

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

พิสูจน์ เพราะว่า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ u สามารถเขียนในรูป

$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$$

การพิสูจน์จะสมบูรณ์โดยการแสดงว่า $k_i = \langle u, v_i\rangle$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ พิจารณาแต่ละ v_i ใน S จะได้

$$\begin{aligned}(u, v_i\rangle &= \langle k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n, v_i\rangle \\ &= k_1\langle v_1, v,) + k_2\langle v_2, v_i\rangle + + k_n\langle v_n. v_i\rangle\end{aligned}$$

เพราะว่า $S = \{v_1, v_2, . ..) v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ดังนั้น

$\langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\|^2 = 1$ และ $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ ถ้า $j \neq i$

เพราะฉะนั้น สมการข้างบนเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายจะได้

$$(u. v_i\rangle = k_i$$

ตัวอย่างที่ 8.4.3 ให้

$$v_1 = (0, 1, 0),\ v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right),\ v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

จงแสดงว่า $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับ R^3 ด้วยผลคูณภายในยูคลิเดียน จงเขียนเวกเตอร์ $u = (1, 1, 1)$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

วิธีทำ จากนิยามผลคูณภายในยูคลิเดียน

$$\langle u, v_1\rangle = 1,\quad \langle u, v_2\rangle = -\frac{1}{5} \quad \text{และ} \quad \langle u, v_3\rangle = \frac{7}{5}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 8.4.1 จะได้

$$u = v_1 - \frac{1}{5}v_2 + \frac{7}{5}v_3$$

นั่นคือ

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

ประโยชน์ของทฤษฎีบท 8.4.1 จะถูกยกเลิกจากตัวอย่างนี้ ถ้า S ไม่เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ มันมีความจำเป็นต่อการแก้ระบบของสมการเพื่อที่จะเขียนเวกเตอร์ในพจน์ของมูลฐาน

ทฤษฎีบท 8.4.2 ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ (ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์) ในปริภูมิผลคูณภายใน ดังนั้น S เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

พิสูจน์ กำหนดให้

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n = 0 \qquad \text{..........(8.4.1)}$$

เพื่อแสดงว่า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง จะต้องพิสูจน์ว่า $k_1 = k_2 = . . . = k_n$

สำหรับแต่ละ v_i ใน S ใช้สมการ (8.4.1) ดังนั้น

$$\langle k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle = 0$$

หรือสมมูลกับ

$$k_1\langle v_1, v_i\rangle + k_2\langle v_2, v_i\rangle + \ldots + k_n\langle v_n, v_i\rangle = 0$$

เนื่องจาก S เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ดังนั้นตามนิยาม

$$\langle v_j, v_i\rangle = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad j \neq i$$

ดังนั้น สมการข้างบนลดรูปเป็น

$$k_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$$

เพราะค่าเวกเตอร์ใน S กำหนดว่า ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$ โดยสัจพจน์ข้อ (4) ของผลคูณภายใน เพราะฉะนั้น $k_i = 0$ เพราะว่าดรรชนีล่าง i เป็นค่าเจาะจง เพราะฉะนั้นจะได้ $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ ดังนั้น S เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง #

ตัวอย่างที่ 8.4.4 ในตัวอย่างที่ 8.4.3 ได้แสดงว่า

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{และ} \quad v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติเทียบกับผลคูณภายในยูคลิเดียนบน R^3 จากทฤษฎีบท 8.4.2 เวกเตอร์เหล่านี้เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น เพราะว่า R^3 เป็น 3 มิติ เพราะฉะนั้น $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ คือ มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติบน R^3

ทฤษฎีบท 8.4.3 ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ $\{v_1, v_2, \ldots, v_\gamma\}$ คือ เซตเชิงตั้งฉากปกติของเวกเตอร์ใน V ถ้า W แทนปริภูมิซึ่งแผ่ทั่วโดย $v_1, v_2, \ldots, v_\gamma$ ดังนั้นทุก ๆ เวกเตอร์ u ใน V สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$u = w_1 + w_2$$

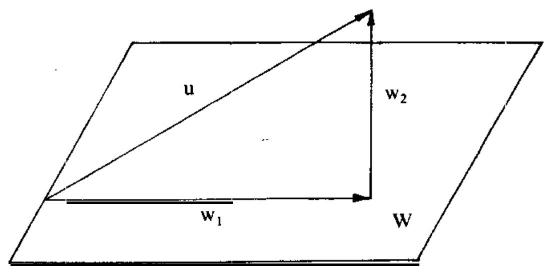
ในเมื่อ w_1 อยู่ใน W และ w_2 ตั้งฉากกับ W โดยกำหนดให้

$$w_1 = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \ldots + \langle u, v_\gamma\rangle v_\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots.(8.4.2)$$

และ

$$w_2 = u - \langle u, v_1\rangle v_1 - \langle u, v_2\rangle v_2 - \ldots - \langle u, v_\gamma\rangle v_\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots.(8.4.3)$$

(ดูรูป 8.4.1 ซึ่งแสดงใน R^3)



รูปที่ 8.4.1

ตามรูป 8.4.1 จะเรียก w_1 ว่าโพรเจกชันเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ u บน W และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{proj}_W\, u$ เวกเตอร์ $w_2 = u - \text{proj}_W\, u$ เรียกว่า ส่วนประกอบ (component) ของ u ตั้งฉากกับ W

ตัวอย่างที่ 8.4.5 ให้ R^3 มีผลคูณภายใน และให้ W เป็นปริภูมิย่อย แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์เชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal vectors)

$$v_1 = (0, 1, 0) \quad \text{และ} \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$$

โพรเจกชันเชิงตั้งฉากของ $u = (1, 1, 1)$ บน W คือ

$$\begin{aligned}
\text{proj}_W\, u &= \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 \\
&= (1)(0,1,0) + \left|1\left(-\frac{4}{5}\right) + 1(0) + 1\left(\frac{3}{5}\right)\right|\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\
&= (0,1,0) + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\
&= (0,1,0) + \left(\frac{4}{25}, 0, -\frac{3}{25}\right) \\
&= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right)
\end{aligned}$$

ส่วนประกอบของ u ซึ่งตั้งฉากกับ W คือ

$$\begin{aligned}
u - \text{proj}_W\, u &= (1,1,1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \\
&= \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)
\end{aligned}$$

สังเกตว่า $u - \text{proj}_W\, u$ ตั้งฉากกับ v_1 และ v_2 ด้วย ดังนั้นเวกเตอร์นี้ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ในปริภูมิ W แผ่ทั่วโดย v_1 และ v_2

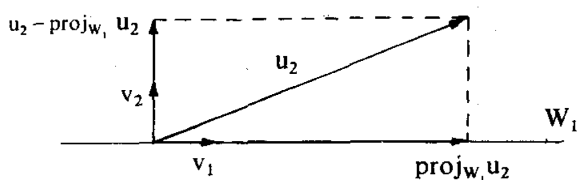
ทฤษฎีบท 8.4.4 ทุก ๆ ปริภูมิผลคูณภายในซึ่งเวกเตอร์ไม่ใช่ศูนย์และมีมิติจำกัดจะมีมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ

พิสูจน์ ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในซึ่งเวกเตอร์ใด ๆ ไม่เป็นศูนย์ และมีมิติเป็น n และให้ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ คือมูลฐานใด ๆ ของ V ลำดับขั้นต่อไปนี้จะทำให้เกิดมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ สำหรับ V

ขั้นที่ 1 ให้ $v_1 = u_1/\|u_1\|$ นั่นคือ เวกเตอร์ v_1 มีค่าประจำ (norm) เป็น 1

ขั้นที่ 2 สร้างเวกเตอร์ v_2 ให้มีค่าประจำเป็น 1 นั่นคือ ตั้งฉากกับ v_1 คำนวณส่วนประกอบของ u_2 ตั้งฉากกับปริภูมิ W_1 แผ่ทั่วโดย v_1 และนอร์แมลไลซ์ (normalize) เวกเตอร์นี้ นั่นคือ

$$v_2 = \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2}{\|u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1\|}$$



รูป 8.4.2

ตามรูป 8.4.2 ถ้า $u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = 0$ ดังนั้น จะไม่สามารถนอร์แมลไลซ์เวกเตอร์นี้ได้ แต่กรณีนี้จะไม่เกิดขึ้นเพราะว่า ถ้าเรามีเวกเตอร์

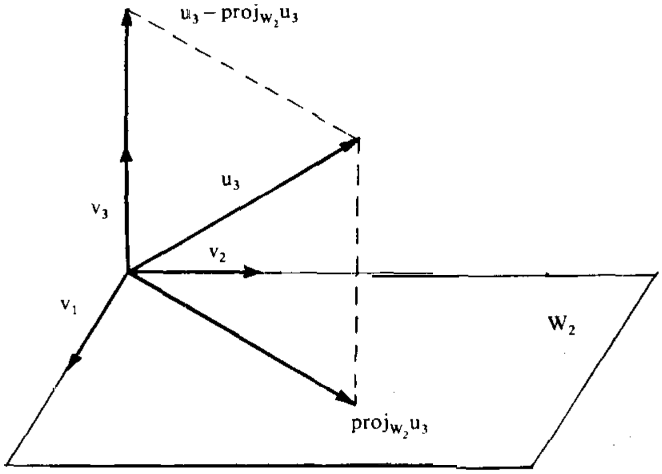
$$u_2 = \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|u_1\|} u_1$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า u_2 คือผลคูณของ u_1 และจะขัดแย้งกับการเป็นอิสระต่อกันในตัวเองของมูลฐาน $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ดังนั้น $u_2 - \langle u_2\ v_1\rangle v_1 \neq 0$ และสามารถนอร์แมลไลซ์ได้

ขั้นที่ 3 สร้างเวกเตอร์ v_3 ซึ่งมีค่าประจำเป็น 1 นั่นคือตั้งได้ฉากกับ v_1 และ v_2 คำนวณส่วนประกอบของ u_3 ตั้งฉากกับปริภูมิ W_2 ซึ่งแผ่ทั่วโดย v_1 และ v_2 และนอร์แมลไลซ์เวกเตอร์นี้ (ดูรูป 8.4.3) นั่นคือ

$$v_3 = \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3\|} = \frac{u_3 - \langle u_3 - v_1\rangle v_1 - \langle u_3 - v_2\rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3 - v_1\rangle v_1 - \langle u_3 - v_2\rangle v_2\|}$$

เหมือนในขั้นที่ 2 การเป็นอิสระต่อกันในตัวเองของ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ประกันได้ว่า $u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 \neq 0$ ดังนั้น สามารถนอร์แมลไลซ์ (พิสูจน์เอง)



รูป 8.4.3

ขั้นที่ 4 หาเวกเตอร์ v_4 ซึ่งมีค่าประจำเป็น 1 นั่นคือ ตั้งฉากกับ v_1; v_2 และ v_3 คำนวณส่วนประกอบของ u_4 ตั้งฉากกับปริภูมิ W_3 ซึ่งแผ่ทั่วโดย v_1, v_2 และ v_3 และนอร์-แมลไลซ์เวกเตอร์นี้ ดังนั้น

$$v_4 = \frac{u_4 - \text{proj}_{W_3}u_4}{\|u_4 - \text{proj}_{W_3}u_4\|}$$

$$= \frac{u_4 - \langle u_4, v_1\rangle v_1 - \langle u_4 - v_2\rangle v_2 - \langle u_4 - v_3\rangle v_3}{\|u_4 - \langle u_4 - v_1\rangle v_1 - \langle u_4 - v_2\rangle v_2 - \langle u_4 - v_3\rangle v_3\|}$$

ทำอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้เซตเชิงตั้งฉากปกติของเวกเตอร์ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เพราะว่า V เป็น n – มิติ และทุก ๆ เซตเชิงตั้งฉากปกติเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น เซต $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ จะเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับ V #

แต่ละขั้นข้างต้นสามารถใช้แปลงสำหรับมูลฐานเจาะจงไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ เรียกว่า "ขบวนการกราม–ชมิดต์ (Gram – Schmidt process)" ขบวนการกราม–ชมิดต์สามารถแสดงว่า แต่ละขั้นในขบวนการนี้เวกเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับปริภูมิย่อย ซึ่งแผ่ทั่วโดย $u_1, u_2, \ldots, u_n$

ตัวอย่างที่ 8.4.6 พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ R^3 กับผลคูณภายในยูคลิเดียน ใช้ขบวนการกราม–ชมิดต์แปลงมูลฐาน $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ และ $u_3 = (0, 0, 1)$ ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 $\quad v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ขั้นที่ 2 $\quad u_2 \quad \text{proj}_{W_1}u_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1$

$$= (0,1,1) - \left[0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\left\|u_2 - \text{proj}_{W_1}u_2\right\| = \left\|\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ดังนั้น

$$v_2 = \frac{u_2 - \text{proj}_{W_1}u_2}{\|u_2 \quad \text{proj}_{W_1}u_2\|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{6}/3}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

ขั้นที่ 3

$$u_3 - \text{proj}_{W_2}u_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, 0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\|u_3 - \text{proj}_{W_2}u_3\| = \left\|\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\|$$

$$= \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น

$$v_3 = \frac{u_3 - \text{proj}_{W_2}u_3}{\|u_3 - \text{proj}_{W_2}u_3\|} = \frac{\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2}\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ดังนั้น

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad v_3 = \left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

เป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับ R^3

แบบฝึกหัด 8.4

1. ให้ R^2 มีผลคูณภายใน ข้อใดต่อไปนี้จัดเป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

(ก) $(1, 0), (0, 2)$ (ข) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(ค) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ง) $(1, 0), (0, 0)$

2. ให้ R^3 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน ข้อใดต่อไปนี้จัดเป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

(ก) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(ข) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(ค) $(1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 0, 1)$

(ง) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

3. ให้ P_2 มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.4 ข้อใดต่อไปนี้จัดเป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

(ก) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2,\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2$

(ข) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, x^2$

4. ให้ $M_{2\times 2}$ มีผลคูณภายในตามตัวอย่างที่ 8.2.3 ข้อใดต่อไปนี้จัดเป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ

(ก) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(ข) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. ให้ $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ และ $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$

จงแสดงว่า $\{x, y\}$ คือ เซตเชิงตั้งฉากปกติ ถ้า R^2 มีผลคูณภายใน $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ แต่ไม่เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ถ้า R^2 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน

6. จงแสดงว่า

$u_1 = (1, 0, 0, 1),\ u_2 = (-1, 0, 2, 1),\ u_3 = (2, 3, 2, -2)$ และ $u_4 = (-1, 2, -1, 1)$

คือเซตเชิงตั้งฉากใน R^4 เมื่อเทียบกับผลคูณภายในยูคลิเดียน โดยการนอร์แมลไลซ์ เวกเตอร์เหล่านี้จะได้เซตของเวกเตอร์เชิงตั้งฉากปกติ

7. ให้ R^2 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน ใช้ขบวนการกราม–ชมิดต์แปลงมูลฐาน $\{u_1, u_2\}$ ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ เมื่อ

   (ก) $u_1 = (1, -3), \quad u_2 = (2, 2)$

   (ข) $u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (3, -5)$

8. ให้ R^3 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน ใช้ขบวนการกราม–ชมิดต์แปลงมูลฐาน $\{u_1, u_2, u_3\}$ ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ เมื่อ

   (ก) $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 2, 1)$

   (ข) $u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (3, 7, -2), \quad u_3 = (0, 4, 1)$

9. ให้ R^4 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน ใช้ขบวนการกราม–ชมิดต์แปลงมูลฐาน $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ เมื่อ

   $u_1 = (0, 2, 1, 0), \quad u_2 = (1, -1, 0, 0), \quad u_3 = (1, 2, 0, -1), \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$

10. ให้ R^3 มีผลคูณภายในยูคลิเดียน จงหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติสำหรับปริภูมิย่อย ซึ่งแผ่ทั่วโดย $(0, 1, 2), (-1, 0, 1)$

11. ให้ R^3 มีผลคูณภายใน $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ ใช้ขบวนการกราม–ชมิดต์แปลง

    $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0)$ และ $u_3 = (1, 0, 0)$

    ไปเป็นมูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ

คำศัพท์ใหม่

Euclidean space	ปริภูมิยูคลิเดียน	8.1
Euclidean inner product	ผลคูณภายในยูคลิเดียน	8.1
Euclidean norm	ค่าประจำยูคลิเดียน	8.1
inner product space	ปริภูมิผลคูณภายใน	8.2
orthogonal set	เซตเชิงตั้งฉาก	8.4
orthonormal set	เซตเชิงตั้งฉากปกติ	8.4
orthonormal basis	มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติ	8 . 4
orthogonal projection	โพรเจกชันเชิงตั้งฉาก	8.4
component	ส่วนประกอบ	8.4