บทที่ 5
ระบบสมการเชิงเส้น

บทที่ 5
ระบบสมการเชิงเส้น
(System of linear equations)

5.1 บทนำ (Introduction)

จุดมุ่งหมายของหนังสือเล่มนี้ คือการเรียนเมตริกซ์เพื่อใช้ประโยชน์ในการหาคำตอบหรือรากของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งแยกการหาคำตอบเป็น 2 กรณี กรณีแรกเมื่อจำนวนสมการและจำนวนตัวไม่รู้ค่าเท่ากันและเมตริกซ์สัมประสิทธิ์หาตัวผกผันได้ กรณีที่สองอาจจะรู้สึกประหลาดใจว่าระบบสมการเกิดขึ้นได้อย่างไร ในเมื่อระบบสมการมีจำนวนตัวไม่รู้ค่ามากกว่าจำนวนสมการหรือจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวไม่รู้ค่า พิจารณาสองปัญหาต่อไปนี้

บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด R, S และ T สินค้าเหล่านี้ต้องใช้คนงานสองกลุ่มทำ กลุ่มหนึ่งเป็นช่างฝีมือและอีกกลุ่มเป็นกรรมกรที่ไม่มีความชำนาญ ใน 1 วันการผลิตสินค้า R หนึ่งหน่วยต้องใช้ช่างฝีมือ 5 คน และกรรมกร 5 คน การผลิตสินค้า S หนึ่งหน่วยต้องใช้ช่างฝีมือ 10 คน และกรรมกร 10 คน และสินค้า T หนึ่งหน่วยต้องใช้ช่างฝีมือ 2 คน และกรรมกร 4 คน ทางบริษัทต้องการทราบว่าจำนวนหน่วยของสินค้าที่ผลิตในแต่ละวันเป็นจำนวนเท่าใด เมื่อจ้างช่างฝีมือ 100 คน และกรรมกร 150 คน

ให้ x_1, x_2 และ x_3 แทนจำนวนหน่วยของ R, S และ T ตามลำดับ ดังนั้น ปัญหานี้สามารถเขียนเป็นระบบสมการ

$$5x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 100 \tag{5.1.1}$$

$$5x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 150 \tag{5.1.2}$$

การหาคำตอบหรือรากของระบบสมการนี้ ไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นได้อย่างเดียวได้ เพราะว่าถ้าเอาสมการ (5.1.1) ลบออกจาก (5.1.2) จะพบว่า $x_3 = 25$ แทนค่า x_3 ลงในสมการทั้งสอง ดังนั้นหลังจากลดรูปสมการจะกลายเป็น

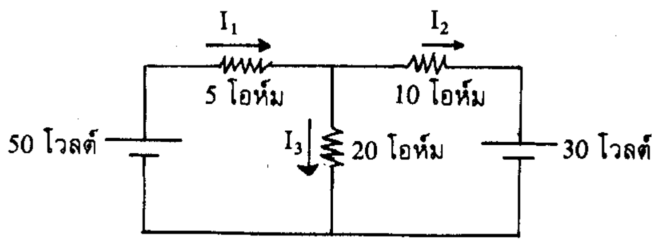
$$x_1 = 10 - 2x_2$$

และค่าที่เป็นไปได้ของ x_2 คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5 เมื่อ $x_3 = 25$ เราจะได้คำตอบสำหรับ x_1 และ x_2 ดังนี้

x_1	10	8	6	4	2	0
x_2	0	1	2	3	4	5

ดังนั้น เพื่อที่จะเลือกค่าที่เป็นไปได้เหล่านี้ ทางบริษัทจำเป็นต้องใช้การพิจารณาอื่น ๆ ด้วย

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นในเมื่อจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวไม่รู้ค่า ซึ่งจะพบได้ในระบบวงจรไฟฟ้าซึ่งแสดงตามรูป 5.1.1



รูป 5.1.1

ให้ I_1, I_2 และ I_3 แทนกระแสไฟฟ้ามีหน่วยเป็นแอมแปร์ ในส่วนของวงจรตามลำดับ ดังนั้นระบบสมการ คือ

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (5.1.3)$$

$$5I_1 + 20I_3 = 50 \quad (5.1.4)$$

$$10I_2 - 20I_3 = 30 \quad (5.1.5)$$

$$5I_1 + 10I_2 = 80 \quad (5.1.6)$$

ในระบบสมการนี้มีเพียงคำตอบเดียวที่สอดคล้องทุก ๆ สมการ นั่นคือ $I_1 = 6$, $I_2 = 5$ และ $I_3 = 1$ ในบทต้น ๆ เราเคยกล่าวว่ามีหลายตัวอย่างที่หาคำตอบของระบบสมการเมื่อปรากฏ m สมการเชิงเส้น และ n ตัวไม่รู้ค่า แต่ต่อไปนี้จะเรียนการนำเมตริกซ์ไปใช้หาคำตอบของระบบสมการว่าสามารถหาได้อย่างไร

พิจารณาระบบสมการ

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_n$$

$\cdot$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

เหมือนที่เคยพบมาแล้วและระบบสมการนี้สามารถเขียนในรูปสมการเมตริกซ์

$$AX = B$$

ในหัวข้อนี้สมาชิกของเมตริกซ์ A, B และ X เป็นสเกลาร์เวกเตอร์ X ใด ๆ ซึ่งสอดคล้องตามสมการเมตริกซ์ เรียกว่า คำตอบหรือรากของระบบสมการ

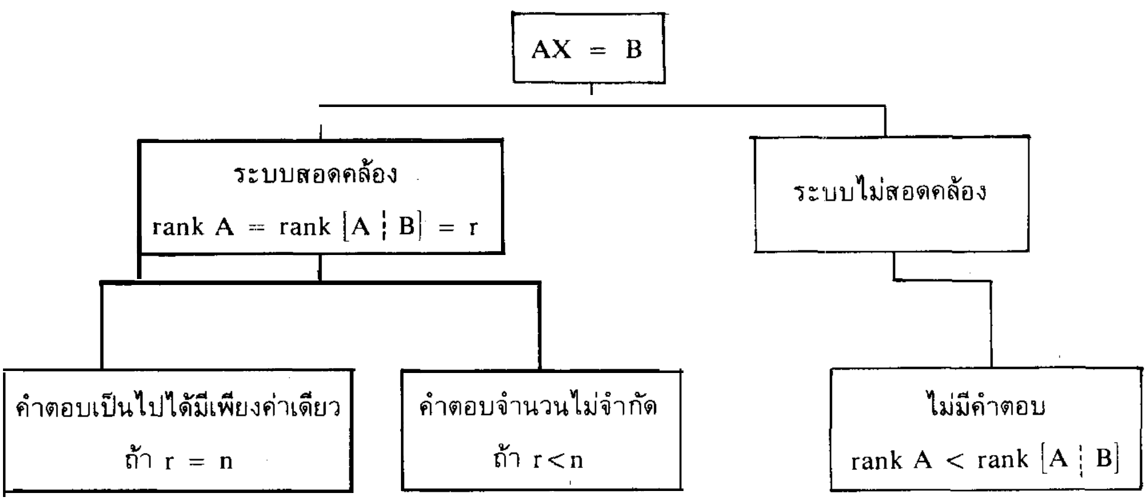
ถ้า $B = 0$ เรียกระบบสมการนี้ว่า "ระบบเอกพันธ์ (Homogeneous system)"

ถ้า $B \neq 0$ เรียกระบบสมการนี้ว่า "ระบบไม่เป็นเอกพันธ์ (Nonhomogeneous system)"

ในบทนี้จะแสดงว่าระบบสมการของ m สมการเชิงเส้น และ n ตัว ไม่รู้ค่า อาจจะ

1. ไม่มีคำตอบหรือรากในกรณีนี้เรียกว่า "ระบบไม่สอดคล้อง (inconsistent system)"
2. มีคำตอบหรือรากที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว
3. มีจำนวนคำตอบหรือรากถึงอนันต์ (infinite number of solutions)

ในสองกรณีหลังระบบนี้เรียกว่า "ระบบสอดคล้อง (consistent system) ดูรูป 5.1.2



รูป 5.1.2

ในทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปทำให้เราสามารถค้นพบความเหมาะสมก่อนการหาคำตอบได้ เมื่อกำหนดระบบสมการมาให้โดยการหาลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์แต่งเติม

ทฤษฎีบท 5.1.1 ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ เป็นระบบสอดคล้องก็ต่อเมื่อลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$ เท่ากับลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[A]$ (ถ้าค่าร่วมนี้หาค่าได้ จะเขียนแทนด้วย r และเรียกว่า "ลำดับชั้นของระบบ") นั่นคือ

$$\text{ลำดับชั้น } [A \mid B] \;=\; \text{ลำดับชั้น } [A] \;=\; r \tag{5.1.7}$$

พิสูจน์ ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ถ้ากระทำการแปลงแถวเชิงธาตุมูล (elementary row transformation) บนระบบสมการ $AX = B$ และ $[A \mid B]$ เหมือนกันอย่างเหมาะสม สุดท้ายจะได้ระบบสมมูลกับระบบเริ่มแรก (original system) ดังนี้

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x_1 + \ldots + c_{1,\,k+1}x_{k+1} + c_{1,\,k+2}x_{k+2} + \ldots + c_{1n}x_n - d_1 & = & 0 \\
x_2 + \ldots + c_{2,\,k+1}x_{k+1} + c_{2,\,k+2}x_{k+2} + \ldots + c_{2n}x_n - d_2 & = & 0 \\
x_k + c_{k,\,k+1}x_{k+1} + c_{k,\,k+2}x_{k+2} + \ldots + c_{kn}x_n - d_k & = & 0 \\
-d_{k+1} & = & 0 \\
-d_{k+2} & = & 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
-d_m & = & 0
\end{array}\right.$$

และเมตริกซ์แต่งเติมที่สมนัยกัน ดังนั้นถ้าจำนวนใด ๆ ของ $d_{k+1}, \ldots, d_m$ ไม่เป็นศูนย์ ก็จะเกิดการขัดแย้ง นั่นคือ ระบบสมการข้างต้นไม่สอดคล้อง ดังนั้น ระบบเริ่มแรก (original system) ซึ่งสมมูลไม่สอดคล้องด้วย แต่ถ้า $d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_m = 0$ สมการหลัง $m-k$ สมการยังคงสอดคล้องเหมือนกับ k สมการแรก เพราะว่าเราสามารถแก้สมการหาค่า $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ในพจน์ของ $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ได้ เพราะฉะนั้นถ้าระบบนี้สอดคล้องแล้วก็ต่อเมื่อ

$$d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_m = 0$$

เพราะว่า $|I_k| \neq 0$ ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A คือ k และเป็นลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมด้วยเมื่อ

$$d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_m = 0$$

แต่ถ้าค่าใดค่าหนึ่งของ $d_{k+1}, d_{k+2}, \ldots, d_m$ ไม่เป็นศูนย์ ลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมจะมากกว่า k เพราะฉะนั้น ถ้าระบบสอดคล้องก็ต่อเมื่อลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์แต่งเติมมีค่าเท่ากัน #

ทฤษฎีบท 5.1.2 ระบบสอดคล้องของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ มีคำตอบที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียว ก็ต่อเมื่อ $r = n$ (n คือจำนวนตัวไม่รู้ค่าของระบบสมการ)

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.1.1 เมื่อ $AX = B$ เป็นระบบสอดคล้อง ลำดับชั้นจะเท่ากับ k และเราสามารถหาคำตอบของตัวไม่รู้ค่า x_j ในพจน์ของ d_j และตัวไม่รู้ค่าที่เหลือ นั่นคือ

$$x_j = d_j - c_{j,\,k+1}x_{k+1} - c_{j,\,k+2}x_{k+2} - \ldots - c_{jn}x_n \qquad (j = 1, 2, \ldots . k)$$

ถ้าระบบสมการมีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว ดังนั้น $n - k = 0$ เพราะฉะนั้น $k = n$ ซึ่งหมายความว่า ลำดับชั้นของระบบสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่า ในทางกลับกัน ถ้าลำดับชั้นของระบบเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่า ดังนั้น $k = n$ และเพราะฉะนั้น $x_j = d_j$ ซึ่งเป็นคำตอบเพียงคำตอบเดียวในเมื่อ $j = 1, 2, \ldots, n$ #

ตัวอย่างที่ 5.1.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

วิธีทำ จำนวนสมการ $= m = 3$ และจำนวนตัวไม่รู้ค่า $= n = 3$

นั่นคือ $n = m = 3$

หาลำดับชั้นของ $[A]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$\begin{array}{r} \\ \widetilde{} \; -R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \\ 0 & -5 & - \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \widetilde{} \; -R_2 + R_3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{1}{5}R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{-3C_1+C_2\\ -C_1+C_3\\ -\frac{3}{5}C_2+C_3}}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I_2 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]$$

ซึ่งอยู่ในรูปนอร์แมล ดังนั้น ลำดับชั้นของ A คือ 2 หาลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติม $[A \mid B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 6\end{array}\right] \underset{\substack{-R_1+R_2\\ -2R_1+R_3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & & 1\\ 0 & -5 & -3 & 2\end{array}\right]$$

$$\underset{-\frac{1}{5}R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & \mathrm{II} & 2\\ 0 & 1 & \frac{31}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -5 & -3 & 2\end{array}\right]$$

$$\underset{5R_2+R_3}{}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{51} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

พิจารณาตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อย $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ขนาด 3×3

$$= (1)\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1\end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1\end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$= 1 \neq 0$$

เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 3

เนื่องจากลำดับชั้นของ $[A] \neq$ ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ ดังนั้น ระบบสมการนี้เป็นระบบไม่สอดคล้อง (ไม่มีคำตอบ)

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 4x_3 &= 2 \\
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

วิธีทำ จำนวนสมการ $= m = 4$

จำนวนตัวไม่รู้ค่า $= n = 3$

ระบบสมการนี้เป็นระบบสอดคล้องตามทฤษฎีบท 5.1.1 เพราะว่า ลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 3 และลำดับชั้นของ A คือ 3 $(r = 3)$ ใช้ทฤษฎีบท 5.1.2 จะได้ว่าระบบสมการนี้มีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว เพราะว่าลำดับชั้นของระบบเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่า $(r = n = 3)$

ตัวอย่างที่ 5.1.3 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 8 \\
2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

วิธีทำ ระบบสมการนี้มีจำนวนสมการ $m = 3$ และจำนวนตัวไม่รู้ค่า $n = 3$ นั่นคือ $m = n = 3$ ระบบนี้เป็นระบบสอดคล้องเพราะว่าลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 2 และลำดับชั้นของ A คือ 2 คำตอบไม่ใช่มีคำตอบเดียว (มีจำนวนคำตอบไม่จำกัด) เพราะว่า $r = 2$ และ $n = 3$

แบบฝึกหัด 5.1

จงแสดงว่าระบบสมการต่อไปนี้เป็นระบบไม่สอดคล้อง ระบบสอดคล้องและมีคำตอบเพียงค่าเดียว หรือระบบสอดคล้องและมีจำนวนคำตอบไม่จำกัดหรือไม่ จงหาลำดับชั้นของระบบ r (ถ้าเป็นไปได้) และบอกความสัมพันธ์ระหว่าง r และ n

(ก) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 = 4 \\ x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 2x_1+4x_2 = 0 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x_1-x_2+6 = 0 \\ x_1+2x_2-5 = 0 \\ 3x_1+3x_2-4 = 0 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 6 \\ x_1-x_2 = 2 \\ x_1-x_2+x_3 = 0 \\ 3x_1+2x_3 = 8 \end{cases}$

(ง) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-5 = 0 \\ x_1-x_2-x_3-4 = 0 \end{cases}$

(จ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ฉ) $AX = 0$ ในเมื่อ ๓ $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(ช) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4 = 2 \\ 2x_1+2x_3 = 0 \\ -x_1-x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1-x_3+x_4 = -2 \end{cases}$

(ซ) $AX = B$ ในเมื่อ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

2. ระบบสมการในแบบฝึกหัดข้อ 1 ชุดใดเป็นเอกพันธ์ (homogeneous)

3. จงแสดงว่า $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 1$ คือ คำตอบของระบบสมการต่อไปนี้หรือไม่

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

4. ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสอดคล้องของสมการเชิงเส้นซึ่งมี 5 ตัวไม่รู้ค่า คือ 4 เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมและจำนวนสมการได้อย่างไร

5. สมมติว่าเรากำหนดให้สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ 5 สมการ และ 5 ตัวไม่รู้ค่า ถ้า A คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และถ้า $\det A \neq 0$ เราสามารถพูดเกี่ยวกับคำตอบว่าอะไร

6. ระบบของสมการเชิงเส้นซึ่งมี 6 ตัวไม่รู้ค่าเป็นระบบสอดคล้องและมีคำตอบเพียงค่าเดียว เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมและเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ว่าอย่างไร และพูดเกี่ยวกับจำนวนสมการว่าอย่างไร ให้เหตุผล

7. ระบบ $AX = B$ ประกอบด้วยสมการเชิงเส้น m สมการ (ซึ่งอาจจะเป็นเอกพันธ์หรืออาจจะไม่เป็นเอกพันธ์) และ n ตัวไม่รู้ค่า กำหนดว่าลำดับชั้นของระบบนี้หาค่าได้ ทำไมจึงเป็นจริงว่า $r \leqslant m$ และ $r \leqslant n$

5.2 ระบบไม่สอดคล้อง (Inconsistent system)

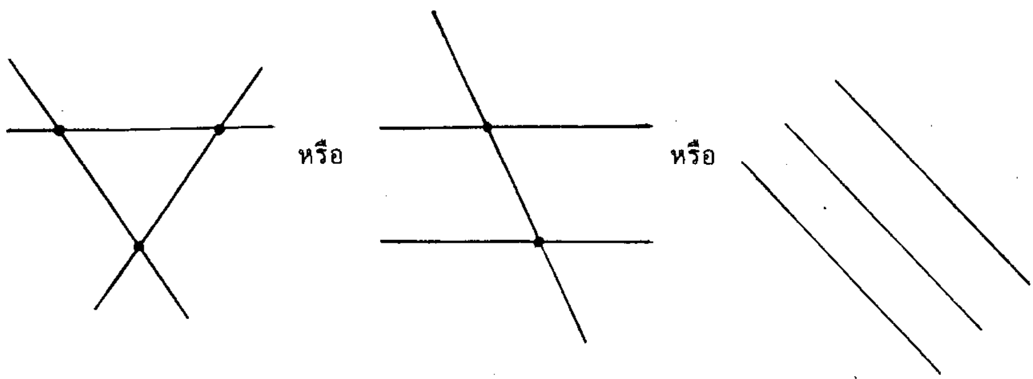
จากหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าระบบไม่สอดคล้องได้อธิบายแล้วในทฤษฎีบท 5.1.1 ซึ่งสามารถกล่าวได้ว่า ถ้าลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์แต่งเติมไม่เท่ากัน การหาคำตอบของระบบสมการสามารถยกเลิกได้ทันที

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

วิธีทำ ระบบสมการนี้เป็นระบบไม่สอดคล้อง เพราะว่า ลำดับชั้นของ A คือ 2 และลำดับชั้นของ $[A \mid B]$ คือ 3

ความหมายของระบบไม่สอดคล้องทางเรขาคณิต เมื่อ $n = 2$ และ $m = 3$ (m คือจำนวนสมการและ n คือจำนวนตัวไม่รู้ค่า) คือการเขียนกราฟของเส้นตรงได้ 3 เส้น แต่ไม่ตัดกันที่จุดร่วม (common point) จุดหนึ่ง นั่นคือเส้นตรงทั้งสามจะไม่ตัดกันที่จุดเดียวกัน แต่เส้นตรงสองเส้นอาจตัดกันที่จุดเดียวกันได้ ซึ่งแสดงดังรูป 5.2.1



รูป 5.2.1 *กราฟของระบบไม่สอดคล้อง*

สำหรับระบบเอกพันธ์ (Homogeneous system) $AX = 0$ $(B = 0)$ เป็นระบบสอดคล้องเสมอ เพราะว่าอย่างน้อยที่สุดจะมีคำตอบสำคัญน้อย (trivial solution) เป็นคำตอบหนึ่งของ $AX = 0$

หรืออาจกล่าวได้อีกอย่างว่า เนื่องจาก $B = 0$ เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์แต่งเติมมีค่าเท่ากัน ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5.1.1 สรุปได้ว่า ระบบเอกพันธ์ใด ๆ เป็นระบบสอดคล้อง

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงแสดงว่า ระบบต่อไปนี้ไม่สอดคล้อง และจงเขียนกราฟของสมการของแต่ละระบบ

(ก) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3 \\ 9x_1 - 3x_2 = 9 \\ -6x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. จงแสดงว่า ระบบต่อไปนี้ไม่สอดคล้องโดยการหาเฉพาะลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติม และจงอธิบายว่าทำไมไม่จำเป็นต้องหาลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ x - y = 4 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$$

3. จงพิจารณาระบบสอดคล้องต่อไปนี้สำหรับหลายค่าที่เป็นไปได้ของ b

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = b \end{cases}$$

4. โดยการตรวจสอบ จงบอกว่าทำไมระบบต่อไปนี้สามารถสอดคล้อง

(ก) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ 3x_2 = 9 \end{cases}$

5.3 ระบบสอดคล้องและคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว

(Consistent system with a unique solution)

ในตัวอย่างต่อไปนี้ เป็นการอธิบายทางเรขาคณิตของระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ 3 ตัวไม่รู้ค่า ซึ่งมีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว แต่ถ้าระบบสมการนี้มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว ลักษณะเช่นนี้การอธิบายทางเรขาคณิตจะเป็นไปไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5.3.1 พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{cases} (1) & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ (2) & 2x_2 + x_3 = 2 \\ (3) & x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

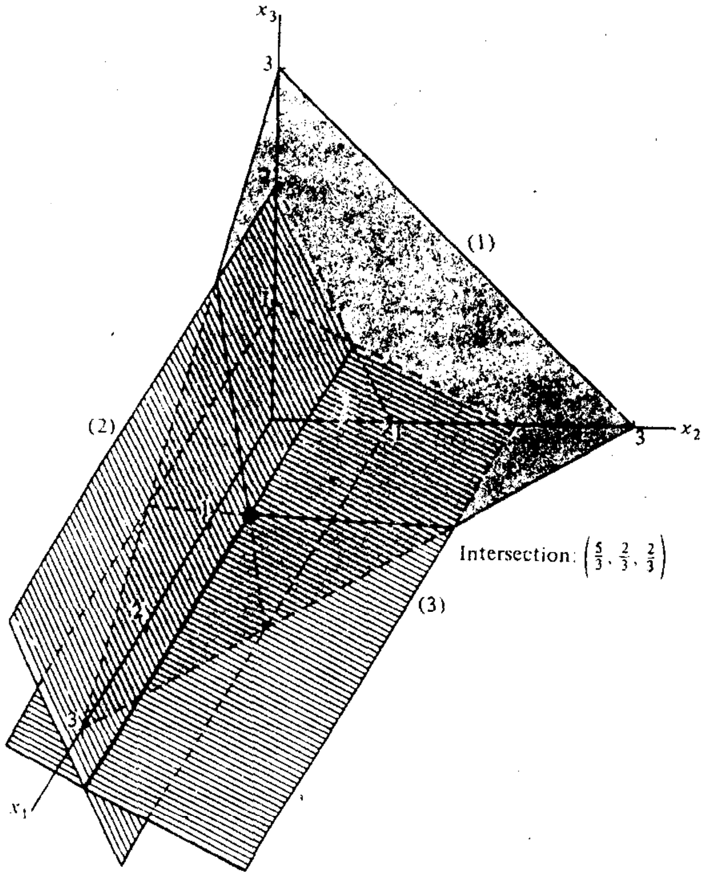
วิธีทำ $m = 3$ และ $n = 3$ เพราะว่า

$$\text{ลำดับชั้นของ } [A \vdots B] = \text{ลำดับชั้นของ } \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] = 3$$

$$\text{และลำดับชั้นของ } [A] = \text{ลำดับชั้นของ } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

เพราะฉะนั้น $r = n = 3$

ใช้ทฤษฎีบท 5.1.2 สรุปได้ว่า ระบบสมการนี้มีคำตอบที่เป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว ดูรูป 5.3.1



รูป 5.3.1

จากรูป 5.3.1 ถ้าแต่ละระนาบแทนสมการทั้งสาม ให้สังเกตว่าระนาบทั้งสามจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ นั่นคือพิกัด (coordinate) ของจุดนี้เท่านั้นที่สอดคล้องตามสมการทั้งสาม

จากหัวข้อ 5.1 พบว่า ระบบสมการซึ่งมีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว และได้รับการยอมรับโดยใช้ทฤษฎีบท 5.1.1 และทฤษฎีบท 5.1.2 เป็นที่แน่ชัดว่า การใช้ทฤษฎีบทเหล่านี้จำเป็นต้องหาลำดับชั้นของ r ของระบบได้ และจะต้องเท่ากับ n ด้วย วิธีหนึ่งที่ใช้หาค่าเพื่อให้ได้คำตอบ (ถ้ามีหนึ่งคำตอบ) คือ "วิธีทำเป็นขั้น (echelon method)" ซึ่งจะอธิบายในตัวอย่างที่ 5.3.2 โดยอาศัยความจริงที่ว่าระบบซึ่งสมนัยกับสมมูลตามแถวของเมตริกซ์แต่งเติม จะมีคำตอบเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 4 \\ x_1+2x_2+2x_3 = 2 \\ -x_1-x_2+x_3 = 2 \end{cases}$$

วิธีทำ ขั้นแรกแปลงเมตริกซ์แต่งเติมของระบบไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix) โดยวิธีการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลเหมือนตัวอย่างที่ 4.1.2 หัวข้อ 4.1 ดังนั้น

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \leftarrow -R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\left(\frac{1}{2}\right)R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

เมตริกซ์สุดท้าย คือ เมตริกซ์เป็นขั้น สามารถใช้ประโยชน์ในการหาลำดับชั้นของระบบ (ถ้าหาค่าได้) จากตัวอย่างนี้เราทราบว่า ลำดับชั้น r = 3 ค่านี้หาได้โดยการสังเกตว่า 3 สดมภ์แรกทางซ้ายมือของเมตริกซ์เป็นขั้นอยู่ในรูปเมตริกซ์ย่อยสามเหลี่ยม (triangular submatrix) และตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยสามเหลี่ยมไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5.1.1 และทฤษฎีบท 5.1.2 จะได้ว่า ระบบนี้สอดคล้องและมีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว เมตริกซ์ผลลัพธ์หรือเมตริกซ์เป็นขั้นสามารถเขียนใหม่เป็นระบบสมมูล (equivalent system)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 4 \\ x_2+x_3 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

โดยการแทนค่าจะหาคำตอบได้รวดเร็วกว่า นั่นคือ $x_1 = 6$, $x_2 = -5$ และ $x_3 = 3$ การอธิบายทางเรขาคณิตของตัวอย่างนี้ โดยกำหนดให้ระนาบทั้งสามผ่านจุด (6, −5, 3) การแทนค่าที่สุดท้ายของวิธีดำเนินการสามารถหลีกเลี่ยงได้ โดยการแปลงแถวเชิงธาตุมูลอย่างต่อเนื่องบนเมตริกซ์เป็นขั้นจนกระทั่งได้เมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น (reduced echelon matrix)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

ดังนั้นเมตริกซ์แต่งเติมสามารถเขียนใหม่ในรูประบบสมการ คือ

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad = 6 \\ \quad x_2 \quad\quad = -5 \\ \quad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

ซึ่งเราสามารถบอกได้เลยว่า คำตอบของระบบนี้ คือ (6, −5, 3) โดยไม่ต้องแทนค่าเหมือนข้างต้น

เพื่อจะหาเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวตามลำดับ ซึ่งจะแสดงวิธีทำดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{-R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_2+R_1}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\left(\frac{1}{2}\right)R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_3+R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

สรุป

1. วิธีหาคำตอบโดยทำให้ระบบสมการซึ่งเดิมเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์แต่งเติมแปลงไปอยู่ในรูปเมตริกซ์เป็นขั้น โดยวิธีแทนค่าจะหาคำตอบของระบบสมการได้ วิธีนี้เรียกว่า "การกำจัดของเกาส์เซียน (Gaussian elimination)"

2. จากข้อ 1 ถ้าลดรูปต่อไปจนกระทั่งเมตริกซ์ผลลัพธ์อยู่ในรูปเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น การหาคำตอบโดยวิธีนี้เรียกว่า "วิธีการลดรูปของเกาส์-ชอร์ดอง (Gauss-Jordan reduction method)"

วิธีทำเป็นขั้น (echelon method) สามารถใช้หาคำตอบของระบบสอดคล้องซึ่งอาจมีคำตอบเดียวหรือมากกว่า ตามความเป็นจริง วิธีทำเป็นขั้นสามารถใช้อธิบายกรณีระบบไม่สอดคล้องได้ด้วย ซึ่งจะแสดงตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.3.3 พิจารณา

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3 &= 4 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 2 \\ 3x_1+7x_2+x_3 &= 9 \end{cases}$$

วิธีทำ ใช้วิธีทำเป็นขั้น เขียนเมตริกซ์แต่งเติมแล้วแปลงไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (การดำเนินการเปลี่ยนสดมภ์เชิงธาตุมูล ใช้กับวิธีทำเป็นขั้นไม่ได้) ดังนั้น

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \end{array}\right] \underset{\substack{-R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{2R_2+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

เพราะว่าแถวสุดท้ายในเมตริกซ์ผลลัพธ์เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้นในสดมภ์สุดท้าย เพราะฉะนั้นลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะมีค่าน้อยกว่าลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติม ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5.1.1 กล่าวได้ว่าระบบไม่สอดคล้อง

ในบางกรณี ระบบสมการอาจมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวไม่รู้ค่า นั่นคือ $m>n$ วิธีหาคำตอบที่เหมาะสมในกรณีนี้คือ ใช้วิธีทำเป็นขั้น

ตัวอย่างที่ 5 . 3 . 4 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} (1) & 2x_1+x_2 = 1 \\ (2) & -4x_1+6x_2 = 6 \\ (3) & -2x_1+7x_2 = 7 \end{cases}$$

วิธีทำ โดยวิธีทำเป็นขั้น แปลงเมตริกซ์แต่งเติมไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{2R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right]$$

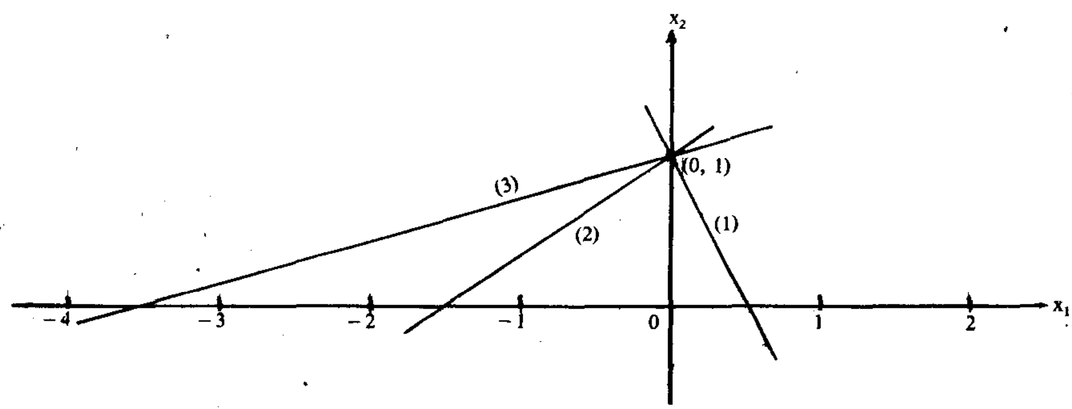
$$\underset{-R_2+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{\left(\frac{1}{2}\right)R_1 \\ \left(\frac{1}{8}\right)R_2}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

จะพบว่า $r = 2$ และระบบสมการนี้จะมีคำตอบเพียงค่าเดียว ซึ่งหาคำตอบได้จากการแทนค่าในระบบสมมูล

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

คำตอบคือ (0, 1) การอธิบายทางเรขาคณิตของตัวอย่างนี้ คือ มีเส้นตรงสามเส้นผ่านจุด (0, 1) ดูรูป 5.3.2



รูป 5.3.2 *กราฟของสมการเริ่มแรก*

เพื่อทบทวนความจำใหม่จากตัวอย่างที่ 5.3.1 จะหาคำตอบโดยวิธีเมตริกซ์ผกผัน (matrix inversion method) ซึ่งเรียนผ่านมาแล้วจากบทที่ 3

ตัวอย่างที่ 5.3.5 ใช้สัญลักษณ์เมตริกซ์จะได้

$$AX = B$$

หรือ
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

หรือ
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

การหาคำตอบโดยวิธีนี้ สิ่งจำเป็นคือ ต้องหาตัวผกผันของ A ได้ (A^{-1} หาได้ ถ้า $r = m = n$)

ข้อควรจำ กฎของเครเมอร์อาจจะใช้หาคำตอบของตัวอย่างที่ผ่านมาได้ กล่าวโดยสรุปคือ วิธีการผกผันและกฎของเครเมอร์จะใช้ในกรณีที่มีคำตอบเป็นไปได้เพียงคำตอบเดียว และ $m = n$

แบบฝึกหัด 5.3

1. แต่ละเมตริกซ์ต่อไปนี้ ได้จากเมตริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่กำหนดให้โดยใช้วิธีทำเป็นขั้น ในแต่ละกรณีจงบอกคำตอบของระบบเริ่มแรกซึ่งสมมูลกัน

(ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

(ค) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(จ) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ฉ) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

2. สำหรับแต่ละระบบต่อไปนี้ จงหาคำตอบโดยใช้วิธีเกาส์-ซอร์ดอง หรือวิธีทำเป็นขั้น จงแสดงว่าระบบสอดคล้องและมีคำตอบเพียงค่าเดียวหรือไม่ ถ้ามีจงหาคำตอบ (ตรวจสอบคำตอบด้วย)

(ก) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x,-x,-2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 7 = 0 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 \ -x,+3x, = 13 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -16 \end{cases}$

(ง) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_3 = 4 \\ 5x,-x, = 14 \end{cases}$

(จ) $\begin{cases} 2x,+x,-x, = -4 \\ x,-x,+3x, = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

(ฉ) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x,+x, = \frac{19}{2} \\ 4x_1 - 2x_2 = 9 \end{cases}$

(ช) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(ช)
$$\begin{cases} x,+2x,+x, = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

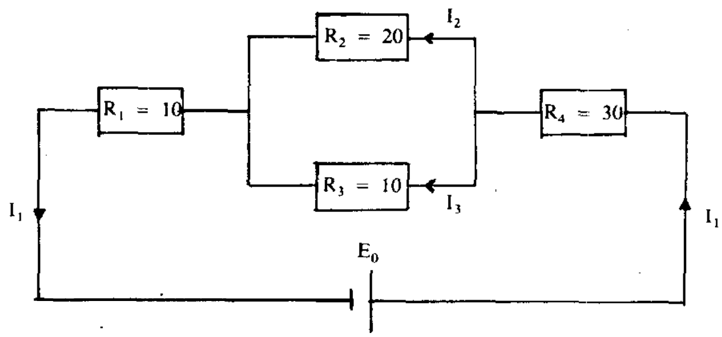
(ฌ)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x - y - 4z = -8 \\ 3x - 2y + 5z = 11 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

(ญ)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

3. จงอธิบายว่าอะไรจะเกิดขึ้นในเมตริกซ์เป็นขั้นเมื่อระบบไม่สอดคล้อง
4. จงวาดระนาบ $x + 2y + 2z = 6$, $2x + y + z = 6$ และ $3x + 2y + z = 9$ คาดคะเนจุดตัดกันของกราฟที่วาด แล้วจงหาคำตอบของสมการเหล่านี้โดยวิธีทำเป็นขั้น เพื่อหาจุดร่วมที่ถูกต้องของระนาบทั้งสามนี้
5. จากแผนภาพข่ายงาน (net work) ในรูปข้างล่างนี้ กฎของเคอร์ชอฟฟ์ให้ระบบสมการเป็น

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 20I_2 - 10I_3 = 0 \\ 40I_1 + 20I_2 = E_0 \end{cases}$$

จงหากระแส I_1, I_2 และ I_3



5.4 ระบบสอดคล้องและมีจำนวนคำตอบไม่จำกัด

(Consistent system with an infinite number of solutions)

ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงว่าระบบสมการ มีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบได้อย่างไร

ตัวอย่างที่ 5.4.1 พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

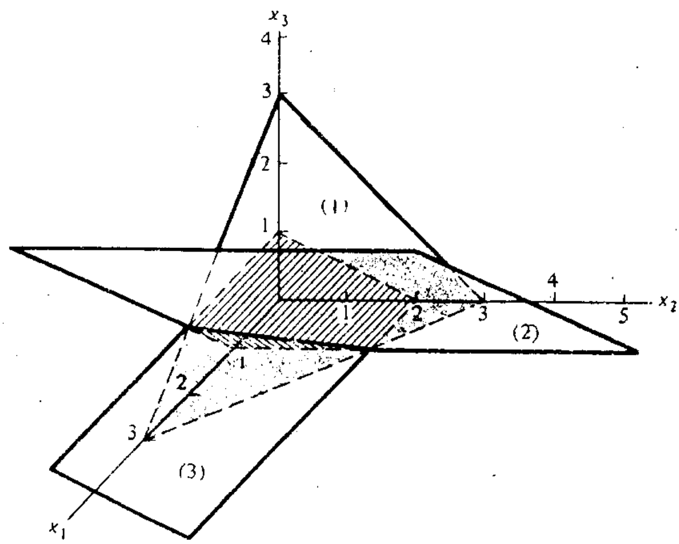
จงหาคำตอบของระบบสมการ

เพราะว่า ลำดับชั้น $[A \vdots B]$ = ลำดับชั้น $[A]$ = 2 = r และ n = จำนวนตัวไม่รู้ค่า = 3

เพราะฉะนั้น $r < n \ (2 < 3)$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการไม่ใช่มีเพียงคำตอบเดียว (ตามทฤษฎีบท 5.1.2)

ถ้าเขียนกราฟของระนาบทั้งสามจะพบว่าระนาบทั้งสามซึ่งแทนสมการทั้งสามตัดกันเป็นเส้นตรง ดังนั้น จะมีจำนวนของจุดไม่จำกัด ซึ่งสอดคล้องตามระบบสมการ ดูรูป 5.4.1



รูป 5.4.1 *แสดงจำนวนคำตอบ ไม่จำกัด*

ระบบสอดคล้องซึ่งมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบได้พิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท 5.1.1. และทฤษฎีบท 5.1.2 แล้ว (ระบบนี้ $r < n$) ระบบสมการนี้อาจหาคำตอบได้โดยเขียนเซตแน่นอนของตัวไม่รู้ค่า r ตัวในพจน์ของ $n-r$ ตัวไม่รู้ค่าอื่น ๆ (ขั้นนี้ได้แสดงการพิสูจน์แล้วในทฤษฎีบท 5.1.2) และ $n-r$ ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้ถูกพิจารณาเป็นตัวแปรเสริมไม่เจาะจง (arbitrary parameter) คำตอบที่ได้เรียกว่า "คำตอบสมบูรณ์หรือคำตอบทั่วไป (complete or general solutions)" ขั้นต่อไปถ้าแทนค่าตัวแปรเสริมไม่เจาะจงด้วยค่าใด ๆ จะได้คำตอบออกมามากมาย คำตอบที่ได้ใหม่โดยวิธีนี้เรียกว่า "คำตอบเฉพาะ (Particular solution)" ดูตัวอย่างประกอบ

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ระบบสมมูลคือ

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 2$$

เขียน x_1 และ x_2 ให้อยู่ในรูปตัวแปร x_3 จะได้

$$x_1 = 1 + x_3$$

และ

$$x_2 = 2 - 2x_3$$

ให้ $x_3 = t$ เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง (arbitrary constant) ดังนั้น

คำตอบ (x_1, x_2, x_3) สามารถเขียนใหม่ในรูป $(1+t, 2-2t, t)$ คำตอบในลักษณะนี้เรียกว่า คำตอบสมบูรณ์หรือคำตอบทั่วไปของระบบสมการ

ต่อไปถ้าแทนค่า t ด้วยจำนวนจริงใด ๆ เช่น

แทน $t = 0$ คำตอบที่ได้ใหม่คือ $(1, 2, 0)$

$t = 1$ คำตอบที่ได้ใหม่คือ $(2, 0, 1)$

$t = 2$ คำตอบที่ได้ใหม่คือ $(3, -2, 2)$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

คำตอบ $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ และ $(3, -2, 2)$ ซึ่งได้จากการแทนค่า $t = 0, 1, 2$ ตามลำดับ เรียกว่า "คำตอบเฉพาะ (particular solution)"

ตัวอย่างที่ 5.4.2 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

วิธีทำ โดยวิธีทำเป็นขั้นแปลงเมตริกซ์แต่งเติมไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล ดังนั้น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right] \underset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\left(\frac{1}{2}\right)R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

จากเมตริกซ์สุดท้าย (เมตริกซ์เป็นขั้น) พบว่า ลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมและเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต่างก็เท่ากับ 3 เพราะฉะนั้น ระบบสมการนี้เป็นระบบสอดคล้อง และ $r = 3$ จากระบบสมการเริ่มแรกเราทราบว่าคำตอบไม่ใช่มีคำตอบเดียว เพราะว่ามี 3 สมการ แต่มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว $(r < n)$

จากเมตริกซ์เป็นขั้น จะได้ระบบสมมูล

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= -1 \\ x_3 - 2x_4 &= 2 \end{cases}$$

หรือ

$$\begin{cases} x_1 &= 4 - x_4 - x_3 - x_2 \\ x_2 &= -1 + \frac{1}{2}x_4 - x_3 \\ x_3 &= 2 + 2x_4 \end{cases}$$

โดยการแทนค่าเขียน x_1, x_2 และ x_3 ให้อยู่ในพจน์ของ x_4 จะได้

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_4$$

$$x_2 = -3 - \frac{3}{2}x_4$$

$$x_3 = 2 + 2x_4$$

ถ้าให้ $x_4 = \lambda$ ซึ่งเป็นตัวแปรเสริมไม่เจาะจง ดังนั้นคำตอบทั่วไป

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(5 - \frac{3}{2}\lambda,\ -3 - \frac{3}{2}\lambda,\ 2 + 2\lambda,\ \lambda\right)$$

ถ้า $\lambda = 0$ คำตอบคือ (5, −3, 2, 0)

ดังนั้น เวกเตอร์ (5, −3, 2, 0) คือ คำตอบเฉพาะ

ถ้า $\lambda = 2$ คำตอบคือ (2, 0, 6, 2)

ดังนั้น เวกเตอร์ (2, 0, 6, 2) คือ คำตอบเฉพาะอื่น ๆ

กล่าวได้ว่า ถ้าตัวแปรเสริมไม่เจาะจงสามารถสมมติค่าได้จำนวนไม่จำกัด ดังนั้นจะมีจำนวนคำตอบเฉพาะไม่จำกัดด้วย

จากตัวอย่างที่ 5.4.2 เราสามารถเปลี่ยนแปลงแก้ไขวิธีกำจัดการแทนค่าตัวไม่รู้ค่าย้อนหลังเหมือนสมการที่ผ่านมา ตัวอย่างเช่น เมื่อเรามีเมตริกซ์เป็นขั้น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลอย่างต่อเนื่องเพื่อให้ได้เมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น ในปัญหานี้เมตริกซ์เป็นขั้นสามารถแปลงไปเป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{-R_2+R_1}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \underset{-R_3+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ถัดมา คือ เมตริกซ์แต่งเติมของระบบ

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{3}{2}x_4 = 5 \\ \quad x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 = -3 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

ซึ่งสามารถหาคำตอบทั่วไปได้ง่าย แต่เมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้นสามารถหาคำตอบทั่วไปได้โดยตรง โดยไม่ต้องหาจากเมตริกซ์เป็นขั้นเหมือนในตอนแรก การแปรผัน (หรือความแตกต่าง) ที่ถัดมา คือ "วิธีเกาส์-ชอร์ดอง (Gauss-Jordan method)"

ตัวอย่างที่ 5.4.3 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

วิธีทำ แปลงเมตริกซ์แต่งเติมไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 6 \\ 1 & 2 & 6 & \vdots & 14 \end{bmatrix} \underset{-R_1+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-R_2+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

จากเมตริกซ์สมมูลเพราะว่า $r = 2$ ใช้ทฤษฎีบท 5.1.1 และทฤษฎีบท 5.1.2 จะได้ว่า ระบบสอดคล้องซึ่งมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ และจากเมตริกซ์เป็นขั้นระบบสมมูล คือ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ \quad\;\; x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

หรือ
$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_2 - 3x_3 = 8 - (6 - 3x_3) - 3x_3 = 2 \\ x_2 = 6 - 3x_3 \end{cases}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ

$$\begin{cases} x_1 = 2 + (0)x_3 \\ x_2 = 6 - 3x_3 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

คำตอบทั่วไปอาจจะหาได้โดยการแสดงว่าเมตริกซ์เป็นขั้นสมมูลตามแถว $(-R_2 + R_1)$ กับเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์แต่งเติมของระบบ

$$x_1 = 2$$

$$x_2 + 3x_3 = 6$$

คำตอบทั่วไปกำหนดให้ตาม (5.4.1) นั่นคือ

$$x_3 = \frac{6 - x_2}{3}$$

ให้ $x_2 = \lambda$ เป็นตัวแปรเสริมไม่เจาะจง

ดังนั้น $$x_3 = \frac{6-\lambda}{3}$$

และคำตอบทั่วไป (x_1, x_2, x_3) คือ $\left(2, \lambda, \frac{6-\lambda}{3}\right)$

ทฤษฎีบท 5.4.1 ระบบที่สอดคล้องของสมการเชิงเส้นซึ่งมีลำดับชั้น r สามารถหาตัวไม่รู้ค่า r ตัว $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$ ในพจน์ของ $n-r$ ตัวไม่รู้ค่าที่เหลือได้ ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ย่อยของ
สัมประสิทธิ์ $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$ มีลำดับชั้นเท่ากับ r

พิสูจน์ กำหนดลำดับชั้นของเมตริกซ์ย่อยของสัมประสิทธิ์ตัวไม่รู้ค่า r ตัว คือ r ซึ่งเราเคยแสดงการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.1.2 แล้วว่า ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้สามารถหาได้ในพจน์ของ $n-r$ ตัวไม่รู้ค่าที่เหลือ

ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดว่า r ของตัวไม่รู้ค่า $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$ สามารถหาได้ในพจน์ของ $n-r$ ตัวไม่รู้ค่าอื่น ๆ ลำดับชั้นของระบบนี้จะเป็น r เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบนี้ คือ r และโดยการดำเนินการธาตุมูล สามารถแสดงว่าเท่ากับลำดับชั้นของเมตริกซ์ย่อยของสัมประสิทธิ์ $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ ในระบบเริ่มแรก

ตัวอย่างที่ 5.4.4 จากตัวอย่างที่ 5.4.3 ลำดับชั้นของระบบ คือ 2 ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ สำหรับ x_1 และ x_2 คือ 2 เพราะว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากความรู้เรื่องเมตริกซ์เป็นขั้น เราสามารถทำนายหาคำตอบของ x_1, x_2 ในพจน์ของ x_3 ได้ อย่างไรก็ตาม ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของ x_2 และ x_3 คือ 1 เพราะว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากผลลัพธ์นี้ เราสามารถทำนายได้ว่าจะไม่สามารถหาคำตอบของ x_2 และ x_3 ในพจน์ของ x_1 ได้ ซึ่งความรู้นี้ ได้จากเมตริกซ์เป็นขั้น $(r < n)$

แบบฝึกหัด 5.4

1. เมตริกซ์เป็นขั้นต่อไปนี้ ได้จากเมตริกซ์แต่งเติมของหลาย ๆ ระบบ โดยใช้วิธีทำเป็นขั้น เราสามารถพูดเกี่ยวกับธรรมชาติของคำตอบของระบบสมมูลและระบบเริ่มแรกในแต่ละกรณีได้อย่างไร

(ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(ค) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

2. โดยวิธีกำจัดเกาส์-ซอร์ดอง หรือวิธีทำเป็นขั้น จงหาว่าระบบสอดคล้องและมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบหรือไม่ ถ้ามีจงหาคำตอบทั่วไปและคำตอบเฉพาะหนึ่งคำตอบ

(ก) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x,-x,+x,-x, = 2 \end{cases}$

(จ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(ฉ) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x,+x, = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

(ช) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

3. จงอธิบาย จะเกิดอะไรขึ้นในวิธีทำเป็นขั้นเมื่อระบบสอดคล้องและมีจำนวนคำตอบไม่จำกัด
4. ในระบบเอกพันธ์ เราสามารถแน่ใจเสมอหรือไม่ว่าเวกเตอร์ศูนย์จะเป็นคำตอบเฉพาะ
5. ในระบบสอดคล้องต่อไปนี้ เราสามารถหา x_1 และ x_2 ในพจน์ของ x_3 ได้หรือไม่ ทำไม

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

6. ไม่ต้องหาคำตอบของระบบสมการ จงแถลงว่าตัวไม่รู้ค่าตัวไหนสามารถเขียนในพจน์ของตัวไม่รู้ค่าตัวอื่น

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

จงบอกเหตุผล

7. (ก) จงหาหนึ่งคำตอบพื้นฐานสำหรับ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(ข) จงหาเซตของตัวไม่รู้ค่าซึ่งจะให้เหมือนตัวแปรพื้นฐาน

8. (ก) ในระบบต่อไปนี้ ลำดับชั้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และเมตริกซ์แต่งเติม คือ 3 จงหาคำตอบของระบบสมการในพจน์ของ z นั่นคือให้ z เป็นตัวแปรเสริม (parameter) ในคำตอบทั่วไป

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ 2x + 2y + 2z + 5w = 3 \\ 2x - y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

(ข) ใช้คำตอบทั่วไปจากข้อ (ก) จงหาคำตอบพื้นฐาน

9. จงใช้กราฟอธิบายว่าทำไมระบบ $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ มีจำนวนคำตอบไม่จำกัด

คำศัพท์ใหม่

system of linear equations	ระบบสมการเชิงเส้น	5.1
homogeneous system	ระบบเอกพันธ์	5.1
nonhomogeneous system	ระบบไม่เป็นเอกพันธ์	5.1
inconsistent system	ระบบไม่สอดคล้อง	5.1
consistent system	ระบบสอดคล้อง	5.1
infinite number of solutions	คำตอบจำนวนไม่จำกัด	5.1
original system	ระบบเริ่มแรก	5.1
trivial solution	คำตอบสำคัญน้อย	5.1
coefficient matrix	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์	5.1
echelon method	วิธีทำเป็นขั้น	5.3
triangular submatrix	เมตริกซ์ย่อยสามเหลี่ยม	5.3
equivalent system	ระบบสมมูล	5.3
Gaussian elimination	การกำจัดของเกาส์เซียน	5.3
Gauss-Jordan reduction method	วิธีการลดรูปของเกาส์-ซอร์ดอง	5.3
arbitrary parameter	ตัวแปรเสริมไม่เจาะจง	5.4
complete solution general solution	คำตอบทั่วไป	5.4
particular solution	คำตอบเฉพาะ	5.4