บทที่ 6
เวกเตอร์

บทที่ 6
เวกเตอร์
(Vectors)

6.1 นิยามมูลฐานของเวกเตอร์ (Basic definition of vectors)

นิยาม 6.1.1 เวกเตอร์ $\vec{v}$ ขนาด n มิติ คือ การจัดอันดับของสเกลาร์$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

จากนิยามของเวกเตอร์ n สเกลาร์ a_i เรียกว่าส่วนประกอบของ $\vec{v}$ ถ้าทุก ๆ ส่วนประกอบ (components) เป็นจำนวนจริง เรียกว่า "เวกเตอร์จริง (real vector)" และถ้าทุก ๆ ส่วนประกอบเป็นศูนย์ เรียกว่า "เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector or null vector)"

ในบทที่ 1 ผู้อ่านคงจำได้ว่า เมตริกซ์ขนาด $1 \times n$ หรือ $n \times 1$ ของสเกลาร์ จะสอดคล้องนิยามของเวกเตอร์นี้ ตามความเป็นจริงเมตริกซ์ในลักษณะนี้เป็นเมตริกซ์ในรูปของเวกเตอร์ ดังนั้น นิยามในหัวข้อ 1.2.1, 1.2.2 และ 1.2.5 สามารถประยุกต์กับเวกเตอร์ได้ ซึ่งสามารถนิยามใหม่ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.1.2 ถ้า $\vec{v}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $\vec{v}_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่างที่ 6.1.1

ถ้า $\quad \vec{v}_1 = (1, 4, 3, 7)$

และ $\quad \vec{v}_2 = (x, 4, 3, 7)$

ดังนั้น $\quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ เมื่อ $x = 1$

และ $\quad \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ เมื่อ $x \neq 1$

นิยาม 6.1.3 ถ้า $\vec{v}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $\vec{v}_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ดังนั้น ผลบวก $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ เขียนแทนด้วย $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ คือ ผลบวกของส่วนประกอบที่สมนัยกัน นั่นคือ

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \tag{6.1.1}$$

ตัวอย่างที่ 6.1.2

ถ้า	$\vec{v}_1$	$=$	$(3, -1, 2)$
และ	$\vec{v}_2$	$=$	$(-1, 1, 4)$
ดังนั้น	$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$	$=$	$(3+(-1), (-1)+1, 2+4) = (2, 0, 6)$

นิยาม 6.1.4 ถ้า $\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ c เป็นสเกลาร์ ดังนั้น ผลคูณสเกลาร์กับเวกเตอร์เขียนแทนด้วย $c\vec{v}$ คือการคูณสเกลาร์ c กับทุก ๆ ส่วนประกอบ นั่นคือ

$$c\vec{v} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) \qquad (6.1.2)$$

ตัวอย่างที่ 6.1.3 ให้ $\vec{v} = (3, 4, 6)$ และ c เป็นสเกลาร์

ดังนั้น	$c\vec{v}$	$=$	$(3c, 4c, 6c)$
ให้	c	$=$	2
เพราะฉะนั้น	$2\vec{v}$	$=$	$(6, 8, 12)$

แบบฝึกหัด 6.1

1. ให้ $\vec{v}_1 = (5, 4, -1)$ และ $\vec{v}_2 = (7, 2, -4)$

    (ก) จงหา $5\vec{v}_1$

    (ข) จงหา $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$

    (ค) จงหาผลบวกของ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$

2. ให้ $\vec{v}_1 = (7, 8, 9, 3, 1)$ และ $\vec{v}_2 = (4, 2, 0, 3, 2)$

    (ก) จงหาเวกเตอร์ $\vec{v}_3$ ซึ่งผลบวกของ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_3$ คือ $\vec{v}_2$

    (ข) จงหา $\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$

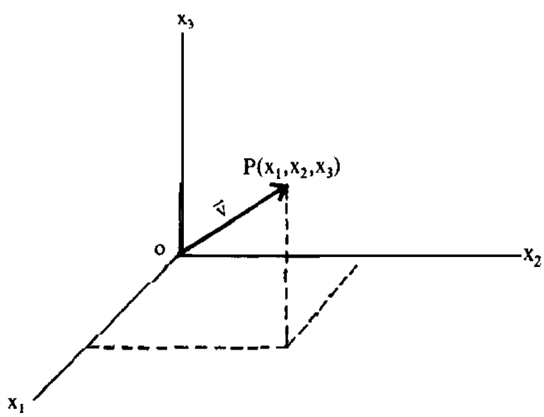
    (ค) พิกัด (component) ของ $\vec{v}_1$ มีจำนวนเท่าใด

    (ง) จงหา x และ y ในเมื่อ $\vec{v}_1 = (x+y, x-y, 9, 3, 1)$

6.2 การแทนเวกเตอร์ทางเรขาคณิต (Geometric representation of a vector)

เมื่อกล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น แรง (force) ความเร็ว (velosity) และความเร่ง (acceleration) จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction) จากเหตุผลนี้ มันจะเกิดประโยชน์เพื่ออธิบายเวกเตอร์จำนวนจริงสองหรือสามมิติในทางเรขาคณิต

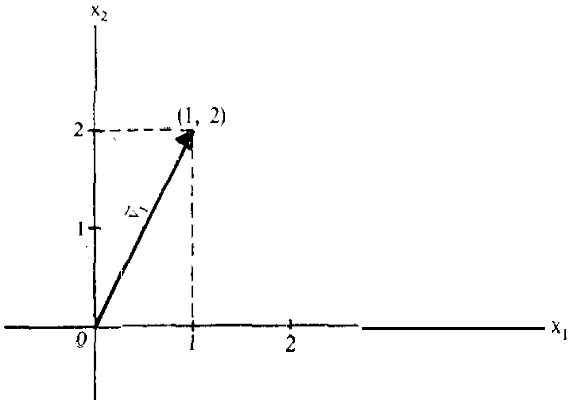
ให้ (x_1, x_2, x_3) เป็นเวกเตอร์จริง 3 มิติ เราสามารถรวมเวกเตอร์นี้กับจุด $P(x_1, x_2, x_3)$ ซึ่งมีพิกัดเหมือนกับส่วนประกอบที่สมนัยของเวกเตอร์ อย่างไรก็ตาม ถ้า $P(x_1, x_2, x_3)$ เป็นจุดใด ๆ เราสามารถรวม P กับเวกเตอร์ (x_1, x_2, x_3) ได้ด้วย ถ้า P ไม่ใช่จุดกำเนิด (origin) เราสามารถรวมเวกเตอร์ (x_1, x_2, x_3) กับส่วนหนึ่งของเส้นตรง OP ซึ่งมีทั้งความยาว (ขนาด) และทิศทาง ในทางเรขาคณิตเวกเตอร์จริง 1 หรือ 2 หรือ 3 มิติ สามารถอธิบายด้วยทิศทางของเส้นที่กำหนดให้ใน 1 หรือ 2 หรือ 3 มิติได้ เพื่อที่จะอธิบายเวกเตอร์นี้โดยเริ่มจากจุดกำเนิด เขียนเส้นตรง OP จะได้ความยาวและทิศทางตามต้องการ (ดูรูป 6.1.1) ดังนั้น ถ้า (x_1, x_2, x_3) คือ พิกัดของจุดปลาย (terminal point) P เราอธิบายเวกเตอร์ $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ ด้วยเส้นตรงที่กำหนดให้ และในทางกลับกัน (ดูรูป 6.1.1) เส้นตรง OP ปรากฏเหมือนลูกศรจากจุด O ไปยังจุด P



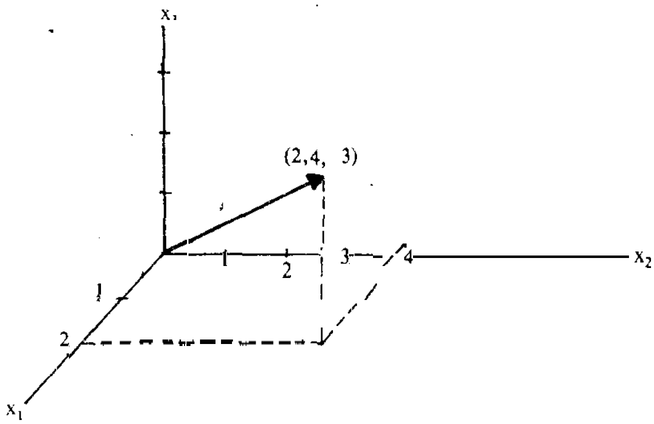
รูป 6.1.1 *การแทนทางเรขาคณิตของเวกเตอร์* (x_1, x_2, x_3)

ตัวอย่างที่ 6.2.1 (ก) เวกเตอร์ $\vec{v} = (1, 2)$ อาจแทนด้วยลูกศรจากจุดกำเนิดไปยังจุด (1, 2) ในระนาบ x_1x_2 ดูรูป 6.2.2

(ข) ลูกศรที่ลากจากจุดกำเนิดไปยังจุด (2, 4, 3) ในปริภูมิ 3 มิติ แทน $\vec{v}_2 = (2, 4, 3)$ ตามรูป 6.2.3



รูป 6.2.2 *การแทนเวกเตอร์* $\vec{v}_1 = (1, 2)$ *ทางเรขาคณิต*



รูป 6.2.3 *การแทนเวกเตอร์* $\vec{v}_2 = (2, 4, 3)$ *ทางเรขาคณิต*

นิยาม 6.2.1 ขนาดของเวกเตอร์จริง $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|\vec{v}\|$ จะเท่ากับความยาวของเส้นตรงหรือลูกศร และความยาวนี้สามารถคำนวณได้ โดยใช้ทฤษฎีบทพีธากอเรียน (Pythagorian) สองครั้ง ดังนั้น

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{6.2.1}$$

สำหรับ $\vec{v} = (x_1, x_2)$

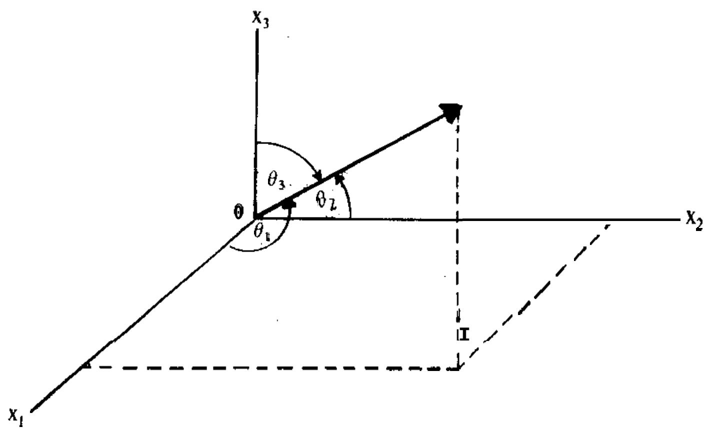
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{6.2.2}$$

ตัวอย่างที่ 6.2.2 ถ้า $\vec{v}_1 = (1, -4, 2)$ และ $\vec{v}_2 = (2, 5, -1)$ จงหา $\|\vec{v}_1\|$ และ $\|\vec{v}_2\|$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{(1)^2+(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{(2)^2+(5)^2+(-1)^2} = \sqrt{30}$$

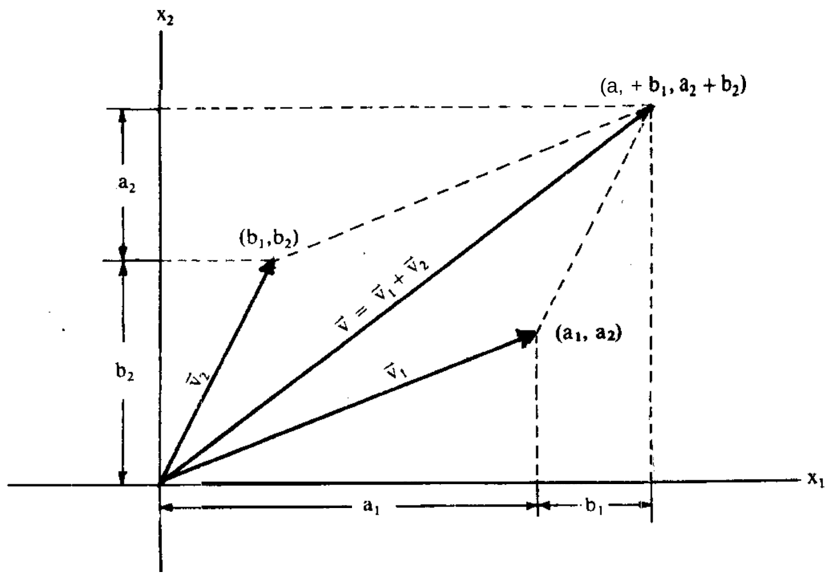
ทิศทางของเวกเตอร์ 3 มิติ $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ แสดงโดยทิศทางของลูกศร เมื่อต้องการทิศทางสามารถอธิบายในพจน์ของมุมแสดงทิศทาง ซึ่งมุมแสดงทิศทางคือ มุมระหว่างลูกศรและทิศทางบวกของแกนทั้งสามตามลำดับ ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 180° แสดงตามรูป 6.2.4



รูป 6.2.4 *มุมแสดงทิศทาง* (the direction angles)

ต่อไปจะพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตสำหรับการบวก การคูณด้วยสเกลาร์และการลบของเวกเตอร์

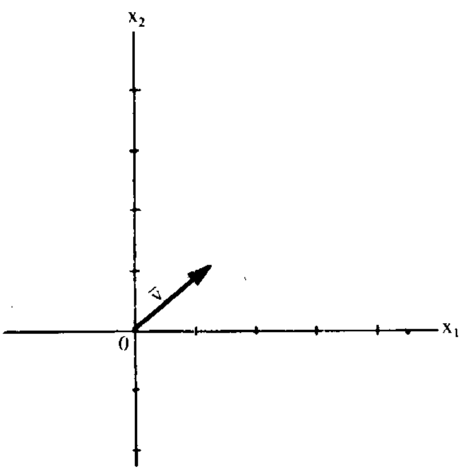
การบวกของเวกเตอร์ในทางเรขาคณิต หาได้โดยการลากสี่เหลี่ยมด้านขนานตามรูป 6.2.5 ซึ่งมีประโยชน์เมื่อคิดถึงผลบวกของเวกเตอร์เช่นแรงที่กระทำต่ออนุภาค คำถามก็คือ ทิศทางของอนุภาคที่จะเคลื่อนที่ไปและแรงลัพธ์คืออะไร ตามรูป 6.2.5 เวกเตอร์ $\vec{v}$ คือผลลัพธ์ของ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ความคิดนี้สามารถขยายไปเป็น 3 มิติ ได้



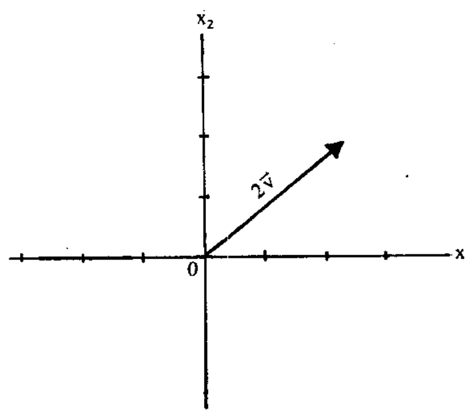
รูป 6.2.5 *การบวกสองเวกเตอร์ทางเรขาคณิต*

ข้อสังเกต ผลลัพธ์ซึ่งแสดงในแผนภาพตรงกับนิยามการบวกเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในหัวข้อ 6.1

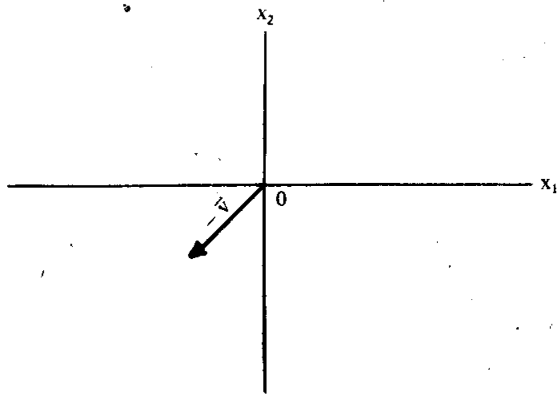
การคูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนจริงบวก ทิศทางจะไม่เปลี่ยนแปลง แต่ถ้าคูณด้วยจำนวนจริงลบ ทิศทางจะเป็นตรงกันข้าม ทั้งสองกรณีการเปลี่ยนขนาดขึ้นกับขนาดของสเกลาร์ที่คูณ แสดงตามรูป 6.2.6, 6.2.7 และ 6.2.8



รูป 6.2.6



รูป 6.2.7

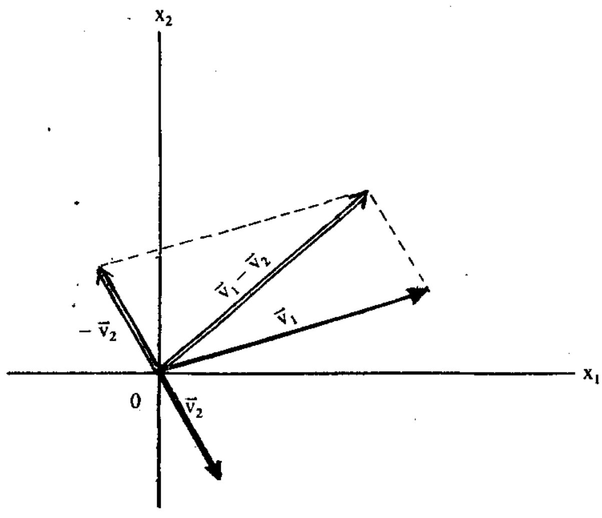


รูป 6.2.8

การลบเวกเตอร์ (Subtraction of vectors) สามารถทำให้สำเร็จได้โดยใช้ความจริงที่ว่า

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$
$$= \vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 \qquad (6.2.3)$$

การลบเวกเตอร์ทางเรขาคณิตสามารถกระทำได้ตามรูป 6.2.9

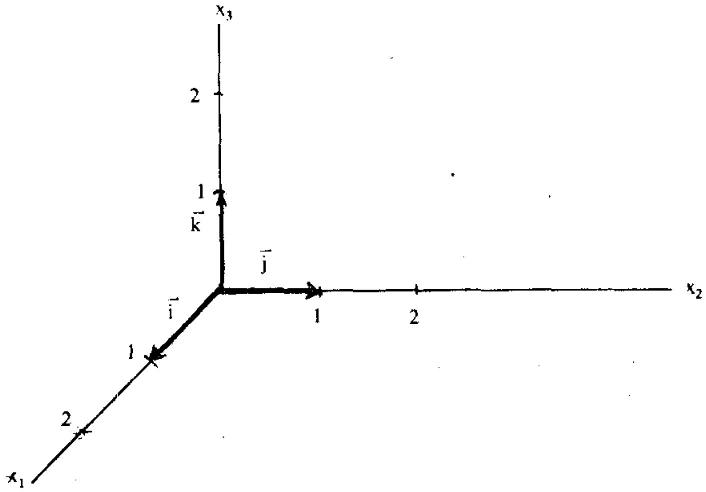


รูป 6.2.9 *การลบสองเวกเตอร์ทางเรขาคณิต*

ถ้าเวกเตอร์ไม่เป็นศูนย์ $\vec{v}$ คูณด้วยสเกลาร์ $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ ผลลัพธ์เรียกว่า **"เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)**" เพราะว่ามันมีขนาดหนึ่งหน่วย เซตสำคัญของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน**

ปริภูมิ 3 มิติ (3-dimension space) คือ $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ และ $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ดูรูป 6.2.10 สังเกตว่าทิศทางของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ เหมือนกับแกนพิกัด โดยทั่ว ๆ ไป เพื่อความสะดวกจะบอกเวกเตอร์ $v = (a_1, a_2, a_3)$ เป็น

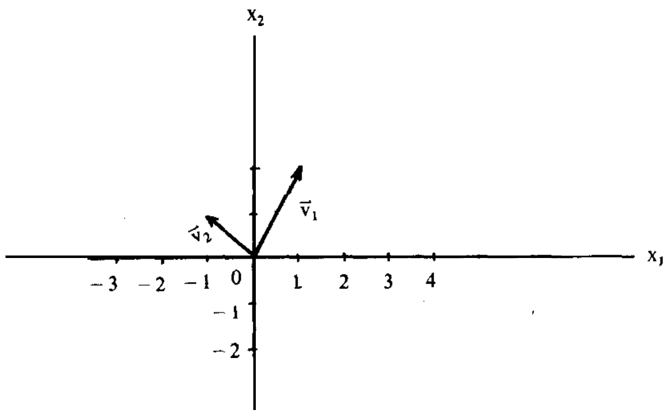
$$\vec{v} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \tag{6.2.4}$$



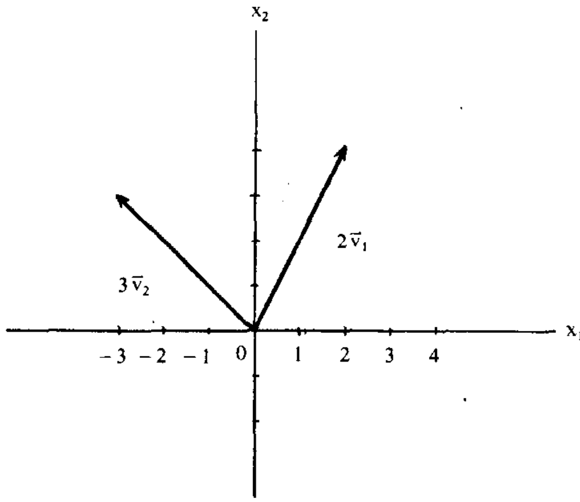
รูป 6.2.10 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 จงสร้าง $2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$ แสดงโดยเส้นกราฟทางเรขาคณิต
กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ และ $\vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$

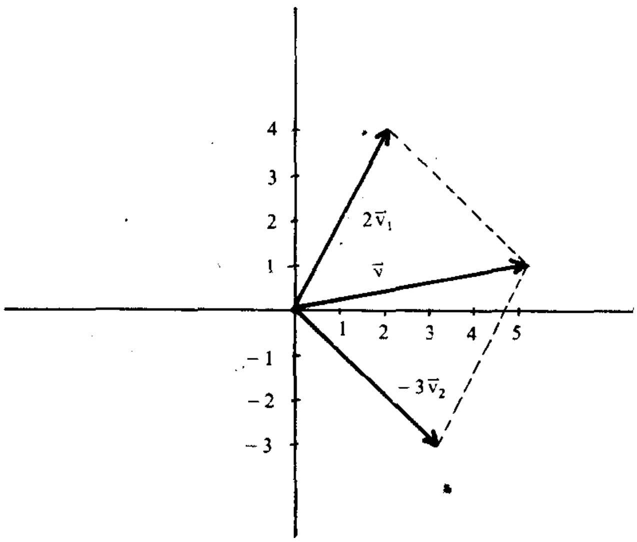
วิธีสร้าง ดูรูป 2.6.11., 2.6.12 และ 2.6.13



รูป 6.2.11



รูป 6.2.12



รูป 6.2.13 $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + (-3\vec{v}_2)$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงแทน $\vec{v} = (3, 4)$ บนกราฟ และจงหา $\|\vec{v}\|$
2. จงแทน $\vec{v} = (2, 7, 5)$ บนกราฟ และจงหา $\|\vec{v}\|$
3. จงแสดงบนกราฟ มุมแสดงความเอียงของเวกเตอร์ (1, 4, 2)
4. ทำซ้ำเหมือนข้อ 3 ของเวกเตอร์ (– 1, 5, 2)
5. จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ถ้า $\vec{v}_1 = (2, 4)$ และ $\vec{v}_2 = (5, 1)$
6. ถ้าสองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากัน จำเป็นหรือไม่ว่าเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากัน แต่ถ้าไม่เท่ากัน จงแสดงตัวอย่าง
7. ผลบวก (1, 4) และ (5, 1) แสดงทางเรขาคณิต
8. ผลบวก $\vec{v}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ และ $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ทางเรขาคณิต
9. จงเขียน $\vec{v} = (4, 4, 1)$ ในพจน์ของ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ดังนั้น จงเขียน $\vec{v}$ และ $2\vec{v}$ บนกราฟเดียวกัน
10. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของ $\vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$
11. เวกเตอร์ต่อไปนี้ เวกเตอร์ใดเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

    (ก) $\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

    (ข) $\vec{v}_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$

    (ค) $\vec{v}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
12. การลบ (3, 2) จาก (– 3, 5) แสดงโดยกราฟทางเรขาคณิต
13. ถ้า $\vec{v}_1 = (4, -1)$ และ $\vec{v}_2 = (-2, -6)$ จงสร้าง $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ทางเรขาคณิต
14. ให้ $\vec{v}_1 = (4, 2)$ และ $\vec{v}_2 = (1, 8)$

    (ก) จงหา $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$, $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$, $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|$ และ $\|2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2\|$

    (ข) สร้าง $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ โดยกราฟทางเรขาคณิต

    (ค) สร้าง $2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$ โดยกราฟทางเรขาคณิต

    (ง) จงหาเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วย ในทิศทางของ $\vec{v}_2$

6.3 ผลคูณของเวกเตอร์ (Product of vectors)

วิธีคูณเวกเตอร์มีหลายวิธี บางวิธีผลคูณเป็นสเกลาร์ บางวิธีเป็นเวกเตอร์ และเป็นเมตริกซ์ก็มี แต่ผลลัพธ์ที่เป็นเวกเตอร์หรือผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) จะไม่พิจารณาในหนังสือเล่มนี้

วิธีแรก เมื่อผลคูณเป็นสเกลาร์ (scalar product or inner product or dot product) การดำเนินการจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "·"

นิยาม 6.3.1 ถ้า $\bar{v}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $\bar{v}_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เป็นเวกเตอร์จริง ดังนั้น

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \tag{6.3.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

และเรียก $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$ ว่า "ผลคูณสเกลาร์ (scalar product)" ของเวกเตอร์ $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$

ตัวอย่างที่ 6.3.1 ให้ $\bar{v}_1 = (3, 2, 0, 4)$ และ $\bar{v}_2 = (1, 1, 2, 3)$ จงหา $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$

วิธีทำ จากสูตร (6.3.1)

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 3\cdot1 + 2\cdot1 + 0\cdot2 + 4\cdot3$$

$$= 3+2+0+12$$

$$= 17$$

ผลคูณสเกลาร์ของสองเวกเตอร์จริงเกี่ยวข้องกับการคูณเมตริกซ์ต่อไปนี้ ถ้า $\bar{v}_1$ เขียนในรูปเมตริกซ์แถวขนาด $1\times n$ (บ่อยครั้งเรียกว่า เวกเตอร์แถว) และ $\bar{v}_2$ เป็นเมตริกซ์สดมภ์ขนาด $n\times 1$ (บ่อยครั้งเรียกว่า เวกเตอร์สดมภ์) จะได้ว่า

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n] \tag{6.3.2}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 1×1 มีสมาชิกเป็นสเกลาร์ สมาชิกนี้คือ ผลคูณสเกลาร์ใน (6.3.1) นั่นเอง โดยวิธีอื่นกำหนดว่า $\bar{v}_1$ เป็นเวกเตอร์สดมภ์ขนาด 3×1 และ $\bar{v}_2$ เป็นเวกเตอร์แถวขนาด 1×3 ผลคูณ $\bar{v}_1\bar{v}_2$ คือ เมตริกซ์ขนาด 3×3

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \qquad (6.3.3)$$

วิธีนี้คือ วิธีที่สามของการคูณเวกเตอร์

เมื่อผลคูณสเกลาร์ของสองเวกเตอร์จริงขนาด n เป็นศูนย์ เวกเตอร์จริงทั้งสองจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน (orthogonal) การอธิบายทางเรขาคณิตของสองเวกเตอร์จริงที่ไม่เป็นศูนย์และตั้งฉากซึ่งกันและกันในสองมิติ คือ การแทนทางเรขาคณิตของสองเวกเตอร์ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ผลคูณสเกลาร์จะใช้นิยามหาขนาดของเวกเตอร์ n มิติ $\bar{v}$ ตามสูตรข้างล่างนี้

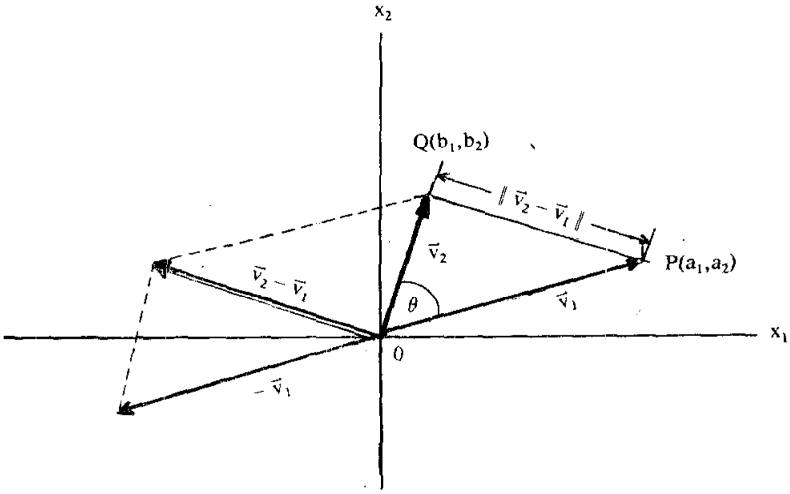
$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}} \qquad (6.3.4)$$

ทฤษฎีบท 6.3.1 ถ้า $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$ สองเวกเตอร์อยู่บนระนาบ x_1, x_2 ดังนั้น

$$\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2 = \|\bar{v}_1\|\,\|\bar{v}_2\|\cos\theta \qquad (6.3.5)$$

ในเมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$ และมีค่ามากกว่าศูนย์

สร้างรูป



รูป 6.3.1

พิสูจน์ จากรูป ΔPQO ใช้กฎของโคไซน์ (Law of cosines)

จะได้ $$\|\vec{v}_2-\vec{v}_1\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - 2\|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos\theta$$

หรือจัดใหม่เป็น

$$2\|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos\theta = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_2-\vec{v}_1\|^2 \tag{6.3.6}$$

ใช้สูตร (6.2.2) หาขนาดของเวกเตอร์ 2 มิติ และนิยามการลบของเวกเตอร์ (6.2.3)

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{6.3.7}$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{6.3.8}$$

$$\|\vec{v}_2-\vec{v}_1\| = \|(b_1-a_1), (b_2-a_2)\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2} \tag{6.3.9}$$

แทนค่า (6.3.7), (6.3.8) และ (6.3.9) ลงใน (6.3.6) ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2\|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos\theta &= (a_1^2+a_2^2) + (b_1^2+b_2^2) - \{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2\} \\ &= a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-b_1^2+2a_1b_1-a_1^2-b_2^2+2a_2b_2-a_2^2 \\ &= 2(a_1b_1+a_2b_2) \\ &= 2(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2) \end{aligned}$$

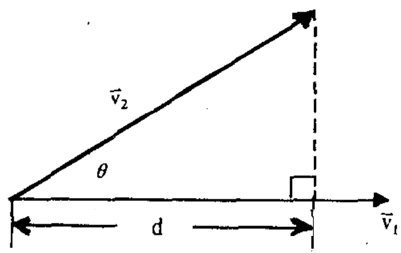
หรือเขียนใหม่เป็น

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos\theta \qquad \#$$

การอธิบายทางเรขาคณิตของ $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$ จำเป็นต้องใช้สูตรตรีโกณเบื้องต้น ซึ่งแสดงตามรูป 6.3.1 จำนวน $d = \|\vec{v}_2\|\cos\theta$ ซึ่งแสดงตามรูป 6.3.2 เรียกว่า "ภาพฉายสเกลาร์ (scalar projection)" ของ $\vec{v}_2$ บน $\vec{v}_1$ และถ้า θ เป็นมุมป้าน (obtuse) d จะมีค่าเป็นลบ ใช้ประโยชน์จากข้อสังเกตนี้ และทฤษฎีบทที่ผ่านมา จะได้ว่า

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|\cos\theta = \|\vec{v}_1\|d \tag{6.3.10}$$

ดังนั้นแสดงโดยเส้นทางเรขาคณิต $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$ คือ ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{v}_2$ บน $\vec{v}_1$ (เรียกว่า d) คูณความยาวของ $\vec{v}_1$



$$\cos\theta = \frac{d}{\|\vec{v}_2\|}$$

ดังนั้น $$d = \|\vec{v}_2\|\cos\theta$$

รูป 6.3.2

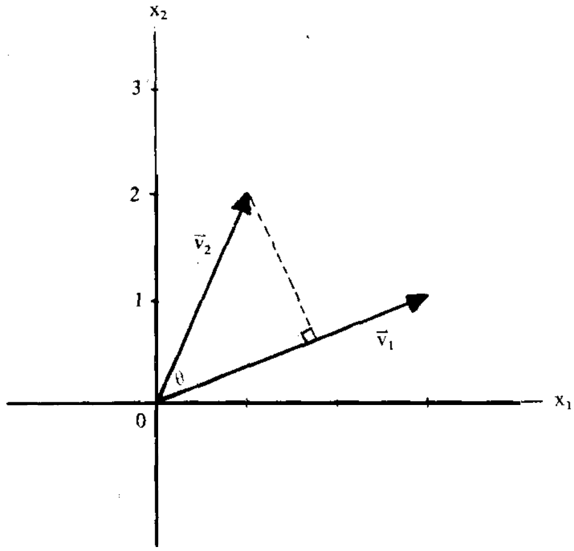
ตัวอย่างที่ 6.3.1 ในการเรียนฟิสิกส์เบื้องต้น เราเรียนมาว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปด้วยระยะทางที่แน่นอน งานที่กระทำต่ออนุภาคในทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคกำหนดให้มีสูตรเป็น

$$\text{งาน} = \text{แรง} \times \text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}$$

กำหนดว่าเราต้องการหางานที่ทำในการเลื่อนอนุภาคตามทาง $\vec{v}_1 = (3, 1)$ ด้วยแรง $\vec{v}_2 = (1, 2)$ ตามรูป 6.3.3 เพราะว่า แรงที่กระทำต่ออนุภาคไม่ได้กระทำในทิศทางการเคลื่อนที่ แรงบางส่วนได้สูญเสียไป ดังนั้น สิ่งที่น่าสนใจ คือแรง $\vec{v}_2$ ในทิศของ $\vec{v}_1$ คือ $\|\vec{v}_2\|\cos\theta$ ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้ คือ $\|\vec{v}_1\|$ ดังนั้น งานที่ทำคือ $\|\vec{v}_1\| \ \|\vec{v}_2\|\cos\theta$ จากทฤษฎีบท 6.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{งาน} &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ &= (3, 1) \cdot (1, 2) \\ &= 3\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ &= 3+2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ถ้าหน่วยของระยะทาง คือ ฟุต และแรงมีหน่วยเป็นปอนด์ ดังนั้น งานที่ทำคือ 5 ฟุต-ปอนด์



รูป 6.3.3 *แรง $\vec{v}_2$ กระทำต่ออนุภาคตามทาง $\vec{v}_1$*

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาแต่ละผลคูณต่อไปนี้ถ้าผลคูณหาค่าได้ ถ้าผลคูณหาค่าไม่ได้ จงให้เหตุผลว่าทำไมจึงไม่ได้

   (ก) $(2, 4, 0, 7) \cdot (0, -1, 6, 2)$

   (ข) $(0, 2, 4) \cdot (6, 3, 1)$

   (ค) $(0, 0, 0, 0) \cdot (3, 2, 1, 6)$

   (ง) $(2, -1, -6, -1) \cdot (2, 3, 0, 1)$

   (จ) $(2, 6, 3, 0) \cdot (2, 1, 2)$

   (ฉ) $(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) \cdot (\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

2. จงหาค่าของ x ในเมื่อ

   (ก) $(x, 1, 2, 0) \cdot (3, 2, 0, 1) = 4$

   (ข) $(x, 1, 3, 2) \cdot (1, x, 0, x) = 4$

3. จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{v}_1 = -2\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{v}_2 = 4\vec{i}+3\vec{j}$ อะไร คือความสำคัญของคำตอบที่ติดลบ จงเขียนกราฟ

4. จงหามุมระหว่าง $\vec{\alpha} = 2\vec{i}-\vec{j}$ และ $\vec{\beta} = 3\vec{i}+6\vec{j}$

5. (ก) จงเขียนและแสดงสำหรับ $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$

   (ข) ถ้า $\vec{\alpha} = (6, 0, 4, -2)$ จงหา $\|\alpha\|$

6. ในปริภูมิสองมิติ จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ถ้า $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ และ $\vec{\alpha} \neq 0$ และ $\vec{\beta} \neq 0$ ดังนั้น $\vec{\alpha}$ ตั้งได้ฉากกับ $\vec{\beta}$

7. จงหาค่า x เพื่อว่า $\vec{\alpha}$ ตั้งได้ฉากกับ $\vec{\beta}$ ในเมื่อ $\vec{\alpha} = 2\vec{i}+\vec{j}$ และ $\vec{\beta} = x\vec{i}+2\vec{j}$

8. จงหาภาพฉาย (projection) สเกลาร์ของ $\vec{\alpha} = \vec{i}+2\vec{j}$ บน $\vec{\beta} = 3\vec{i}+\vec{j}$

9. จงหาภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{\beta} = 3\vec{i}-2\vec{j}$ บน $\vec{\alpha} = 2\vec{i}+4\vec{j}$ อะไรคือ ความสำคัญของผลลัพธ์ที่เป็นลบ

10. จงหาเวกเตอร์ในทิศทางของ $\vec{\alpha} = 3\vec{i}+2\vec{j}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{\beta} = \vec{i}+\vec{j}$ บน $\vec{\alpha}$

11. จงหางานที่ทำเพื่อเคลื่อนย้ายวัตถุไปตามเวกเตอร์ $2\vec{i}+6\vec{j}$ ถ้าแรงที่กระทำต่ออนุภาคเป็น $\vec{i}+2\vec{j}$

12. จงหางานที่ทำเพื่อเคลื่อนย้ายสิ่งของไปตามเวกเตอร์ $4\vec{i}-\vec{j}$ ด้วยแรง $2\vec{i}+2\vec{j}$

คำศัพท์ใหม่

zero vector or null vector	เวกเตอร์ศูนย์	6.1
Pythagorian theorem	ทฤษฎีบทพีธากอเรียน	6.2
direction angles	มุมแสดงทิศทาง	6.2
three-dimension space	ปริภูมิ 3 มิติ	6.2
unit vector	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	6.2
scalar product inner product dot product	ผลคูณสเกลาร์	6.3
law of cosine	กฎของโคไซน์	6.3