บทที่ 7
ปริภูมิเวกเตอร์

บทที่ 7
ปริภูมิเวกเตอร์
(Vector spaces)

7.1 ปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย (Vector spaces and subspaces)

นิยาม 7.1.1 **ปริภูมิเวกเตอร์จริง** (real vector space) **คือ เซต V ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และมีการดำเนินการ 2 แบบคือ $\oplus$ และ $\odot$ นิยามตามคุณสมบัติต่อไปนี้**

(ก) ถ้า α และ β คือ สมาชิกใด ๆ ใน V ดังนั้น $\alpha\oplus\beta$ อยู่ใน V (นั่นคือ V ปิดภายใต้การดำเนินการบวก $\oplus$)

(1) $\alpha\oplus\beta = \beta\oplus\alpha$ สำหรับทุก ๆ α, β ใน V

(2) $\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma) = (\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma$ สำหรับทุก ๆ α, β, γ ใน V

(3) จะมีสมาชิก θ เพียงตัวเดียวเท่านั้นใน V ซึ่ง $\alpha\oplus\theta = \theta\oplus\alpha = \alpha$ สำหรับ α ใด ๆ ใน V

(4) สำหรับแต่ละ α ใน V จะมี β เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $\alpha\oplus\beta = \beta\oplus\alpha = \theta$ และจะแทน β ด้วย $-\alpha$ และเรียก β ว่า นิเสธของ α

(ข) ถ้า α เป็นสมาชิกใด ๆ ใน V และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น $c\odot\alpha$ อยู่ใน V (นั่นคือ V ปิดภายใต้การคูณด้วยสเกลาร์)

(5) $c\odot(\alpha\oplus\beta) = c\odot\alpha\oplus c\odot\beta$ สำหรับ α, β ใด ๆ ใน V และจำนวนจริง c ใด ๆ

(6) $(c+d)\odot\alpha = c\odot\alpha\oplus d\odot\alpha$ สำหรับ α ใด ๆ ใน V และจำนวนจริง c และ d ใด ๆ

(7) $c\odot(d\odot\alpha) = (cd)\odot\alpha$ สำหรับ α ใด ๆ ใน V และจำนวนจริง c และ d ใด ๆ

(8) $1\odot\alpha = \alpha$ สำหรับ α ใด ๆ ใน V

สมาชิกของ V เรียกว่า "เวกเตอร์ (vectors)" สมาชิกของ R เรียกว่า "สเกลาร์ (scalars)" การดำเนินการ $\oplus$ เรียกว่า "การบวกเวกเตอร์ (vector addition)" และเรียกการ

ดำเนินการ $\odot$ ว่า "การคูณสเกลาร์ (scalar multiplication) เวกเตอร์ θ เรียกว่า "เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)"

ตัวอย่างที่ 7.1.1 พิจารณา $R_{n\times 1}$ แทนเซตของทุก ๆ เมตริกซ์จริงขนาด $n\times 1$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนจริง ให้การดำเนินการ $\oplus$ คือการบวกเมตริกซ์ และให้การดำเนินการ $\odot$ คือ การคูณของเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง

โดยใช้คุณสมบัติของเมตริกซ์ในหัวข้อ 1.2 ไม่เป็นการยากที่จะแสดงว่า $R_{n\times 1}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) โดยพิสูจน์ว่า คุณสมบัติของนิยาม 7.1.1 เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7.1.2 **ให้** $R_{1\times n}$ **คือ** เซตของทุก ๆ เมตริกซ์จริงขนาด 1 xn [a, a_2 . . . a,] **ในเมื่อ** เรานิยามการดำเนินการ $\oplus$ เป็น

$$[a_1\ a, \ .\ .\ a,] \oplus [b,\ b_2\ .\ .\ b,] = [a_1+b_1\ a_2+b_2\ .\ .\ .\ a_n+b_n]$$

และนิยามการดำเนินการ $\odot$ เป็น

$$c\odot[a_1\ \ a_2\ \ .\ \ a,] = [ca_1\ ca_2\ .\ .\ .\ ca,]$$

ดังนั้น $R_{1\times n}$ คือ ปริภูมิเวกเตอร์

พิสูจน์ กำหนดให้

$$A = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n] \quad \text{อยู่ใน } R_{1\times n}$$

$$B = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n] \quad \text{อยู่ใน } R_{1\times n}$$

และ $$C = [c_1\ c_2\ \dots\ c_n] \quad \text{อยู่ใน } R_{1\times n}$$

c และ d เป็นสเกลาร์ นั่นคือ $c, d \in R$

(1) $$A\oplus B = [a,\ a_2\ .\ .\ .\ a,] \oplus [b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b,]$$
$$= [a_1+b_1\ a_2+b_2\ .\ .\ .\ a_n+b_n]$$

เพราะว่า a_i+b_i เมื่อ i = I, 2, ... n **คือ จำนวนจริง ดังนั้น** $A\oplus B \in R_{1\times n}$ **และ** $a_i+b_i = b_i+a_i$ **เพราะฉะนั้น**

$$A\oplus B = [b_1+a_1\ b_2+a_2\ .\ .\ .\ b_n+a_n]$$
$$= [b_1\ b_2\ .\ .\ .\ b_n]\oplus[a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a,,]$$
$$= B\oplus A$$

#

(2) $A \oplus (B \oplus C) = [a, \ a_2 \ a_n] \oplus \{[b_1 \ b_2 \ b_n] \oplus [c_1 \ c_2 \ . \ . \ . \ c_n]\}$

$= [a_1 \quad a_2 \quad a,] \oplus [b_1 + c_1 \quad b_2 + c_2 \quad b_n + c_n]$

$= [a_1 + (b_1 \ + c_1) \quad a_2 + (b_2 + c_2) \quad a_n + (b_n + c_n)]$

เพราะว่า a_i, b_i และ c_i เมื่อ i = 1, 2, ..., n เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น อาศัยคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative property)

$$a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i$$

ดังนั้น $A \oplus (B \oplus C) = [(a_1 + b_1) + c_1 \quad (a_2 + b_2) + c_2 \quad (a_n + b_n) + c_n]$

$= [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ . \ a_n + b_n] \oplus [c_1 \ c_2 \ . \ . \ . \ c_n]$

$= (A \oplus B) \oplus C$ #

(3) ในปัญหาข้อนี้ $\theta = [0 \ 0 \ . \ . \ . \ 0]_{1 \times n}$ ดังนั้น

$A \oplus \theta = \theta \oplus A$ ตามคุณสมบัติข้อ I

$= [0 \quad 0 \quad 0] \oplus [a_1 \quad a, \quad a,/$

$= [0 + a_1 \quad 0 + a_2 \quad 0 + a_n]$

$= [a_1 \quad a_2 \quad a_n]$

$= A$ #

(4) เพราะว่านิเสธของ A คือ -A เพราะฉะนั้น

$A @ (-A) = [a, \ a_2 \ . \ . \ . \ a_n] \oplus [-a_1 \ -a_2 \ -a_n]$

$= /a,+(-a,) \ a_2 + (-a_2) \ . \ . \ . \ a_n + (-a_n)]$

$= [0 \ 0 \ . \ . \ . \ o]$

$= \theta$

จากนิยามการดำเนินการ $\odot$

$$cA = [ca_1 \ ca_2 \ . \ . \ . \ ca,]$$

เพราะว่า ca_i เมื่อ i = I, 2, ... n เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น $cA \in R_{1 \times 2}$ ดังนั้น

(5) $c \odot (A \oplus B) = c \odot [a_1 + b_1 \ \ a_2 + b_2 \ \ . \ \ a_n + b_n]$

$= [c(a_1 + b_1) \ c(a_2 \ t \ b_2) \ c(a_n + b,)]$

$= [ca, + cb_1 \ ca_2 + cb_2 \ . \ . \ . \ ca_n + cb_n]$

$= [ca_1 \ ca_2 \ . \ . \ . \ ca,] \oplus [cb_1 \ cb_2 \ . \ . \ . \ cb,]$

$= c \odot [a_1 \ a_2 \ . \ . \ . \ a,] \oplus c[b_1 \ b_2 \ . \ . \ . \ b_n]$

$= c \odot A \oplus c \odot B$

(6) $(c+d)\odot A = (c+d) \odot [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n]$

$= [(c+d)a_1 \; (c+d)a_2 \; (c+d)a_n]$

$= [ca, + da, \; ca, + da, \; . \; ca, + da,]$

$= [ca_1 \; ca_2 \dots ca_n] \oplus [da, \; da_2 \dots da,]$

$= c\odot[a_1 \; a_2 \; . \; . \; . \; a,] \oplus d[a_1 \; a, \; a,,]$

$= c\odot A \oplus d\odot A$ #

(7) $c\odot(d\odot A) = c\odot[da_1 \; da, \; . \; . \; da,]$

$= [c \, d \, a, \; cda_2 \; cda_n]$

$= (cd)\odot[a_1 \, a_2 \dots a,]$

$= (cd)\odot A$ #

(8) $1\odot A = 1\odot[a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n]$

$= [1\cdot a_1 \; 1\cdot a_2 \; \dots \; 1\cdot a_n]$

$= [a_1 \, a_2 \dots a_n]$

$= A$ #

ข้อสังเกต สัญลักษณ์ $R_{m\times n}$ แทนเซตของทุก ๆ เมตริกซ์จริงขนาด $m\times n$

ตัวอย่าง 7.1.3 กำหนดให้ฟังก์ชันพหุนามในรูปตัวแปร t คือ ฟังก์ชันซึ่งสามารถเขียนในรูป

$$P(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$$

เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_n$ คือ จำนวนจริง ถ้า $a_0 \neq 0$ ดังนั้น p(t) มีระดับขั้น n เพราะฉะนั้น ระดับขั้นของฟังก์ชันพหุนามคือ กำลังสูงสุดของพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ

$3t^2 - 5t + 11$ มีระดับขั้น 2

$2t + 1$ มีระดับขั้น 1

3 มีระดับขั้น 0

ฟังก์ชันพหุนามศูนย์ (zero polynomial) นิยามเป็น

$$(0)t^n + (0)t^{n-1} + \dots + (0)t + 0$$

ถือว่าไม่มีระดับขั้น ต่อไปจะกำหนดให้ P_n แทนเซตของทุก ๆ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $\leqslant n$ รวมทั้งฟังก์ชันพหุนามศูนย์ ถ้ากำหนดให้

$$p(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$$

และ $\quad q(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \ldots + b_{n-1}t + b_n$

เมื่อนิยาม $p(t)\oplus q(t)$ เป็น

$$p(t)\oplus q(t) = (a_0+b_0)t^n + (a_1+b_1)t^{n-1} + \ldots + (a_{n-1}+b_{n-1})t + (a_n+b_n)$$

และนิยาม $c\odot p(t)$ เป็น

$$c\odot p(t) = (ca_0)t^n + (ca_1)t^{n-1} + \ldots + (ca_{n-1})t + (ca_n)$$

เมื่อ c เป็นสเกลาร์ $(c \in R)$

ดังนั้น ต่อไปจะพิสูจน์ได้ว่า P_n เป็นปริภูมิเวกเตอร์

พิสูจน์ ให้ p(t) และ q(t) ตามนิยามข้างต้นเป็นสมาชิกของ P_n นั่นคือ p(t) และ q(t) เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $\leqslant n$ หรือฟังก์ชันพหุนามศูนย์ ดังนั้น จากนิยามข้างต้นของการดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$ แสดงว่า $p(t)\oplus q(t)$ และ $c\odot p(t)$ สำหรับสเกลาร์ใด ๆ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $\leqslant n$ หรือฟังก์ชันพหุนามศูนย์ นั่นคือ $p(t)\oplus q(t)$ และ $c\odot p(t)$ อยู่ใน P_n ดังนั้น (ก) และ (ข) ในนิยาม 7.1.1 เป็นจริง เพื่อพิสูจน์คุณสมบัติข้อ (1) ให้สังเกตว่า

$$q(t)\oplus p(t) = (b_0+a_0)t^n + (b_1+a_1)t^{n-1} + \ldots + (b_{n-1}+a_{n-1})t + (b_n+a_n)$$

และเพราะว่า $a_i+b_i = b_i+a_i$ เป็นจริง เมื่อ a_i และ b_i เป็นจำนวนจริง ดังนั้นสรุปได้ว่า

$$p(t)\oplus q(t) = q(t)\oplus p(t) \qquad \#$$

(2) ให้ $\quad \gamma(t) = c_0t^n + c_1t^{n-1} + \ldots + c_{n-1}t + c_n$

ในเมื่อ $c_0, c_1, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริง และ $\gamma(t) \in P_n$ดังนั้น

$$\begin{aligned} p(t)\oplus[q(t)\oplus\gamma(t)] &= (a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n) \oplus \\ &\quad [(b_0+c_0)t^n + (b_1+c_1)t^{n-1} + \ldots + (b_{n-1}-c_{n-1})t \\ &\quad + (b_n+c_n)] \\ &= \{a_0+(b_0+c_0)\}t^n + \{a_1+(b_1+c_1)\}t^{n-1} \\ &\quad + \ldots + \{a_{n-1}+(b_{n-1}+c_{n-1})\}t + \{a_n+(b_n+c_n)\} \end{aligned}$$

แต่ a_i, b_i และ c_i เป็นจำนวนจริง ดังนั้นอาศัยคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มจะได้

$$a_i+(b_i+c_i) = (a_i+b_i)+c_i \ ; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} p(t)\oplus[q(t)\oplus\gamma(t)] &= \{(a_0+b_0)+c_0\}t^n + \{(a_1+b_1)+c_1\}t^{n-1} \\ &\quad + \ldots + \{(a_{n-1}+b_{n-1})+c_{n-1}\}t + \{(a_n+b_n)+c_n\} \end{aligned}$$

$$= \left[(a_0+b_0)t^n+(a_1+b_1)t^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1})t + (a_n+b_n)\right] \oplus (c_0t^n+c_1t^{n-1}+\ldots+c_{n-1}t+c_n)$$

$$= [p(t)\oplus q(t)] \oplus \gamma(t) \qquad \#$$

(3) ฟังก์ชันพหุนามศูนย์ คือสมาชิก θ ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในคุณสมบัติข้อ (3) นิยามเป็น

$$\theta = (0)t^n+(0)t^{n-1}+\ldots+(0)t+0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} p(t)\oplus\theta &= (a_0+0)t^n+(a_1+0)t^{n-1}+\ldots+(a_{n-1}+0)t+(a_n+0) \\ &= a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n \\ &= p(t) \end{aligned}$$

และ $p(t)\oplus\theta = \theta\oplus p(t)$ ตามคุณสมบัติข้อ (1)

เพราะฉะนั้น

$$p(t)\oplus\theta = \theta\oplus p(t) = p(t). \qquad \#$$

(4) ถ้า $p(t)$ กำหนดตามข้างต้น ดังนั้นนิเสธของ $p(t)$ คือ $-p(t)$ ซึ่งนิยามเป็น

$$-p(t) = -a_0t^n-a_1t^{n-1}-\ldots-a_{n-1}t-a_n$$

ดังนั้น

$$p(t)\oplus[-p(t)] = \theta \qquad \#$$

(5)

$$\begin{aligned} c\odot[p(t)\oplus q(t)] &= c\odot\left[(a_0+b_0)t^n+(a_1+b_1)t^{n-1}+\ldots + (a_{n-1}+b_{n-1})t+(a_n+b_n)\right] \\ &= c(a_0+b_0)t^n+c(a_1+b_1)t^{n-1}+\ldots + c(a_{n-1}+b_{n-1})t+c(a_n+b_n) \\ &= ca_0t^n+cb_0t^n+ca_1t^{n-1}+cb_1t^{n-1}+\ldots + ca_{n-1}t+cb_{n-1}t+ca_n+cb_n \\ &= ca_0t^n+ca_1t^{n-1}+\ldots+ca_{n-1}t+ca_n) + (cb_0t^n+cb_1t^{n-1}+\ldots+cb_{n-1}t+cb_n) \\ &= c(a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n) + c(b_0t^n+b_1t^{n-1}+\ldots+b_{n-1}t+b_n) \\ &= c\odot p(t) \oplus c\odot q(t) \qquad \# \end{aligned}$$

(6) ให้ c และ d เป็นสเกลาร์ (c และ d $\in$ R) ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
(c+d)\odot p(t) &= (c+d)a_0t^n + (c+d)a_1t^{n-1} + + (c+d)a_{n-1}t + (c+d)a_n \\
&= ca_0t^n + da_0t^n + ca_1t^{n-1} + da_1t^{n-1} + \ldots \\
&\quad + ca_{n-1}t + da_{n-1}t + ca_n + da_n \\
&= ca_0t^n + ca_1t^{n-1} + \ldots + ca_{n-1}t + ca_n \\
&\quad + da_0t^n + da_1t^{n-1} + \ldots + da_{n-1}t + da_n \\
&= c(a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n) \\
&\quad + d(a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n) \\
&= c\odot p(t) \oplus d\odot p(t) \qquad \#
\end{aligned}
$$

(7)
$$
\begin{aligned}
c\odot[d\odot p(t)] &= c\odot[da_0t^n + da_1t^{n-1} + \ldots + da_{n-1}t + da_n] \\
&= [cda_0t^n + cda_1t^{n-1} + + cda_{n-1}t + cda_n] \\
&= (cd)\ (a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n) \\
&= (cd)\odot p(t)
\end{aligned}
$$

(8)
$$
\begin{aligned}
1\odot p(t) &= 1\odot(a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n) \\
&= (1)a_0t^n + (1)a_1t^{n-1} + \ldots + (1)a_{n-1}t + (1)a_n \\
&= a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n \\
&= p(t) \qquad \#
\end{aligned}
$$

จากการพิสูจน์ข้อ 1 – 8 สอดคล้องตามนิยาม 7.1.1 ดังนั้นกล่าวได้ว่า P_n เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่างที่ 7.1.4 ให้ V แทนเซตของทุก ๆ จำนวนจริง และการดำเนินการ $\alpha\oplus\beta = \alpha-\beta$ ($\oplus$ คือการลบธรรมดา) และ $c\odot\alpha = c\alpha$ ($\odot$ คือการคูณธรรมดา) จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้า V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ คุณสมบัติข้อไหนในนิยาม 7.1.1 ที่ไม่เป็นจริง

วิธีทำ ถ้า α และ β อยู่ใน V และ c เป็นสเกลาร์ ดังนั้น $\alpha\oplus\beta$ และ $c\odot\alpha$ อยู่ใน V ดังนั้น ข้อ (ก) และข้อ (ข) ในนิยาม 7.1.1 เป็นจริง อย่างไรก็ตามคุณสมบัติข้อ (1) ไม่เป็นจริงเพราะว่า

$$\alpha\oplus\beta = \alpha-\beta$$

และ

$$\beta\oplus\alpha = \beta-\alpha$$

โดยวิธีเดียวกัน ผู้อ่านสามารถแสดงได้ว่าคุณสมบัติข้อ (2), (3) และ (4) ไม่จริง คุณสมบัติข้อ (5), (7) และ (8) เป็นจริง แต่คุณสมบัติข้อ (6) ไม่จริง เพราะว่า

$$(c+d)\odot\alpha = (c+d)\alpha = c\alpha + d\alpha$$

ในขณะที่

$$c\odot\alpha\oplus d\odot\alpha = c\alpha\oplus d\alpha = c\alpha - d\alpha$$

เพราะฉะนั้น V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่างที่ 7.1.4 ให้ V แทนเซตของทุก ๆ การเรียงสามอันดับของจำนวนจริง (x, y, z) และการดำเนินการ

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y+y', z+z')$$

และ

$$c\odot(x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้า V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ คุณสมบัติข้อไหนในนิยาม 7.1.1 ที่ไม่เป็นจริง

วิธีทำ เป็นเรื่องง่ายที่จะแสดงว่าคุณสมบัติข้อ (1), (3), (4) และ (6) ของนิยาม 7.1.1 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\alpha = (x, y, z)$ และ $\beta = (x', y', z')$ ดังนั้น

$$\alpha\oplus\beta = (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y+y', z+z')$$

ในขณะที่

$$\beta\oplus\alpha = (x', y', z') \oplus (x, y, z) = (x, y'+y, z'+z)$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ (1) ไม่จริง และ

$$\begin{aligned}(c+d)\odot\alpha &= (c+d)\odot(x, y, z)\\ &= ((c+d)x, (c+d)y, (c+d)z)\end{aligned}$$

ในขณะที่

$$\begin{aligned}c\odot\alpha \oplus d\odot\alpha &= c\odot(x, y, z) \oplus d\odot(x, y, z)\\ &= (cx, cy, cz) \oplus (dx, dy, dz)\\ &= (dx, cy+dy, cz+dz)\end{aligned}$$

ดังนั้น คุณสมบัติข้อ (6) ไม่จริง เพราะฉะนั้น V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ข้อสังเกต เพื่อแสดงว่าเซตที่กำหนดให้ V และการดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริง จะต้องแสดงว่า V สอดคล้องทุกคุณสมบัติในนิยาม 7.1.1 สิ่งแรกที่ควรตรวจสอบคือ ข้อ (ก) และข้อ (ข) เป็นจริง ถ้าข้อหนึ่งข้อใดใน 2 ข้อดังกล่าวไม่จริง ดังนั้นจะไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่าง 7.1.5 ให้ V แทนเซตของจำนวนเต็ม และนิยาม $\oplus$ เหมือนการบวกแบบธรรมดา และ $\odot$ แทนการคูณแบบธรรมดา ในตัวอย่างนี้ V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะว่า ถ้ากำหนดให้ α เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V และ $c = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $c\odot\alpha$ ไม่อยู่ใน V

ทฤษฎีบท 7.1.1 ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ดังนั้น

1. $0\odot\alpha = \theta$ สำหรับเวกเตอร์ใด ๆ α ใน V
2. $c\odot\theta = \theta$ สำหรับสเกลาร์ใด ๆ c
3. ถ้า $c\odot\alpha = \theta$ ดังนั้น $c = 0$ หรือ $\alpha = \theta$
4. $(-1)\odot\alpha = -\alpha$ สำหรับเวกเตอร์ใด ๆ α ใน V

พิสูจน์ ข้อ (1)

$$
\begin{aligned}
0\odot\alpha &= (0+0)\odot\alpha \\
&= 0\odot\alpha \oplus 0\odot\alpha
\end{aligned}
$$

โดยการบวก $-0\odot\alpha$ ทั้งสองด้าน แล้วใช้คุณสมบัติข้อ (2), (3) และ (4) ของนิยาม 7.1.1 จะได้

$$
\begin{aligned}
(0\odot\alpha) \oplus (-0\odot\alpha) &= (0\odot\alpha\oplus 0\odot\alpha) \oplus (-0\odot\alpha) \\
\theta &= (0\odot\alpha) \oplus [(0\odot\alpha)\oplus(-0\odot\alpha)] \\
&= (0\odot\alpha)\oplus\theta \\
&= 0\odot\alpha
\end{aligned}
$$

หรือ $0\odot\alpha = \theta$

พิสูจน์ ข้อ (2)

$$
\begin{aligned}
c\odot\theta &= c\odot(0\odot\alpha) && \text{แทนค่า } \theta = 0\odot\alpha \\
&= (c\cdot 0)\odot\alpha && \text{ใช้คุณสมบัติข้อ (7) ของนิยาม 7.1.1} \\
&= 0\odot\alpha \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

พิสูจน์ ข้อ (3)

ถ้า $c\odot\alpha = \theta = 0\odot\alpha$ ดังนั้น $c = 0$

หรือ $c\odot\alpha = \theta = c\odot\theta$ ดังนั้น $a = \theta$

พิสูจน์ ข้อ (4) เพราะว่า

$$(-1)\odot\alpha\oplus\alpha = (-1)\odot\alpha\oplus 1\odot\alpha$$

$$= \quad (-1+1)\odot\alpha$$ ใช้คุณสมบัติข้อ (6) ของนิยาม 7.1.1

$$= \quad 0\odot\alpha$$

$$= \quad \theta$$

ดังนั้น $(-1)\odot\alpha = -\alpha$ ตามคุณสมบัติข้อ (4) ของนิยาม 7.1.1 #

ปริภูมิย่อย (Subspaces)

นิยาม 7.1.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ W เป็นเซตย่อยของ V ถ้า W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เมื่อเทียบกับการดำเนินการใน V ดังนั้นจะเรียก W ว่า ปริภูมิย่อยของ V

ตัวอย่าง 7.1.6 ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์อย่างน้อยที่สุดจะมี 2 ปริภูมิเวกเตอร์ คือ ตัวมันเอง และปริภูมิย่อย $\{\theta\}$ ซึ่งประกอบด้วยเฉพาะเวกเตอร์ศูนย์ (จำไว้ว่า $\theta\oplus\theta = \theta$ และ $c\odot\theta = \theta$ ในปริภูมิเวกเตอร์ใด ๆ) ปริภูมิย่อยเหล่านี้เรียกว่า "ปริภูมิย่อยสำคัญน้อย (trivial subspaces)"

ตัวอย่าง 7.1.7 ให้ P_2 แทนเซตของทุก ๆ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $\leqslant 2$ และฟังก์ชันพหุนามศูนย์ P_2 คือเซตย่อยของ P (P คือปริภูมิเวกเตอร์ของทุก ๆ ฟังก์ชันพหุนาม) เป็นเรื่องง่ายที่จะแสดงว่า P_2 คือปริภูมิย่อยของ P โดยทั่ว ๆ ไปเซต P_n ประกอบด้วยทุก ๆ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $\leqslant$ n และฟังก์ชันพหุนามศูนย์ คือ ปริภูมิย่อยของ P

ตัวอย่างที่ 7.1.8 ให้ V เป็นเซตของทุก ๆ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 2 V คือเซตย่อยของ P แต่ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ P เพราะว่าผลบวกของฟังก์ชันพหุนาม $2t^2+3t+1$ และ $-2t^2+t+2$ ไม่อยู่ใน V (ผลลัพธ์ที่ได้เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 1)

ข้อสังเกต เพื่อจะแสดงว่า เซตย่อย W ของปริภูมิเวกเตอร์ V เป็นปริภูมิย่อย สิ่งแรกที่ควรตรวจสอบคือ ข้อ (ก), (ข) และ (1) ถึง (8) ของนิยาม 7.1.1 ต้องเป็นจริง อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีบทต่อไปกล่าวว่าเป็นการเพียงพอสำหรับการตรวจสอบว่าข้อ (ก) และ (ข) เป็นจริงเท่านั้น

ทฤษฎีบท 7.1.2 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ภายใต้การดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$ และให้ W เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ V ดังนั้น ถ้า W เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า α และ β คือ เวกเตอร์ใด ๆ ใน W ดังนั้น $\alpha\oplus\beta$ อยู่ใน W

(2) ถ้า c คือ จำนวนจริงใด ๆ และ α คือ เวกเตอร์ใด ๆ ใน W ดังนั้น $c\odot\alpha$ อยู่ใน W

พิสูจน์ ขั้นแรกจะพิสูจน์ว่า ถ้า W เป็นปริภูมิย่อยของ V ดังนั้นข้อ (ก) และ (ข) เป็นจริง คำกล่าวนี้ได้จากข้อสังเกตที่ว่า ถ้า W เป็นปริภูมิย่อย ดังนั้น W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และข้อ (ก) และข้อ (ข) ของนิยาม 7.1.1 เป็นจริงด้วย

ในทางกลับกันถ้ากำหนดให้ข้อ (ก) และข้อ (ข) เป็นจริง จะต้องพิสูจน์ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V

ขั้นแรกพิจารณาจากข้อ (ข) จะมี $(-1)\odot\alpha$ อยู่ใน W สำหรับ α ใด ๆ ใน W พิจารณาข้อ (ก) จะมี $\alpha\oplus(-1)\odot\alpha$ อยู่ใน W แต่ $\alpha\oplus(-1)\odot\alpha = \theta$ ดังนั้น θ อยู่ใน W เพราะฉะนั้น $\alpha\oplus\theta = \alpha$ สำหรับ α ใด ๆ ใน W ขั้นสุดท้ายคุณสมบัติข้อ (1), (2), (5), (6), (7) และ (8) เป็นจริงใน W เพราะว่าคุณสมบัติดังกล่าวเป็นจริงใน V เพราะฉะนั้น W เป็นปริภูมิย่อยของ V #

ตัวอย่างที่ 7.1.9 ให้ W แทนเซตของทุก ๆ เวกเตอร์ใน R^3 ซึ่งเขียนในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$ ในเมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 7.1.2 ข้อ (1) และ (2)

พิสูจน์ กำหนดให้

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \beta = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

เป็นสองเวกเตอร์ใน W ดังนั้น

$$\alpha\oplus\beta = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$

อยู่ใน W สำหรับ W ประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์ซึ่งสมาชิกตัวที่ 3 คือผลบวกของสมาชิกสองตัวแรก โดยวิธีเดียวกัน

$$c\odot\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ ca_1+cb_1 \end{bmatrix}$$

อยู่ใน W ดังนั้น W เป็นปริภูมิย่อยของ R^3

ต่อแต่นี้ไปจะแทน $\alpha\oplus\beta$ และ $c\odot\alpha$ ในปริภูมิเวกเตอร์ V ด้วย $\alpha+\beta$ และ $c\alpha$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 7.1.10 กำหนดให้ α_1 และ α_2 เป็นเวกเตอร์แน่นอนในปริภูมิเวกเตอร์ V และให้ W แทนเซตของทุก ๆ เวกเตอร์ใน V ซึ่งอยู่ในรูป

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$$

เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V

วิธีทำ เพื่อจะพิสูจน์คุณสมบัติข้อ (1) และ (2) ของทฤษฎีบท 7.1.2 เพราะฉะนั้นกำหนดให้

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \quad \text{และ} \quad \beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$$

เป็นเวกเตอร์ใน W ดังนั้น

$$\begin{aligned} \beta_1 \oplus \beta_2 &= (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2) \\ &= (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 \end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ใน W ด้วย ถ้า c เป็นสเกลาร์ ดังนั้น

$$c \odot \beta_1 = c(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = (ca_1)\alpha_1 + (ca_2)\alpha_2$$

อยู่ใน W เพราะฉะนั้น W เป็นปริภูมิย่อยของ V

ตัวอย่างที่ 7.1.11 ให้ W แทนเซตของทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด 2×3 ใน $R_{2\times3}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$ ในเมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $R_{2\times3}$

วิธีทำ ให้

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \beta = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ใน W ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ใน W ถ้า c เป็นสเกลาร์ ดังนั้น

$$c \odot \alpha = c\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 & cb_1 & 0 \\ 0 & cc_1 & cd_1 \end{bmatrix}$$

อยู่ใน W เพราะฉะนั้น W เป็นปริภูมิย่อยของ V

ตัวอย่างที่ 7.1.12 พิจารณาระบบเอกพันธ์ (homogeneous system) $AX = 0$ ในเมื่อ A คือเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ คำตอบคือเวกเตอร์ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ นั่นคือ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ดังนั้นเซตของทุก ๆ คำตอบคือ เซตย่อยของ R^n จงแสดงว่า เซตของทุก ๆ คำตอบเป็นปริภูมิย่อยของ R^n (เรียกว่า "ปริภูมิคำตอบ (solution space)" ของระบบเอกพันธ์) โดยแสดงข้อ (1) และ (2) ในทฤษฎีบท 7.1.2

วิธีทำ ให้ X_1 และ X_2 คือคำตอบ ดังนั้น X_1+X_2 อยู่ใน W นั่นคือ X_1+X_2 คือคำตอบเพราะว่า

$$A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = 0+0 = 0$$

ถ้า X อยู่ใน W ดังนั้น cX อยู่ใน W ด้วย นั่นคือ cX คือคำตอบเพราะว่า

$$A(cX) = c(AX) = c(0) = 0$$

แบบฝึกหัด 7.1

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 – 5 เซตที่กำหนดให้รวมทั้งการดำเนินการที่กำหนดให้ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ จงบอกคุณสมบัติของนิยาม 7.1.1 ว่าข้อใดไม่สอดคล้อง (ไม่เป็นจริง)

1. เซตของจำนวนจริงบวกและการดำเนินการ $\oplus$ เหมือนการบวกแบบธรรมดา และการดำเนินการ $\odot$ เหมือนการคูณแบบธรรมดา
2. เซตของทุก ๆ คู่อันดับซึ่งเป็นจำนวนจริง และการดำเนินการ $(x, y)\oplus(x', y') = (x+x', y+y')$ และ $\gamma\odot(x, y) = (x, \gamma y)$
3. **เซตของทุก ๆ สิ่งทั้งสามที่เป็นอันดับ** (ordered triples) **ของจำนวนจริง และการดำเนินการ** $(x, y, z)\oplus(x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$ และ $\gamma\odot(x, y, z) = (x, 1, z)$
4. เซตของทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด $2\times 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ในเมื่อ $x \leqslant 0$ และใช้การดำเนินการใน R^2
5. เซตของทุก ๆ คู่อันดับของจำนวนจริงและการดำเนินการ $(x, y)\oplus(x', y') = (x+x', y+y')$ และ $\gamma\odot(x, y) = (0, 0)$
6. ให้ V แทนเซตของทุก ๆ จำนวนจริงบวก นิยาม $\oplus$ โดย

   $$\alpha\oplus\beta = \alpha\beta \quad (\oplus \text{ คือ การคูณแบบธรรมดา})$$

   และนิยาม $\odot$ โดย

   $$c\odot\alpha = \alpha^c$$

   จงพิสูจน์ว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์
7. ให้ V แทนเซตของทุก ๆ ฟังก์ชันต่อเนื่องค่าจริง ถ้า f และ g อยู่ใน V นิยาม $f\oplus g$ โดย $(f\oplus g)(t) = f(t)+g(t)$ ถ้า f อยู่ใน V นิยาม $c\odot f$ โดย $(c\odot f)(t) = cf(t)$ จงพิสูจน์ว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์
8. ให้ V แทนเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก θ เพียงตัวเดียว และให้ $\theta\oplus\theta = \theta$ และ $c\odot\theta = \theta$ จงพิสูจน์ว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์
9. ให้ V คือเซตของทุก ๆ จำนวนจริงบวก นิยาม $\oplus$ โดย $\alpha\oplus\beta = \alpha\beta-1$ และ $\odot$ โดย $c\odot\beta = \beta$ จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่
10. ให้ V คือ เซตของทุก ๆ จำนวนจริง นิยาม $\oplus$ โดย $\alpha\oplus\beta = \alpha\beta$ และ $\odot$ โดย $c\odot\alpha = c+\alpha$ จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่
11. ให้ V คือเซตของทุก ๆ จำนวนจริง ซึ่งนิยาม $\oplus$ โดย $\alpha\oplus\beta = 2\alpha-\beta$ และ $\odot$ โดย $c\odot\alpha = c\alpha$ จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

12. จงพิสูจน์ว่า P_2 เป็นปริภูมิย่อยของ P_3

13. เซ่ตย่อยข้อใดต่อไปนี้ของปริภูมิเวกเตอร์ $R_{2\times3}$ เป็นปริภูมิย่อย ($R_{2\times3}$ คือเซตของทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด 2×3)

(ก) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ในเมื่อ $b = a+c$

(ข) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & 0 \end{bmatrix}$ ในเมื่อ $c > 0$

(ค) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \end{bmatrix}$ ในเมื่อ $a = -2c$ และ $f = 2e+d$

14. เซตย่อยของ R^3 ข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อย เซตของทุก ๆ เวกเตอร์อยู่ในรูป

(ก) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{bmatrix}$

(ง) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เมื่อ $a > 0$ (4) $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ฉ) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

15. เซตยอยของ $R_{2\times2}$ ข้อใดต่อไปนี้คือปริภูมิย่อย เซตของทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด 2×2

(n) เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric matrices)

(ข) เมตริกซ์เอกฐาน (Singular matrices)

(ค) เมตริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular matrices)

16. จงแสดงว่า เซตของทุก 9 คำตอบของระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $B \neq 0$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ R^n

17. ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และให้ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V จงพิสูจน์ว่า การแผ่ S เป็นปริภูมิย่อยของ V

7.2 เซตการแผ่ของเวกเตอร์ (Spanning set of vectors)

ตัวอย่างส่วนมากในบทที่เหลือ เราจะพิจารณาเฉพาะปริภูมิเวกเตอร์ที่มีสมาชิกซึ่งเรียงอันดับด้วยสเกลาร์ นั่นคือ เวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ นิยามเหมือนเวกเตอร์ในบทที่ 6

เวกเตอร์แน่นอนในปริภูมิเวกเตอร์ สามารถรวมเพื่อทำให้เกิดเวกเตอร์อื่นในปริภูมิเวกเตอร์ได้

ตัวอย่างที่ 7.2.1 เวกเตอร์จำนวนจริงสองมิติใด ๆ v สามารถทำให้มีขึ้นได้ ด้วยตัวเลือกที่เหมาะสมของสัมประสิทธิ์จำนวนจริงในสมการต่อไปนี้

$$\bar{v} = c_1(1, 2) + c_2(3, 4) \tag{7.2.1}$$

และเรียก $\bar{v}$ ว่า "ผลบวกเชิงเส้นของ (1, 2) และ (3, 4) สัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 คือสัมประสิทธิ์ของผลบวก (coefficients of combination)

นิยาม 7.2.1 ถ้า $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ **เป็นเวกเตอร์ และ** $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **เป็นสเกลาร์ ดังนั้น เวกเตอร์**

$$\bar{v} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_n\bar{v}_n \tag{7.2.2}$$

หรือ $$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i\bar{v}_i \; ; \qquad c_i \text{ เป็นสเกลาร์}$$

$\bar{v}$ เรียกว่า ผลบวกเชิงเส้น (linear combination) **ของเวกเตอร์** $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$

เพราะว่าทุก ๆ เวกเตอร์จำนวนจริงในปริภูมิเวกเตอร์ 2 มิติ เขียนแทนด้วย R^2 สามารถแสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของ (1, 2) และ (3, 4) เหมือนที่แสดงในตัวอย่างที่ 7.2.1 ดังนั้น เรากล่าวว่า (1, 2) และ (3, 4) แผ่ทั่ว R^2

นิยาม 7.2.2 เซตของเวกเตอร์ $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ เรียกว่า แผ่ทั่วหรือก่อกำเนิด (span or generate) ปริภูมิเวกเตอร์ กำหนดว่า เวกเตอร์เหล่านี้อยู่ในปริภูมิเวกเตอร์ และทุก ๆ เวกเตอร์ในปริภูมิสามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์เหล่านี้

ตัวอย่างที่ 7.2.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{v}_1 = (1, 0, 0)$ $\bar{v}_2 = (0, 1, 0)$ และ $\bar{v}_3 = (0, 0, 1)$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ซึ่งประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์จริง 3 มิติ เพราะว่าโดยการเลือกสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสม เวกเตอร์ 3 มิติใด ๆ $\bar{v}$ สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ และ $\bar{v}_3$ นั่นคือ

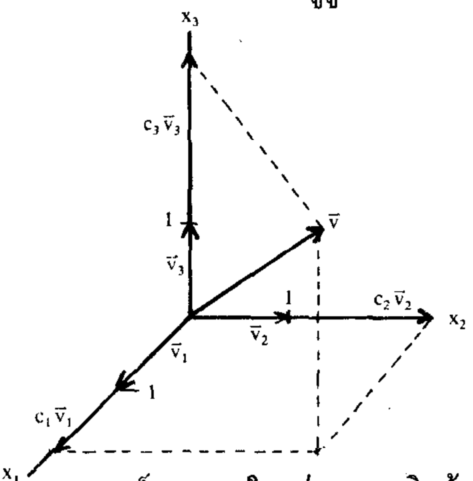
$$\bar{v} = (a, b, c)$$

สามารถเขียนเป็น

$$\bar{v} = (a, b, c) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$$

ในเมื่อ $c_1 = a$, $c_2 = b$ และ $c_3 = c$

สำหรับการอธิบายทางเรขาคณิต ดูรูป 7.2.1



รูป 7.2.1 *เวกเตอร์ $\bar{v}$ แสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ และ $\bar{v}_3$*

ตัวอย่างที่ 7.2.3 จงแสดงว่า เวกเตอร์ $\vec{\beta}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\beta}_2 = (0, 1, 0)$ และ $\vec{\beta}_3 = (1, 1, 0)$ ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ซึ่งประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์จริง 3 มิติ

วิธีทำ เพราะว่าไม่มีทางเลือกค่า k ซึ่งสามารถแสดงในรูปเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ของพิกัด 3 มิติ ในพจน์ของเวกเตอร์ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ และ $\vec{\beta}_3$

พิจารณา $\bar{v} = (x, y, z)$

ถ้า $\bar{v}$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{\beta}_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ จริง

ดังนั้น
$$\bar{v} = k_1\vec{\beta}_1 + k_2\vec{\beta}_2 + k_3\vec{\beta}_3 \qquad (7.2.3)$$

และสามารถหาค่าของ k_i ได้

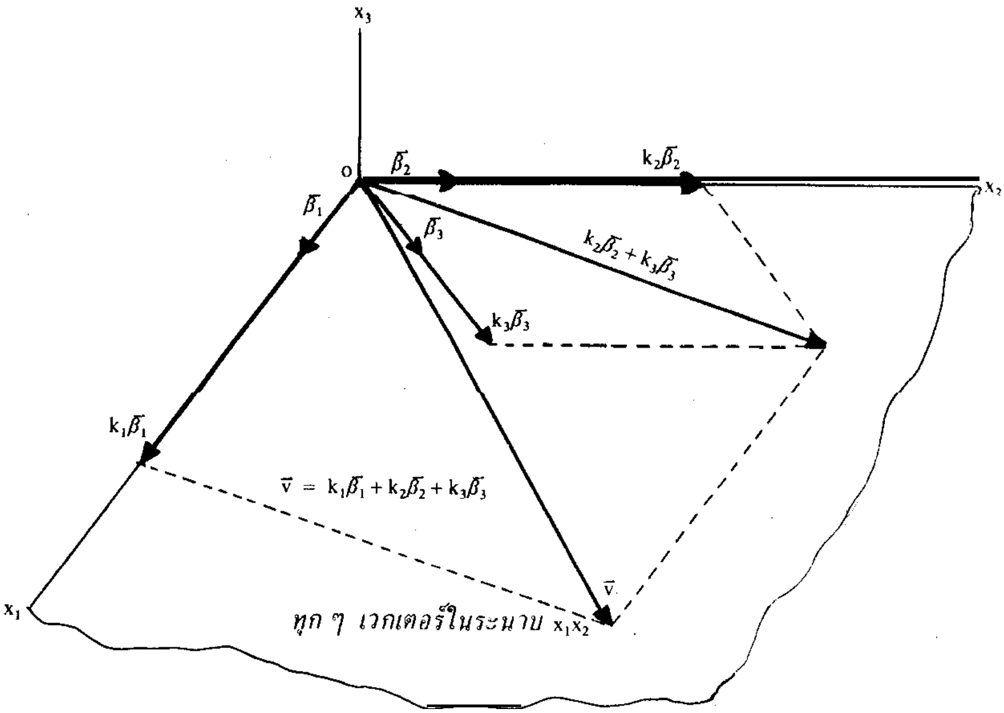
แทนค่า $\bar{v}$ และ $\vec{\beta}_i$ ใน (7.2.3) จะได้

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(1, 1, 0) \\ &= (k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (k_3, k_3, 0) \\ &= (k_1 + k_3, k_2 + k_3, 0) \qquad (7.2.4) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$k_1 + k_3 = x \qquad (7.2.5)$$
$$k_2 + k_3 = y \qquad (7.2.6)$$
$$0 = z \qquad (7.2.7)$$

ซึ่งแสดงว่า $z = 0$ แต่ (x, y, z) คือ เวกเตอร์ใด ๆ ซึ่ง z ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้น หาค่า k_1, k_2 และ k_3 ไม่ได้ นั่นคือ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ และ $\vec{\beta}_3$ ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3

การอธิบายทางเรขาคณิตของทุก ๆ ผลบวกเชิงเส้นของ (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (1, 1, 0) คือ เซตของทุก ๆ เวกเตอร์ในระนาบ x_1x_2 ดูรูป 7.2.2



รูป 7.2.2 *เวกเตอร์ $\bar{v}$ แสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$ และ $\vec{\beta}_3$*

เซตของเวกเตอร์ เรียกว่า แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ ถ้าสมาชิกของเซตแผ่ทั่วปริภูมิ

ตัวอย่างที่ 7.2.4 เมื่อไม่แน่ชัดว่าเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์แน่นอนหรือไม่ วิธีการต่อไปนี้สามารถนำมาใช้ได้

เช่น เราจะหาว่าถ้าเซต {(1, 3), (3, 4)} แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 ของทุก ๆ เวกเตอร์จริง 2 มิติ ให้ (a, b) เป็นสมาชิกเจาะจงของปริภูมิเวกเตอร์และพบว่าถ้าสัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 ของผลบวกเชิงเส้นหาค่าได้ ดังนั้น

$$c_1(1, 3) + c_2(2, 4) = (a, b) \tag{7.2.8}$$

โดยการบวกพิกัดที่สมนัยกัน สมการเวกเตอร์นี้สามารถเขียนในรูประบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = a \\ 3c_1 + 4c_2 = b \end{cases}$$

เราสามารถแสดงว่า สัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 หาค่าได้ โดยใช้วิธีในบทที่ 5 เพื่อหาค่า c_1 และ c_2 สังเกตว่า ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เท่ากับลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติม ดังนั้น ระบบสอดคล้อง (มีคำตอบ) เพราะฉะนั้น สัมประสิทธิ์ของผลบวก c_1 และ c_2 หาค่าได้ นั่นคือเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่วปริภูมิ

ตัวอย่างที่ 7.2.5 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ $\{(1, 3, 0), (0, 1, 4), (2, 7, 4)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ของเวกเตอร์จริง 3 มิติหรือไม่

วิธีทำ ให้ (a, b, c) คือ สมาชิกเจาะจงของปริภูมิเวกเตอร์ R^3 จะแสดงว่าเวกเตอร์เจาะจงนี้สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่กำหนดให้หรือไม่ หรือพูดอีกอย่างได้ว่า จงหาค่าสัมประสิทธิ์ของผลบวก c_1, c_2 และ c_3 ซึ่งสอดคล้องตามสมการ

$$c_1(1, 3, 0) + c_2(0, 1, 4) + c_3(2, 7, 4) = (a, b, c) \tag{7.2.9}$$

สมการเวกเตอร์นี้ สมมูลกับระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = a \\ 3c_1 + c_2 + 7c_3 = b \\ 4c_2 + 4c_3 = c \end{cases}$$

วิธีดำเนินการหนึ่ง คือ แสดงว่าลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ 2 แต่ลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมคือ 3 สำหรับค่าที่แน่นอนของ a, b และ c เพราะฉะนั้นระบบไม่สอดคล้อง ดังนั้น เซตที่กำหนดให้ไม่แผ่ทั่วปริภูมิ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสมของผลบวกไม่สามารถหาค่าได้เสมอ

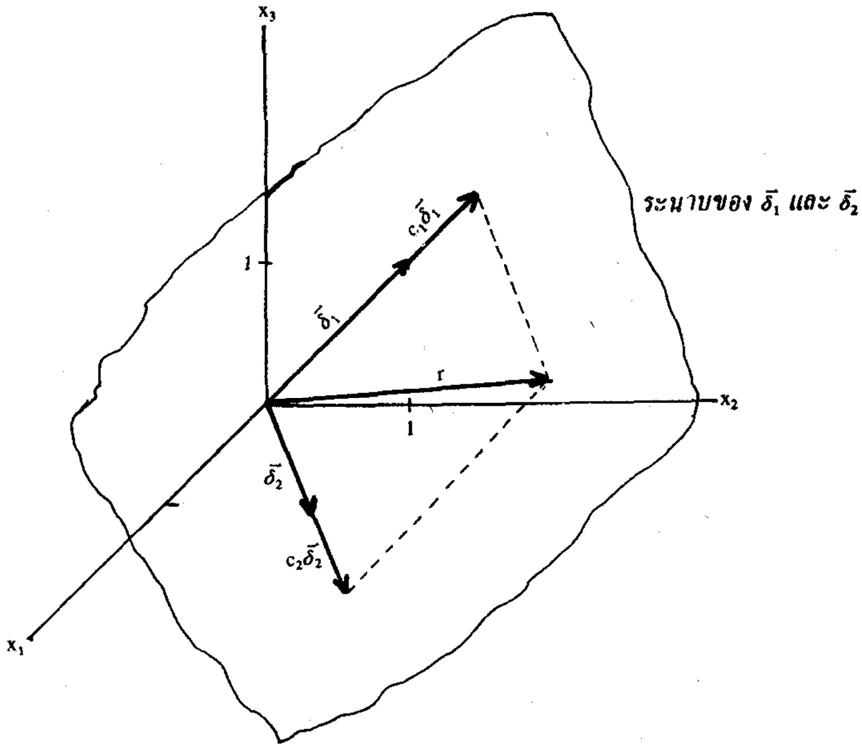
วิธีที่สองเป็นวิธีดำเนินการที่ยืดยาว คือ ใช้วิธีเกาส์-ซอร์ดอง แสดงว่าระบบนี้เป็นระบบไม่สอดคล้อง

ตัวอย่างที่ 7.2.6 จงแสดงว่า เวกเตอร์ $\delta_1 = (0, 1, 1)$ และ $\delta_2 = (1, 1, 0)$ ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3

วิธีทำ เพราะว่ากราฟของผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ δ_1 และ δ_2

$$r = c_1(0, 1, 1) + c_2(1, 1, 0)$$

อยู่ในระนาบซึ่งสองเวกเตอร์ δ_1 และ δ_2 วางอยู่ ตามรูป 7.2.3



รูป 7.2.3

ความหมายนี้ คือ มีเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งไม่สามารถเขียนในรูปผลบวกของ $\vec{\delta}_1$ และ$\vec{\delta}_2$

ข้อสังเกต จะพบว่าเมื่อเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่วปริภูมิ 3 มิติ เซตนี้จะประกอบด้วยเวกเตอร์อย่างน้อยสามเวกเตอร์ (แน่นอนไม่ทุก ๆ เซตของสามเวกเตอร์หรือมากกว่าจะแผ่ทั่วปริภูมิ 3 มิติ เหมือนที่แสดงในตัวอย่างที่ 7.2.5)

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงแสดงว่าเวกเตอร์ใด ๆ (a, b) ในปริภูมิ 2 มิติ สามารถแสดงเหมือนผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 0) และ (0, 1) ได้อย่างไร
2. จงแสดงว่าเวกเตอร์ใด ๆ (a, b, c) ในปริภูมิ 3 มิติ สามารถแสดงเหมือนผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (0, 0, 1) ได้อย่างไร
3. จงเขียน (8, 9) ในรูปผลบวกเชิงเส้นของ (2, 1) และ (1, 3) และจงแสดงคำตอบบนกราฟ
4. จงเขียนเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และจงแสดงคำตอบบนกราฟ
5. จงแสดงว่า (4, 2) ไม่สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ (−3, 2) และ (9, −6) ได้
6. เวกเตอร์ (2, 3) และ (2, −1) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 หรือไม่ เวกเตอร์ (2, 3) และ (−4, −6) แผ่ทั่วปริภูมิเดียวกันหรือไม่ จงให้เหตุผลของคำตอบ
7. เวกเตอร์ (1, 0, 2), (0, 1, 5) และ (0, 1, 1) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 หรือไม่ จงให้เหตุผลของคำตอบ
8. เวกเตอร์ (1, 0, 2), (0, 1, 5) และ (2, 1, 9) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 หรือไม่ จงให้เหตุผลของคำตอบ
9. เวกเตอร์ (3, 4, 6) และ (4, 9, 1) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^3 หรือไม่ จงให้เหตุผลของคำตอบ
10. เวกเตอร์ (4, 9, 1, 0), (0, 4, 9, 1) และ (1, 0, 0, 1) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^4 หรือไม่ จงให้เหตุผลของคำตอบ
11. ในแต่ละส่วน อธิบายทางเรขาคณิตในกรณีแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ โดยเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

    (ก) {(0, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 4)}

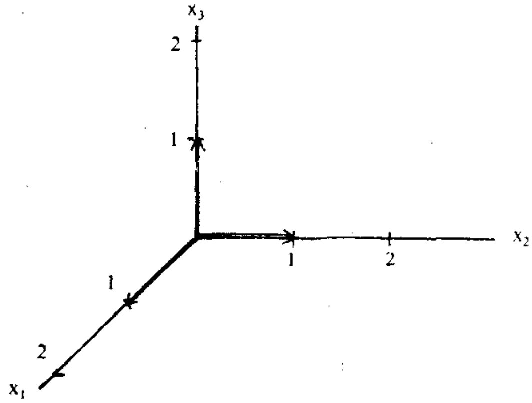
    (ข) {(0, 1, 4), (0, 3, 2), (0, 2, 4)}

    (ค) {(2, 1, 3), (4, 1, 6)}
12. กำหนดว่า เซตของเวกเตอร์ซึ่งแต่ละเวกเตอร์มีจำนวนพิกัดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า เซตของทุก ๆ ผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์เหล่านี้เป็นปริภูมิเวกเตอร์
13. จงพิสูจน์ว่า เพื่อที่จะให้เซตของเวกเตอร์ทั่ว R^3 เซตนี้จะประกอบด้วยเวกเตอร์อย่างน้อย 3 เวกเตอร์

7.3 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(Linear dependence and independence)

เวกเตอร์ (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (0, 0, 1) เรียกว่าเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เพราะว่าเวกเตอร์หนึ่งเวกเตอร์ใดไม่สามารถแสดงในรูปผลบวกของเวกเตอร์ที่เหลือทั้งสองได้ นั่นคือแต่ละเวกเตอร์เป็นอิสระต่อกันของเวกเตอร์อื่นทั้งสอง (ดูรูป 7.3.1)

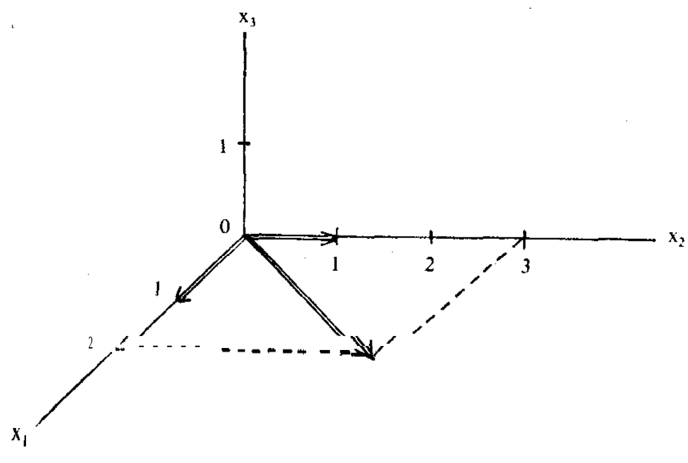


รูป 7.3.1 *สามเวกเตอร์เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง*

ในกรณีอื่น เวกเตอร์ (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (2, 3, 0) เรียกว่า ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (linear dependence) เพราะว่าเวกเตอร์ (2, 3, 0) สามารถแสดงในรูปผลบวกของเวกเตอร์ที่เหลือทั้งสอง นั่นคือ

$$(2, 3, 0) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) \tag{7.3.1}$$

และ (2, 3, 0) ดูเหมือนว่าไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองต่อเวกเตอร์อื่นทั้งสอง ดูรูป 7.3.2



รูป 7.3.2 *สามเวกเตอร์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง*

สังเกตว่า ถ้าเอา (2, 3, 0) ลบตลอดสมการ (7.3.1) จะได้ว่า

$2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 1(2, 3, 0) = (0, 0, 0)$

ซึ่งแสดงว่า จะหาค่าสเกลาร์ k_1, k_2 และ k_3 ได้ และทั้งหมดไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น

$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(2, 3, 0) = (0, 0, 0)$

นิยาม 7.3.1 n เวกเตอร์ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ เรียกว่า **ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ถ้ามีเซต** ของสเกลาร์ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ **ซึ่งทั้งหมดไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น**

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_n\vec{\alpha}_n = 0 \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\vec{\alpha}_i = 0 \qquad \textbf{(7.3.3)}$$

กล่าวได้อีกอย่างว่า ถ้าเวกเตอร์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เวกเตอร์ $\vec{\alpha}_i$ **ซึ่งมี** สัมประสิทธิ์ k_i และไม่เป็นศูนย์ จะสามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่นที่เหลือได้ โดยการย้ายข้างเวกเตอร์อื่น ๆ ไปแล้วหารตลอดด้วย $k_i \neq 0$ ดังนั้น จะได้

$$k_i\vec{\alpha}_i = -k_1\vec{\alpha}_1 - k_2\vec{\alpha}_2 - \ldots - k_n\vec{\alpha}_n$$

$$\vec{\alpha}_i = -\frac{k_1}{k_i}\vec{\alpha}_1 - \frac{k_2}{k_i}\vec{\alpha}_2 - \ldots - \frac{k_n}{k_i}\vec{\alpha}_n \qquad (7.3.4)$$

เซตของเวกเตอร์เหล่านี้เรียกว่า ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ถ้าสมาชิกของเซตไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

นิยาม 7.3.2 เซตของเวกเตอร์ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$ เรียกว่า **"เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง** (linear independence)**"** นั่นคือ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ก็ต่อเมื่อ

$$k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \ldots + k_n\vec{\alpha}_n = 0 \qquad \textbf{(7.3.5)}$$

และ $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$

ตัวอย่างที่ 7.3.1 จงแสดงว่าเวกเตอร์ (1, 1, 0), (3, 2, 1) และ (2, 1, 1) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

วิธีทำ ถ้าเวกเตอร์ (1, 1, 0), (3, 2, 1) และ (2, 1, 1) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง จะมีเซตของสเกลาร์ k_1, k_2 และ k_3 ซึ่งทั้งหมดไม่เป็นศูนย์ และสอดคล้องตามสมการ

$$k_1(1, 1, 0) + k_2(3, 2, 1) + k_3(2, 1, 1) = (0, 0, 0) \qquad \textbf{(7.3.6)}$$

สมการเวกเตอร์นี้ทำให้เกิดระบบสมการเอกพันธ์ ซึ่งผลลัพธ์นี้ได้จากการบวกของพิกัดที่สมนัยกัน ดังนั้น

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 & (7.3.7) \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 & (7.3.8) \\ k_2 + k_3 = 0 & (7.3.9) \end{cases}$$

วิธีดำเนินการแรก คือ สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ k บางตัวที่ไม่เป็นศูนย์สามารถหาค่าได้ เพราะว่าลำดับชั้นของระบบคือ 2 เพราะฉะนั้น จากการอธิบายในบทที่ 5 จะมีคำตอบอื่นมากกว่า (0, 0, 0) สำหรับระบบเอกพันธ์ (homogeneous system)

วิธีดำเนินการที่สองคือ ใช้วิธีการของเกาส์-ซอร์ดอง หาคำตอบทั่วไป (general solution)

$$\begin{cases} k_1 = k_3 \\ k_2 = -k_3 \end{cases}$$

ให้ $k_3 = 1$ ดังนั้นคำตอบเฉพาะ (particular solution) คือ $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ และ $k_3 = 1$ เพราะฉะนั้น

$$(1)(1, 1, 0) + (-1)(3, 2, 1) + (1)(2, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

และเวกเตอร์ใด ๆ ของเวกเตอร์เหล่านี้สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่นทั้งสองได้ ตัวอย่างเช่น

$$(1, 1, 0) = (3, 2, 1) - (2, 1, 1)$$

ตัวอย่างที่ 7.3.2 จงแสดงว่า เวกเตอร์ (3, 2, 1), (0, 1, 2) และ (1, 0, 2) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

วิธีทำ ให้เซตของสเกลาร์ k_1, k_2 และ k_3 สอดคล้องตามสมการ

$$k_1(3, 2, 1) + k_2(0, 1, 2) + k_3(1, 0, 2) = (0, 0, 0) \qquad (7.3.10)$$

สมการเวกเตอร์นี้ทำให้เกิดระบบสมการเอกพันธ์

$$\begin{cases} 3k_1 + \qquad + k_3 = 0 & (7.3.11) \\ 2k_1 + k_2 = 0 & (7.3.12) \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0 & (7.3.13) \end{cases}$$

เพราะว่าลำดับชั้นของระบบคือ 3 ดังนั้น คำตอบเฉพาะคือ $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ และ $k_3 = 0$

วิธีดำเนินการอื่นให้ใช้วิธีของเกาส์-ซอร์ดอง หาคำตอบของระบบสมการ

ผู้อ่านควรสังเกตว่า ถ้าจำนวนของเวกเตอร์มากกว่าจำนวนพิกัดของเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น เซตของเวกเตอร์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ตัวอย่าง เช่น เวกเตอร์ (1, 1), (3, 2) และ (1, 2) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เพราะว่า

$$k_1(1, 1) + k_2(3, 2) + k_3(1, 2) = (0, 0)$$

ให้ระบบสมการเอกพันธ์เป็น

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

เพราะว่าลำดับชั้นของระบบน้อยกว่า 3 (จำนวนตัวไม่รู้ค่าเท่ากับ 3) เพราะฉะนั้นคำตอบอื่นที่ไม่ใช่ (0, 0) จะต้องหาค่าได้

สังเกตว่า ในการตรวจสอบว่าเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ เราจะหาถ้าระบบเชิงเส้นไม่เป็นเอกพันธ์เป็นระบบสอดคล้อง แต่ในการตรวจสอบถ้าเซตเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เราจะหาเฉพาะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์เป็นเวกเตอร์ศูนย์

ทฤษฎีบท 7.3.1 กำหนดให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตย่อยจำกัด (finite subset) ของปริภูมิเวกเตอร์ และให้ S_1 เป็นเซตย่อยของ S_2 ดังนั้น

1. ถ้า S_1 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง กล่าวได้ว่า S_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองด้วย

2. ถ้า S_2 เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง กล่าวได้ว่า S_1 เป็นอิสระต่อกันในตัวเองด้วย

พิสูจน์ กำหนดให้

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \quad \text{และ}$$

$$S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m\}$$

พิสูจน์ข้อ 1 เพราะว่า S_1 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นจะมีสเกลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด (มีบางจำนวนไม่เป็นศูนย์) และสอดคล้องตามสมการ

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = \theta$$

ดังนั้น

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k + (0)\alpha_{k+1} + (0)\alpha_{k+2} + \ldots + (0)\alpha_m = \theta$$

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดไม่เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า S_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง #

พิสูจน์ข้อ 2 ให้ S_2 เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ถ้ากำหนดให้ S_1 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น S_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (ตามผลการพิสูจน์ในข้อ 1) และพบว่าขัดแย้งกับความเป็นจริงที่กำหนดให้ S_2 เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น S_1 ต้องเป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง #

ทฤษฎีบท 7.3.2 กำหนดให้ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ คือ เซตของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิเวกเตอร์ V ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองก็ต่อเมื่อมีเวกเตอร์หนึ่งตัว α_j สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้า α_j ใน S

พิสูจน์ ถ้า α_j สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้า α_j

$$a_j = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{j-1}\alpha_{j-1}$$

ดังนั้น

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + (-1)\alpha_j + (0)\alpha_{j+1} + \ldots + (0)\alpha_n = \theta$$

เพราะว่าอย่างน้อยที่สุดสัมประสิทธิ์หนึ่งตัวคือ -1 ซึ่งไม่เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง #

ในทางกลับกัน ถ้าให้ S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นจะมีสเกลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด และสอดคล้องตามสมการ

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = \theta$$

ให้ j คือ ดัชนีล่าง (subscrip) มากที่สุด ซึ่ง $a_j \neq 0$ ถ้า $j > 1$ ดังนั้น

$$\alpha_j = -\left(\frac{a_1}{a_j}\right)\alpha_1 - \left(\frac{a_2}{a_j}\right)\alpha_2 - \ldots - \left(\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\alpha_{j-1}$$

ถ้า $j = 1$ ดังนั้น

$$a_1\alpha_1 = \theta$$

ซึ่งจะได้ว่า $\alpha_1 = \theta$ แต่จะขัดแย้งกับสมมุติฐานที่กำหนดว่า ทุก ๆ เวกเตอร์ใน S ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งตัวใน S สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้าใน S #

ตัวอย่างที่ 7.3.3 **ให้** $V = \mathbf{R}^3$ และ $a_1 = [1\ 2\ -1]$, $\alpha_2 = [1\ -2\ 1]$, $a_3 = [-3\ 2\ -1]$ และ $a_4 = [2\ 0\ 0]$ จะแสดงว่า

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + (0)\alpha_4 = \theta$$

ดังนั้น $$\alpha_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$$

และ $$\alpha_1 + \alpha_2 + (0)\alpha_3 - \alpha_4 = \theta$$

ดังนั้น $$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 7.3.2 ไม่ได้กล่าวว่า ทุก ๆ เวกเตอร์ α สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้าใน S ได้ ดังนั้น ในตัวอย่างที่ 7.3.3 เมื่อ $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + (0)\alpha_4 = \theta$ จะไม่สามารถแก้สมการนี้ เพื่อหาค่า α_4 ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ (α_1, α_2 และ α_3) ได้ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์ α_4 เป็นศูนย์ อย่างไรก็ตามในตัวอย่างเดียวกันนี้เมื่อ $\alpha_1 + \alpha_2 + (0)\alpha_3 - \alpha_4 = \theta$ ในสมการนี้ สามารถแก้สมการหาค่า α_4 ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ (α_1, α_2 และ α_3) ได้ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ α_4 ไม่เป็นศูนย์

แบบฝึกหัด 7.3

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึงข้อ 8 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้เป็นอิสระต่อกันในตัวเองหรือไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ถ้าเซตของเวกเตอร์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง จงหาเซตของ k และเขียนเวกเตอร์หนึ่งในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น

1. $\{(2, -1), (-4, 2)\}$
2. $\{(1, 1), (2, 1)\}$
3. $\{(2, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 9, 1)\}$
4. $\{(1, 0, -3), (3, 1, 1), (2, 1, 4)\}$
5. $\{(2, 1), (1, 4), (6, 9)\}$
6. $\{(2, 1, 6), (4, 5, 0)\}$
7. $\{(6, 9, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
8. $\{(2, 0, 3), (0, 1, 1), (2, 1, 4)\}$
9. จงให้เหตุผลของคำตอบต่อคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้
   (ก) เป็นไปได้หรือไม่ว่า 3 เวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
   (ข) เป็นไปได้หรือไม่ว่า 3 เวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
   (ค) เป็นไปได้หรือไม่ว่า 2 เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
   (ง) เป็นไปได้หรือไม่ว่า 2 เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง
10. ถ้าเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ เซตนี้จะเป็นอิสระต่อกันในตัวเองหรือไม่ จงแสดงคำตอบที่ถูกต้องต่อคำถามนี้ด้วยเซตของเวกเตอร์ 2 มิติ
11. เวกเตอร์ (0, 0) จะเป็นอิสระต่อกันในตัวเองหรือไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง โดยตัวมันเองหรือไม่ จงตอบคำถามเหมือนกันนี้สำหรับเวกเตอร์ (1, 2)
12. เซตใด ๆ ของเวกเตอร์ n มิติ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ศูนย์ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองใช่หรือไม่ จงให้เหตุผลสำหรับคำตอบของท่าน
13. จงพิสูจน์ว่า เซตของเวกเตอร์ไม่ใช่ศูนย์ (ทั้งหมดมีจำนวนของส่วนประกอบเท่ากัน) ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์หนึ่งของเวกเตอร์ทั้งหมด สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น
14. จงพิสูจน์ว่าเมตริกซ์จัตุรัสสามารถหาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อสดมภ์ (หรือแถว) ของเมตริกซ์จัตุรัสเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

15. จงอธิบายว่า ทำไมเซตของเวกเตอร์ต่อไปนี้ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(ก) $u_1 = (1, 2)$ และ $u_2 = (-3, -6)$ ใน R^2

(ข) $u_1 = (2, 3)$, $u_2 = (-5, 8)$ และ $u_3 = (6, 1)$ ใน R^2

(ค) $P_1 = 2+3x-x^2$ และ $P_2 = 6+9x-3x^2$ ใน P_2

(9) $A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ และ $B = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$ ใน $M_{2\times 2}$

16. เซตของเวกเตอร์ข้อใดต่อไปนี้ใน R^3 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(ก) (2. − 1, 4), (3, 6. 2), (2, 10, −4)

(ข) (3, 1, 1), (2, − 1, 5), (4, 0, −3)

(ค) (6. 0, −1), (1, 1, 4)

(ง) (1, 3, 3), (0, 1, 4), (5. 6, 3), (7, 2, − 1)

17. เซตของเวกเตอร์ข้อใดต่อไปนี้ใน R^4 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(ก) (1, 2, 1, −2), (0, -2, -2, 0), (0, 2, 3, 1), (3, 0, -3. 6)

(ข) (4, 4, 8, 0), (2, 2, 4, 0), (6, 0, 0, 2), (6. 3, 3, 0)

(ค) (4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (− 5, 0, 5, 5)

(ง) (3, 0, 4, 1), (6, 2, − 1, 2), (−1, 3, 5, 1), (-3, 7, 8, 3)

18. เซตของเวกเตอร์ข้อใดต่อไปนี้ใน P_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(ก) $2-x+4x^2$, $3+6x+2x^2$, $2+10x-4x^2$

(ข) $3+x+x^2$, $2-x+5x^2$, $4-3x^2$

(ค) $6-x^2$, $1+x+4x^2$

(ง) $(1+3x+3x^2$, $x+4x^2$, $5+6x+3x^2$, $7+2x-x^2$

19. ให้ V แทนปริภูมิเวกเตอร์ของทุก ๆ ฟังก์ชันค่าจริง นิยามบนเส้นจำนวนจริงทั้งหมด เซตของเวกเตอร์ข้อใดต่อไปนี้ใน V ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(ก) $2, 4\sin^2 x, \cos^2 x$

(ข) $x, \cos x$

(ค) $1, \sin x, \sin 2x$

(ง) $\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$

(จ) $(1+x)^2, x^2+2x, 3$

(ฉ) $0, x, x^2$

7.4 มูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ (Basis of a vector space)

จากหัวข้อ 7.2 เราได้เรียนมาแล้วว่าเซตของเวกเตอร์ที่กำหนดให้แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์แน่นอน เมื่อทุก ๆ เวกเตอร์ในปริภูมิสามารถแสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของเซตที่กำหนดให้ เป็นที่แน่ชัดว่ามากกว่าหนึ่งเซตสามารถแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์แน่นอน โดยเฉพาะอย่างยิ่งจำนวนเวกเตอร์ในแต่ละเซต การแผ่สามารถแตกต่างกันได้

ตัวอย่าง 7.4.1 จงแสดงว่า เซต $\{(1, 0), (0, 1)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 ของทุก ๆ เวกเตอร์จริง 2 มิติ และเซต $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์เดียวกัน

วิธีทำ ถ้าเซต $\{(1, 0), (0, 1)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 ดังนั้น ทุก ๆ เวกเตอร์ในปริภูมิสามารถแสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 0) และ (0, 1)

สมมติให้เวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิ 2 มิติ คือ (a, b) และสามารถเขียนเป็น

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \tag{7.4.1}$$

ซึ่งอยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นของ (1, 0) และ (0, 1) ดังนั้นเซต $\{(1, 0), (0, 1)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเซต $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 ดังนั้นทุก ๆ เวกเตอร์จริงในปริภูมิสามารถแสดงในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 2), (2, 1) และ (3, 3)

สมมติให้เวกเตอร์จริงใด ๆ ในปริภูมิ 2 มิติ คือ (4, 5) ถ้าสามารถเขียนในรูป

$$(4, 5) = k_1(1, 2) + k_2(2, 1) + k_3(3, 3) \tag{7.4.2}$$

เราจะหาค่า k_1, k_2 และ k_3 ที่สอดคล้องตามสมการ (7.4.2) ได้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(4, 5) &= (k_1, 2k_1) + (2k_2, k_2) + (3k_3, 3k_3) \\ &= (k_1 + 2k_2 + 3k_3,\ 2k_1 + k_2 + 3k_3)\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 4 \tag{7.4.3}$$
$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 5 \tag{7.4.4}$$

(7.4.3) − (7.4.4) จะได้

$$-k_1 + k_2 = -1$$

หรือ
$$k_1 = 1 + k_2 \tag{7.4.5}$$

แทนค่า (7.4.5) ลงใน (7.4.3)

$$(1 + k_2) + 2k_2 + 3k_3 = 4$$

$$3k_3 = 3 - 3k_2$$

$$k_3 = 1 - k_2 \qquad (7.4.6)$$

จากสมการ (7.4.5) และ (7.4.6) ถ้าเราสมมติค่า k_2 หนึ่งค่า จะสามารถหาค่า k, และ k , ได้เสมอ ตัวอย่างเช่น

ถ้าสมมติให้ k_2 = 0 จะได้

$$k_1 = 1 + 0 = 1$$

และ $$k_3 = 1 - 0 = 1$$

หรือถ้าสมมติให้ k , = l จะได้

$$k_1 = 1 + 1 = 2$$

และ $$k_3 = 1 - 1 = 0$$

นั่นคือ ถ้าใช้ค่า k , , k_2 และ k_3 ชุดแรก จะเขียน

$$(4, 5) = 1(1, 2) + 0(2, 1) + 1(3, 3) \qquad (7.4.7)$$

และถ้าใช้ค่า k , , k_2 และ k_3 ชุดที่สอง จะเขียน

$$(4, 5) = 2(1, 2) + 1(2, 1) + 0(3, 3) \qquad (7.4.8)$$

ดังนั้น กล่าวได้ว่าเวกเตอร์ (4, 5) ในปริภูมิ 2 มิติ สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 2), (2, 1) และ (3, 3) ได้ นั่นคือเซต {(1, 2), (2, 1), (3, 3)} แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2

ข้อสังเกต เซตของเวกเตอร์แน่นอน {(1, 0), (0, 1)} และ {(1, 2), (2, 1) (3, 3)} แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2 เดียวกัน ถึงแม้ว่าเซตทั้งสองจะมีเวกเตอร์และจำนวนสมาชิกแตกต่างกัน

อย่างไรก็ตาม มีความแตกต่างระหว่างสองชนิดของเซตการแผ่ นั่นคือ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ที่กำหนดให้ บางเซตการแผ่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และบางเซตไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เซตการแผ่ซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเองมีความสำคัญมาก เช่น เซตซึ่งจัดอยู่ในอันดับจำเพาะ (specificed order) เรียกว่า "มูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ (basis of the vector space)"

นิยาม 7.4.1 มูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์คือ เซตอันดับใด ๆ ของเวกเตอร์ ซึ่ง

(1) เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

(2) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่างที่ 7.4.2 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ไม่อยู่ในรูปมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์จริง 3 มิติ

วิธีทำ ถ้า $\bar{v} = (x, y, z)$ เขียนเป็นผลบวกเชิงเส้นของ $(0, 1, 0)$ และ $(0, 0, 1)$ ได้ จะหาค่า k_1, k_2 ได้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= k_1(0, 1, 0) + k_2(0, 0, 1)\\ &= (0, k_1, 0) + (0, 0, k_2)\\ &= (0, k_1, k_2)\end{aligned}$$

สมการเวกเตอร์นี้เป็นจริงเมื่อ

$x = 0, \; k_1 = y$ และ $k_2 = z$

แต่ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น เราไม่สามารถเขียน (x, y, z) ในรูปของผลบวกเชิงเส้นของ $(0, 1, 0)$ และ $(0, 0, 1)$ ได้ เพราะฉะนั้นเซต $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ไม่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าเซตนี้เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เราสามารถสรุปได้ว่า เซต $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ไม่อยู่ในรูปมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ตามนิยาม 7.4.1

ตัวอย่างที่ 7.4.3 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ $\{(0, 1) (1, 0), (1, 1)\}$ ไม่อยู่ในรูปมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^2 ประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์จริง 2 มิติ

วิธีทำ ถ้า $\bar{v} = (3, 4)$ เขียนเป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ $(0, 1)$, $(1, 0)$ และ $(1, 1)$ ได้ จงหา k_1, k_2 และ k_3 ได้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(3, 4) &= k_1(0, 1) + k_2(1, 0) + k_3(1, 1)\\ &= (0, k_1) + (k_2, 0) + (k_3, k_3)\\ &= (k_2 + k_3, \; k_1 + k_3)\end{aligned}$$

สมการเวกเตอร์เป็นจริงเมื่อ

$$k_2 + k_3 = 3 \tag{7.4.9}$$

$$k_1 + k_3 = 4 \tag{7.4.10}$$

จากสมการ (7.4.9) และ (7.4.10) จะได้

$$k_2 = 3 - k_3 \tag{7.4.11}$$

และ

$$k_1 = 4 - k_3 \tag{7.4.12}$$

ถ้าเลือกแทนค่า $k_3 = 1$ จะได้ $k_2 = 3-1 = 2$ และ $k_1 = 4-1 = 3$ นั่นคือ เราสามารถหาค่า k_1, k_2 และ k_3 ได้ เพราะฉะนั้น

$$(3, 4) = 3(0, 1) + 2(1, 0) + 1(1, 1)$$

สรุปได้ว่า เซต $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ R^2

เซต $\{(0,1), (1, 0), (1, 1)\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ก็ต่อเมื่อ

$$k_1(0, 1) + k_2(1, 0) + k_3(1, 1) = (0, 0) \qquad (7.4.13)$$

และ $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

จากสมการ (7.4.13)

$$(0, k_1) + (k_2, 0) + (k_3,k_3) = (0, 0)$$

$$(k_2 + k_3, k_1 + k_3) = (0, 0)$$

สมการเวกเตอร์เป็นจริงเมื่อ

$$k_2 + k_3 = 0 \qquad (7.4.14)$$

$$k_1 + k_3 = 0 \qquad (7.4.15)$$

แก้สมการ (7.4.14) และ (7.4.16)

จะได้ค่า $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

ดังนั้น เซต $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ตามนิยาม 7.3.2 นั่นคือ เราสามารถสรุปได้ว่า เซต $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ อยู่ในรูปมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^2

ตัวอย่างที่ 7.4.4 จงแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์จริง 3 มิติ

วิธีทำ ถ้า $\bar{v} = (a, b, c)$ เขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (0, 0, 1) ได้ จะหาค่า k_1, k_2 และ k_3 ได้ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1)\\ &= (k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3)\\ &= (k_1, k_2, k_3)\end{aligned}$$

สมการเวกเตอร์เป็นจริงเมื่อ $k_1 = a$, $k_2 = b$ และ $k_3 = c$

กล่าวได้ว่า สามารถหาค่า k_1, k_2 และ k_3 ได้ ดังนั้น เซต $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ เป็นเซตการแผ่ของปริภูมิเวกเตอร์ R^3

เซต $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ก็ต่อเมื่อ

$$k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad (7.4.16)$$

และ $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

จาก (7.4.16) จะได้

$$(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (0, 0, 0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

เพราะฉะนั้น $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ และ $k_3 = 0$

ดังนั้น $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเองตามนิยาม 7.3.2 นั่นคือ สรุปได้ว่าเซตนี้เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ R^3 ตามนิยาม 7.4.1

สำหรับปริภูมิเวกเตอร์จำเพาะ (specific vector space) มีจำนวนสมาชิกจำกัดในมูลฐานที่กำหนดให้ และสามารถพิสูจน์ได้ว่ามีจำนวนของเวกเตอร์เท่ากันในทุก ๆ มูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น ถ้ามี 3 เวกเตอร์ในมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์แน่นอน ดังนั้นจะมี 3 เวกเตอร์ในมูลฐานอื่นของปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งเหมือนกัน

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นมูลฐานสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ของทุก ๆ เวกเตอร์สดมภ์และสมาชิกจำนวนจริง 2 ตัว

2. จงแสดง $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์มูลฐานในแบบฝึกหัดข้อ 1

ในแบบฝึกหัดข้อ 3 ถึงข้อ 6 จงแสดงว่าเซตที่กำหนดให้เป็นมูลฐานของ R^3 หรือไม่ จงให้เหตุผลสำหรับคำตอบของท่าน

3. $\{(1, 2, 1), (1, 3, 0), (0, 1, -1)\}$

4. $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 1, 0)\}$

5. $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

6. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

ในแต่ละข้อของแบบฝึกหัดข้อ 7 ถึง 10 จงแสดงว่าเซตที่กำหนดให้เป็นมูลฐานของปริภูมิ-เวกเตอร์ ซึ่งประกอบด้วยทุก ๆ เวกเตอร์สดมภ์ (มีสมาชิกจำนวนจริง 3 ตัว) หรือไม่ จงให้เหตุผล

7. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

8. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

9. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ [illegible] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [illegible] \\ 1 \\ [illegible] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

10. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

11. สามเวกเตอร์ใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ 3 มิติจะเป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์นั้นใช่หรือไม่ ทำไม
12. ปริภูมิเวกเตอร์แน่นอนถูกแผ่ทั่ว โดย 4 เวกเตอร์ที่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง อะไรที่สามารถกล่าวเกี่ยวกับมิติของปริภูมิเวกเตอร์นี้
13. ปริภูมิเวกเตอร์แน่นอนถูกแผ่ทั่วโดย 4 เวกเตอร์ที่ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง อะไรที่สามารถกล่าวเกี่ยวกับมิติของปริภูมิเวกเตอร์นี้
14. อะไรคือมิติของปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
15. กำหนดว่า $\{(2, 0), (1, 1)\}$ เป็นมูลฐานของ R^2 จงสร้างกราฟของระบบอ้างอิงด้วย 2 แกน ซึ่งแต่ละเวกเตอร์มูลฐานแทนหนึ่งหน่วยบนแกนหนึ่งของแกนทั้งสอง บนกราฟนี้จงแสดงว่า

$$(7, 3) = 2(2, 0) + 3(1, 1)$$

มีพิกัด $(2, 3)$ เทียบกับระบบอ้างอิง (พิกัด) ใหม่นี้

7.5 มูลฐานและมิติ (Basis and dimension)

นิยาม 7.5.1 ปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งเวกเตอร์ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ V เรียกว่า "มิติจำกัด n (finite dimension n)" หรือ "มิติ n (dimension n)" ถ้า V ประกอบด้วยเซตจำกัดของเวกเตอร์ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ซึ่งอยู่ในรูปมูลฐาน ถ้าไม่ใช่เซตดังกล่าวนี้จะเรียก V ว่า "มิติไม่จำกัด (infinite dimension)"

ข้อสังเกต

1. จำนวนเวกเตอร์ในมูลฐานใด ๆ ของ V เรียกว่า มิติของ V และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ dim V

2. ปริภูมิเวกเตอร์ศูนย์ถือเป็นมิติจำกัด ถึงแม้ว่าปริภูมิเวกเตอร์ศูนย์ไม่มีเซตซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และสรุปว่าไม่เป็นมูลฐานก็ตาม และเรียกปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ศูนย์โดยเฉพาะว่า มี "มิติเป็นศูนย์ (dimensional zero)"

ตัวอย่างที่ 7.5.1 ถ้า $V = R^3$ คือ ปริภูมิเวกเตอร์จริง 3 มิติ ในกรณีนี้เวกเตอร์ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ และ $e_3 = (0, 0, 1)$ เป็นมูลฐานของ V ดังนั้น

$$\dim V = \dim R^3 = 3$$

(เพราะว่าจำนวนเวกเตอร์ในมูลฐานนี้เท่ากับ 3)

ตัวอย่างที่ 7.5.2 ให้ $U = R_{2\times3}$ คือ ปริภูมิเวกเตอร์ของทุก ๆ เมตริกซ์จริงขนาด 2×3 และเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

เป็นมูลฐานของ U (พิสูจน์เอง) ดังนั้น

$$\dim U = \dim R_{2\times3} = 6$$

โดยทั่วไปถ้าให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ของทุก ๆ เมตริกซ์จริงขนาด $m\times n$ และให้ $E_{ij} \in V$ คือเมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกตำแหน่งที่ ij เป็น 1 และเป็น 0 ที่ตำแหน่งอื่น ๆ ดังนั้นเซต $\{E_{ij}\}$ เป็นมูลฐานของ V และเรียกว่า "มูลฐานโดยปกติ (usual basis)ของ V" เพราะฉะนั้น

$$\dim V = m\cdot n$$

หรือ $\dim R_{m\times n} = m\cdot n$

(เพราะว่าเมตริกซ์จริงขนาด $m\times n$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $m\cdot n$)

ตัวอย่างที่ 7.5.3 ให้ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ของฟังก์ชันพหุนามของตัวแปร t ระดับชั้น (degree) น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ถ้าเซต $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเองและแผ่ทั่ว W (นั่นคือเซตนี้เป็นมูลฐานของ W) ดังนั้น

$$\dim W = n+1$$

(เพราะว่าจำนวนเวกเตอร์ในเซต n+ 1 จำนวน)

จากตัวอย่างที่ 7.3.3 เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ คือเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเองก็ต่อเมื่อมีเวกเตอร์หนึ่งใน S สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น ๆ ที่เหลือใน S ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 7.3.3 จะได้

$$\alpha_1 = -\alpha_3-2\alpha_2,\quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_3,\quad \alpha_1 = \alpha_4-\alpha_2 \quad \text{และ} \quad \alpha_2 = \alpha_4-\alpha_1$$

เป็นต้น

พิสูจน์ กำหนดให้

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V และ α_j สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ใน S ดังนั้นเซต $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n\}$ ซึ่งได้จากเซต S โดยเอา α_j ออก จะแผ่ทั่ว V ด้วย เพื่อพิสูจน์คำกล่าวนี้ สังเกตว่าถ้า α เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V ดังนั้นเพราะว่า S แผ่ทั่ว V จะสามารถหาสเกลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ซึ่งสอดคล้องตามสมการ

$$a = a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_{j-1}\alpha_{j-1}+a_j\alpha_j+a_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+a_n\alpha_n$$

ถ้า $\alpha_j = b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\ldots+b_{j-1}\alpha_{j-1}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a &= a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_{j-1}\alpha_{j-1}+a_j(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\ldots+b_{j-1}\alpha_{j-1}) \\ &\quad +a_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+a_n\alpha_n \\ &= (a_1+a_jb_1)\alpha_1+(a_2+a_jb_2)\alpha_2+\ldots+(a_{j-1}+a_jb_{j-1})\alpha_{j-1} \\ &\quad +a_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+a_n\alpha_n \\ &= c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots+c_{j-1}\alpha_{j-1}+c_{j+1}\alpha_{j+1}+\ldots+c_n\alpha_n \end{aligned}$$

ซึ่งหมายความว่า S_1 แผ่ทั่ว v #

ตัวอย่างที่ 7.5.4 พิจารณาเซตของเวกเตอร์ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ ใน R^4 ในเมื่อ

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และให้ S แผ่ทั่ว W

พิสูจน์

เพราะว่า $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ (แสดงว่า S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง) เพราะฉะนั้นเมื่อเอาเวกเตอร์ α_4 ออกจาก S จะได้เซต $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ และ S_1 แผ่ทั่ว W ด้วย (ตามการพิสูจน์ข้างต้น) #

ทฤษฎีบท 7.5.1 ถ้า $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ คือ เซตของเวกเตอร์ (ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์) แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V ดังนั้น S มีเซตย่อย T และเป็นมูลฐานของ V ด้วย

พิสูจน์ ถ้า S เป็นเซตของเวกเตอร์ซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น S เป็นมูลฐานของ V แต่ถ้า S ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นสำหรับ α_j คือผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ใน S (ตามทฤษฎีบท 7.3.2) ต่อไปถ้าเอา α_j ออกจากเซต S จะได้เซตย่อย S_1 ของ S ดังนั้น ถ้าสังเกตจากตัวอย่างที่ 7.5.4 จะสรุปได้ว่า $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n\}$ แผ่ทั่ว V ด้วย

ถ้า S_1 เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น S_1 เป็นมูลฐานของ V แต่ถ้า S_1 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เอาเวกเตอร์หนึ่งของ S_1 ออก นั่นคือเวกเตอร์นี้สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ของ S_1 และจะได้เซตใหม่ S_2 ซึ่งแผ่ทั่ว V ทำต่อไป เพราะว่า S เป็นเซตจำกัด เพราะฉะนั้นจะพบเซตย่อย T ของ S ซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเองและแผ่ทั่ว V ด้วย ดังนั้น T เป็นมูลฐานของ V #

ทฤษฎีบท 7.5.2 ถ้า $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ V และ $T = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\gamma\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเองใน V ดังนั้น $\gamma \leqslant n$

พิสูจน์ ให้ $T_1 = \{\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ เพราะว่า S แผ่ทั่ว V และ S แผ่ทั่ว T_1 ด้วย เพราะว่า β_1 คือผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S เราจะพบว่า T_1 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 7.3.2 บางเวกเตอร์ α_j สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์

ก่อนหน้านี้ใน T_1 เอาเวกเตอร์เฉพาะ α_j ออก

ให้ $S_1 = \{\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n\}$ สังเกตว่า S_1 แผ่ทั่ว V ต่อไปให้ $T_2 = \{\beta_2, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n\}$ ดังนั้น T_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง และบางเวกเตอร์ใน T_2 เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ก่อนหน้านี้ใน T_2 เพราะว่า T เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เวกเตอร์นี้ไม่ใช่ β_1 ดังนั้นเวกเตอร์นี้คือ α_i และ $i \neq j$ ทำขบวนการนี้ซ้ำหลาย ๆ ครั้ง แต่ละครั้งจะมีเวกเตอร์ตัวใหม่ β ซึ่งสามารถหาได้จากเซต T เป็นไปได้ที่จะทิ้งเวกเตอร์ α ตัวหนึ่งจากเวต S ดังนั้น จำนวน γ ของเวกเตอร์ β จะมีไม่มากกว่าจำนวน n ของเวกเตอร์ α นั่นคือ $\gamma \leqslant n$ #

ทฤษฎีบท 7.5.3 สองมูลฐานใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด จะมีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน

พิสูจน์ ให้ $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ และ $S' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ เป็นสองมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัด V

เพราะว่า S เป็นมูลฐานของ V และ S′ เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นจากทฤษฎีบท 7.5.2 จะได้ว่า $m \leqslant n$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า S′ เป็นมูลฐาน V และ S เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นจากทฤษฎีบท 7.5.2 จะได้ว่า $n \leqslant m$ เพราะฉะนั้นจากเงื่อนไขของสองอสมการข้างต้นจะได้ว่า $m = n$ #

ทฤษฎีบท 7.5.4 ถ้า $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ V ดังนั้นทุก ๆ เซตซึ่งมีเวกเตอร์มากกว่า n เวกเตอร์ ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

พิสูจน์ ให้ $S' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ คือ เซตใด ๆ ซึ่งประกอบด้วย m เวกเตอร์ใน V เมื่อ $m > n$ นั่นคือ เราต้องการแสดงว่า S′ ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง

เพราะว่า $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ เป็นมูลฐานของ V และแต่ละ w_i สามารถเขียนในรูปของผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S กล่าวได้ว่า

$$\left.\begin{array}{lcl} w_1 &=& a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n \\ w_2 &=& a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{n2}v_n \\ \vdots && \vdots \\ w_m &=& a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \ldots + a_{nm}v_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots.(7.5.1)$$

เพื่อแสดงว่า S' ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เราจะหาสเกลาร์ $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ซึ่งไม่ทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$k_1w_1+k_2w_2+\ldots+k_mw_m = \theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7.5.2)$$

ใช้สมการใน (7.5.1) สามารถเขียน (7.5.2) ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}&(k_1a_{11}+k_2a_{12}+\ldots+k_ma_{1m})v_1\\&+(k_1a_{21}+k_2a_{22}+\ldots+k_ma_{2m})v_2\\&\quad\vdots\\&+(k_1a_{n1}+k_2a_{n2}+\ldots+k_ma_{nm})v_n = \theta\end{aligned}$$

ในปัญหานี้ต้องการพิสูจน์ว่า S' ไม่เป็นเซตอิสระต่อกันในตัวเอง ดังนั้นลดรูปเพื่อแสดงว่าจะมีสเกลาร์ $k_1,k_2,\ldots k_m$ ไม่ทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์ และสอดคล้องตามสมการ

$$\begin{aligned}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\ldots+a_{1m}k_m &= 0\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{2m}k_m &= 0\\&\;\;\vdots\\a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\ldots+a_{nm}k_m &= 0\end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7.5.3)$$

เพราะว่าสมการ (7.5.3) มีตัวไม่รู้ค่ามากกว่าจำนวนสมการ ดังนั้นจากหัวข้อ 5.4 ยอมรับการหาค่าได้ของคำตอบว่าไม่เป็นคำตอบสำคัญน้อย (nontrivial solution) นั่นคือ k ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น S' คือ เซตไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง #

ตัวอย่างที่ 7.5.5 จงหามูลฐานและมิติสำหรับปริภูมิคำตอบ (solution space) สำหรับระบบเอกพันธ์

$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-x_3\qquad\;\,+x_5 &= 0\\-x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5 &= 0\\x_1+x_2-2x_3\qquad\;\,-x_5 &= 0\\x_3+x_4+x_5 &= 0\end{aligned}$$

วิธีทำ หาคำตอบของระบบเอกพันธ์ตามหัวข้อ 5.4 จะได้คำตอบกำหนดโดย

$$x_1 = -s-t,\quad x_2 = s,\quad x_3 = -t,\quad x_4 = 0,\quad x_5 = t$$

ดังนั้น เวกเตอร์คำตอบสามารถเขียนเป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{4-t} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ -1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่าเวกเตอร์ $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ แผ่ทั่วปริภูมิคำตอบ

เพราะว่าเวกเตอร์ทั้งสองเป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (พิสูจน์เอง) เพราะฉะนั้น $\{v_1, v_2\}$ เป็นมูลฐานและปริภูมิคำตอบมีมิติเป็น 2

โดยทั่ว ๆ ไป เพื่อจะแสดงว่าเซตของเวกเตอร์ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V จะต้องแสดงว่าเวกเตอร์เหล่านั้นเป็นอิสระต่อกันในตัวเองและแผ่ทั่ว V (ตามนิยาม 7.4.1) อย่างไรก็ตาม ถ้าเราสามารถรู้ว่า V มีมิติ n (ดังนั้น $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ประกอบด้วยเวกเตอร์จำนวนแน่นอนสำหรับมูลฐานหนึ่ง) ดังนั้นมันเพียงพอสำหรับการตรวจสอบว่าเป็นอิสระต่อกันในตัวเองหรือแผ่ทั่วอย่างใดอย่างหนึ่ง เงื่อนไขที่เหลือจะเป็นจริงโดยอัตโนมัติ นี่คือข้อความภายในส่วน (ก) และ (ข) ของทฤษฎีบทต่อไปนี้ ส่วน (ค) ของทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า ทุก ๆ เซตอิสระต่อกันในตัวเองอยู่ในรูปของบางมูลฐานใน V

ทฤษฎีบท 7.5.5

(ก) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ คือ เซตของ n เวกเตอร์ซึ่งเป็นอิสระต่อกันในตัวเองในปริภูมิ n – มิติ ดังนั้น S เป็นมูลฐานสำหรับ V

(ข) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ คือ เซตของ n เวกเตอร์ ซึ่งแผ่ทั่วปริภูมิ n – มิติ V

ดังนั้น S เป็นมูลฐานสำหรับ V

(ค) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_y\}$ คือ เซตอิสระต่อกันในตัวเองในปริภูมิ n – มิติ V และ $y < n$ ดังนั้น S สามารถขยายไปเป็นมูลฐานสำหรับ V นั่นคือ จะมีเวกเตอร์ $v_{y+1}, \ldots, v_n$ ดังนั้น $\{v_1, v_2, \ldots, v_y, v_{y+1}, \ldots, v_n\}$ เป็นมูลฐานสำหรับ V

(ทฤษฎีบทนี้ให้พิสูจน์เองเป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่างที่ 7.5.6 จงแสดงว่า $v_1 = (-3, 7)$ และ $v_2 = (5, 5)$ จัดเป็นมูลฐานสำหรับ R^2

วิธีทำ เพราะว่าเวกเตอร์ทั้งสองไม่สามารถเขียนในรูปผลคูณของเวกเตอร์ที่เหลือ ดังนั้น $S = \{v_1, v_2\}$ เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง เพราะว่า R^2 มี 2 มิติ เพราะฉะนั้น S เป็นมูลฐานสำหรับ R^2 ตามทฤษฎีบท 7.5.5 ส่วน (ก)

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงอธิบายว่า ทำไมเซตของเวกเตอร์ต่อไปนี้ไม่เป็นมูลฐานสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ที่กำหนดให้

(ก) $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (0, 3)$, $u_3 = (2, 7)$ สำหรับ R^2

(ข) $u_1 = (-1, 3, 2)$, $u_2 = (6, 1, 1)$ สำหรับ R^3

(ค) $P_1 = 1+x+x^2$, $P_2 = x - 1$ สำหรับ P_2

(ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ สำหรับ $M_{2\times2}$

2. เซตของเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นมูลฐานสำหรับ R^2

(ก) (2, 1), (3, 0)

(ข) (4, 1), (−7, −8)

(ค) (0, 0), (1, 3)

(ง) (3, 9), (−4, −12)

3. เซตของเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นมูลฐานสำหรับ R^3

(ก) (1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)

(ข) (3, 1, −4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)

(ค) (2, −3, 1), (4, 1, 1), (0, −7, 1)

(ง) (1, 6, 4), (2, 4, −1), (−1, 2, 5)

4. เซตของเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นมูลฐานสำหรับ P_2

(ก) $1-3x+2x^2$, $1+x+4x^2$, $1-7x$

(ข) $4+6x+x^2$, $-1+4x+2x^2$, $5+2x-x^2$

(ค) $1+x+x^2$, $x+x^2$, x^2

(ง) $-4+x+3x^2$, $6+5x+2x^2$, $8+4x+x^2$

5. จงแสดงว่า เซตของเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นมูลฐานสำหรับ $M_{2\times2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

6. ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $v_1 = \cos^2 x$, $v_2 = \sin^2 x$, $v_3 = \cos 2x$

(ก) จงแสดงว่า $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ไม่เป็นมูลฐานสำหรับ V

(ข) จงหามูลฐานสำหรับ V

ในแบบฝึกหัดข้อ 7 – 12 จงหามิติและมูลฐานสำหรับปริภูมิคำตอบของระบบสมการเอกพันธ์

7. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

-2x,-x,+2x, $= 0$

$-x_1 \quad + x_3 = 0$

8. 3x,+x,+x,+x, $= 0$

$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$

9. $x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$

$2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0$

10. x,-3x,+x, $= 0$

$2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$

$3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0$

11. 2x,+x,+3x, $= 0$

x_1 +5x, $= 0$

$x_2 + x_3 = 0$

12. $x + y + z = 0$

$3x + 2y - 2z = 0$

$4x + 3y - z = 0$

$6x + 5y + z = 0$

13. ให้ $\{v_1, v_2, v_3\}$ เป็นมูลฐานของปริภูมิเวกเตอร์ V จงแสดงว่า $\{u_1, u_2, u_3\}$ เป็นมูลฐานสำหรับ V ด้วย เมื่อ $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ และ $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$

คำศัพท์ใหม่

vector space	ปริภูมิเวกเตอร์	7.1
subspace	ปริภูมิย่อย	7.1
negative	นิเสธ	7.1
degree	ระดับขั้น	7.1
zero polynomial	ฟังก์ชันพหุนามศูนย์	7.1
solution space	ปริภูมิคำตอบ	7.1
linear combination	ผลรวมเชิงเส้น	7.2
span or generate	แผ่ทั่ว	7.2
linear dependence	ไม่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง	7.3
linear independence	เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง	7.3
basis	มูลฐาน	7.4
dimension	มิติ	7.4
finite dimension	มิติจำกัด	7.5
infinite dimension	มิติไม่จำกัด	1.5
dimensional zero	มิติศูนย์	7.5