บทที่ 4

การแปลงเมตริกซ์เชิงธาตุมูล

บทที่ 4
การแปลงเมตริกซ์เชิงธาตุมูล
(Elementary Transformation Matrices)

4.1 การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (Elementary row operation)

การแปลงเมตริกซ์ที่กำหนดให้ไปเป็นเมตริกซ์อื่นมีด้วยกันหลายแบบ ที่สำคัญมีอยู่ 3 แบบ ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

นิยาม 4.1.1 การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลของเมตริกซ์ คือการดำเนินการแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบต่อไปนี้

1. สับเปลี่ยน (interchange) ระหว่างสองแถวใด ๆ
2. คูณแถวใด ๆ ด้วยสเกลาร์ที่ไม่เป็นศูนย์
3. บวกแถวใด ๆ กับผลคูณของสเกลาร์กับแถวอื่น

ในทำนองเดียวกันนี้ การดำเนินการเปลี่ยนสดมภ์เชิงธาตุมูล (elementary column operation) นิยามคล้ายกับนิยาม 4.1.1 เพียงเปลี่ยนจากแถวเป็นสดมภ์เท่านั้น

การดำเนินการเชิงธาตุมูล (elementary operation) คือ การดำเนินการใด ๆ ทั้งการดำเนินการธาตุมูลตามแถวและการดำเนินการธาตุมูลตามสดมภ์

สัญลักษณ์ที่ใช้

การดำเนินการธาตุมูลตามแถวจะแทนด้วย R และการดำเนินการธาตุมูลตามสดมภ์จะแทนด้วย C ดังนั้น

$R_1 \leftrightarrow R_2$ หมายถึงการสับเปลี่ยนระหว่างแถวที่ 1 กับแถวที่ 2

$\left(\frac{1}{5}\right)R_2$ หมายถึงเอา $\frac{1}{5}$ คูณแถวที่ 2

$-2R_1 + R_2$ หมายถึงเอา (-2) คูณแถวที่ 1 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2

$C_2 \leftrightarrow C_3$ หมายถึงการสับเปลี่ยนระหว่างสดมภ์ที่ 2 กับสดมภ์ที่ 3

$4C_1$ หมายถึงเอา 4 คูณสดมภ์ที่ 1

$3C_4 + C_1$ หมายถึงเอา 3 คูณสดมภ์ที่ 4 แล้วนำไปบวกกับสดมภ์ที่ 1

นิยาม 4.1.2 ถ้าเมตริกซ์ A สามารถแปลงไปเป็นเมตริกซ์ B ได้ โดยการดำเนินการหนึ่งแบบหรือมากกว่า ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$ และกล่าวได้ว่า A สมมูล (equivalent) กับ B

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงแปลง $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ไปเป็น $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลข้อ 3 (เอา 2 คูณแถวที่ 1 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2)

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{2R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

นอกจากนี้ จะพบว่าเราสามารถแปลง $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$ ไปเป็น $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ได้ โดยเอา $\frac{1}{9}$ คูณแถวที่ 2 ของ B

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{9}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลเหล่านี้ สมนัยกับการดำเนินการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น และเรียกวิธีนี้ว่าวิธีการเพิ่ม-การลด

พิจารณาระบบสมการในตัวอย่างที่ 4.1.1 เมตริกซ์แรกคือ เมตริกซ์แต่งเติม (augment matrix) นั่นคือ

$$\begin{cases} x+3y = 4 \\ -2x+3y = 1 \end{cases}$$

เอา 2 คูณสมการแรกแล้วนำไปบวกกับสมการที่สองจะได้

$$\begin{cases} x+3y = 4 \\ 9y = 9 \end{cases}$$

คูณสมการที่สองด้วย $\frac{1}{9}$

$$\begin{cases} x+3y = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

สังเกตว่าการดำเนินการกระทำต่อสัมประสิทธิ์และด้านขวาของระบบสมการ จะเหมือนกับการดำเนินการในตัวอย่างที่ 4.1.1 ระบบสมการที่แสดงข้างต้นเรียกว่าสมมูลกัน เพราะว่าทั้งสามระบบมีคำตอบเหมือนกันตามความเป็นจริง เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นยังคงไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลกระทำต่อสัมประสิทธิ์และด้านขวาของระบบสมการ

จากตัวอย่างที่ 4.1.1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ สมมูลตามแถว **(row equivalent)** กับ B $= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

และสมมูลตามแถวกับ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ เราสามารถแสดงว่า ถ้า A สมมูลตามแถวกับ B ดังนั้น B สมมูลตามแถวกับ A ด้วย สมมูลตามแถว จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overset{\text{แถว}}{\sim}$

เพราะฉะนั้น

ถ้า $A \overset{\text{แถว}}{\sim} B$

และ $B \overset{\text{แถว}}{\sim} C$

ดังนั้น สรุปได้ว่า

$A \overset{\text{แถว}}{\sim} C$

ข้อสังเกต การแปลงเมตริกซ์หนึ่งไปเป็นเมตริกซ์อื่น จะใช้เฉพาะการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4.1.2 พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

เมตริกซ์แต่งเติม คือ $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$ ซึ่งสามารถแปลงได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{-2R_1+R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\left(\frac{1}{5}\right)R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าเมตริกซ์สุดท้ายคือเมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix) ซึ่งแทนเมตริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ นั่นคือ เมตริกซ์สุดท้ายสมมูลกับระบบสมการเริ่มแรก (มีคำตอบเหมือนกัน)

นอกจากนี้จะพบการประยุกต์หลาย ๆ แบบ ของการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล เช่น ใช้แปลงเมตริกซ์ใด ๆ เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 5 ในการหาคำตอบของระบบสมการ m สมการเชิงเส้น และ n ตัวไม่รู้ค่า ใช้หาตัวผกผันของเมตริกซ์ และจำเป็นมากในวิธีซิมเพลกซ์ (simplex method) ของการกำหนดการเชิงเส้น (linear programing) การประยุกต์เหล่านี้จะพิจารณาในโอกาสต่อไป

ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงประโยชน์ของการประยุกต์การดำเนินการเปลี่ยนสดมภ์เชิงธาตุมูลว่าเหมือนกับการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล

แบบฝึกหัด 4.1

1. การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลใด (ถ้ามี) แปลงเมตริกซ์แรกไปเป็นเมตริกซ์ที่สอง

(ก) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(ข) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. ในแต่ละแบบฝึกหัด ใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล เขียนเมตริกซ์เป็นขั้น นั่นคือ สมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ที่กำหนดให้ อธิบายการทำในแต่ละขั้นตอนโดยใช้สัญลักษณ์ย่อซึ่งแสดงในตัวอย่างที่ 4.1.2

(ก)
-2 2 1
[4 6 0]

(ข) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(ค)
3 1 4 6
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(ง)
[21 1 3
31 I0-3

3. จงเขียนเมตริกซ์แต่งเติมแต่ละข้อของระบบสมการต่อไปนี้ ให้แปลงเมตริกซ์แต่งเติมสมมูลตามแถว (row-equivalent) กับเมตริกซ์เป็นขั้น ดังนั้น จงเขียนระบบสมการในเมื่อเมตริกซ์เป็นขั้นนี้คือเมตริกซ์แต่งเติม คำตอบของระบบสมการสุดท้ายคืออะไร คำตอบนี้สอดคล้องตามระบบสมการเริ่มแรกหรือไม่

(ก) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 4y = 9 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 6 \\ 3x - y - 2z = 9 \end{cases}$

4. **จงหาคำตอบของระบบสมการ** $\begin{cases} 2x+3y = 2 \\ x+2y = 3 \end{cases}$ **โดยใช้วิธีการบวก-การลบแบบเก่า (ยังคงสมการทั้งสองตลอดเวลา) และใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลบนเมตริกซ์แต่งเติมให้สำเร็จจะได้คำตอบเท่ากัน**
5. **ในแต่ละคู่ของระบบสมการต่อไปนี้ คู่ใดเป็นระบบสมมูลกัน ให้เหตุผล**

(ก) $\begin{cases} x+y = 2 \\ x-y = 4 \end{cases}$ และ $\begin{cases} x+y = 2 \\ -x+y = 2 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x+y = 2 \\ x-y = 4 \end{cases}$ และ $\begin{cases} x-y = 4 \\ 2x+2y = 4 \end{cases}$

6. (ก) จงแสดงว่า ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลหนึ่งครั้ง ดังนั้นเมตริกซ์ A ได้จากเมตริกซ์ B โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลหนึ่งครั้งของแบบเดียวกัน

   (ข) จากข้อ (ก) ถ้าเมตริกซ์ A สมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ B ดังนั้น เมตริกซ์ B สมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ A
7. ถ้าเมตริกซ์ A สมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ B เปรียบเทียบขนาดของเมตริกซ์ A กับขนาดของเมตริกซ์ B จะเป็นอย่างไร
8. โดยไม่ต้องสลับเปลี่ยนแถว เปลี่ยน $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ไปเป็น $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ใน 4 ขั้น โดยใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (นั่นคือใช้การดำเนินการเปลี่ยนแปลงแถวเชิงธาตุมูลเฉพาะแบบที่ 2 และ 3 เท่านั้น) จากตัวอย่างนี้ต้องการแสดงให้เห็นว่าเราสามารถทำสิ่งเดียวกันด้วยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลแบบ 2 และ 3 เหมือนกับเราทำด้วยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลแบบ 1, 2 และ 3

4.2 รูปนอร์แมลและลำดับชั้น (Normal form and rank)

การดำเนินการเชิงธาตุมูลสามารถลดรูปเมตริกซ์หนึ่งไปเป็นเมตริกซ์รูปอื่นได้ และเรียกว่า "รูปนอร์แมล (Normal form)"

นิยาม 4.2.1 เมื่อเมตริกซ์ลดรูปโดยการดำเนินการเชิงแถว (หรือสดมภ์) ไปอยู่ในรูป

$$\left[\begin{array}{c} I_r \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{หรือ } I_r$$

ในเมื่อ r คือ ลำดับชั้น (rank)

กล่าวได้ว่าเมตริกซ์นั้นถูกลดรูปไปอยู่ในรูปนอร์แมล

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาลำดับชั้นโดยวิธีลดรูป

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ไปอยู่ในรูปนอร์แมล

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{-4C_1 + C_3 \\ -2C_1 + C_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-4C_2 + C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2R_2 + R_3}{\sim}$$

$$\underset{\frac{1}{10}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของ A คือ 3

ทฤษฎีบท 4.2.1 เมตริกซ์สมมูลกันจะมีลำดับชั้นเท่ากัน

แนวพิสูจน์ สำหรับเมตริกซ์สมมูลที่เป็นศูนย์ การพิสูจน์จะสำคัญน้อย (trivial) ส่วนกรณีอื่น สมมติว่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ A ที่กำหนดให้ไม่เป็นศูนย์คือ r เราจะแสดงว่าสำหรับแต่ละการดำเนินการเชิงธาตุมูลกระทำบน A ลำดับชั้นของเมตริกซ์ผลลัพธ์ B จะไม่น้อยกว่า r ดังนั้นทั้งสองการดำเนินการเชิงธาตุมูลไม่สามารถหาลำดับชั้นของ B มากกว่า r ได้ เพราะว่าการดำเนินการธาตุมูลผกผันของแบบเหมือนกัน สามารถได้ A จาก B และในขั้นนี้เป็นเหตุให้ลำดับชั้นของเมตริกซ์ลดลง (ซึ่งเราสามารถแสดงว่าเป็นไปไม่ได้)

พิสูจน์ ใน 3 กรณีต่อไปนี้ ให้ S เป็นเมตริกซ์ย่อยขนาด $r \times r$ ของเมตริกซ์เริ่มแรก A ซึ่ง $\det S \neq 0$

กรณีที่ 1 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการสับเปลี่ยนสองแถว (หรือสดมภ์) ของ A (A ไม่ใช่เมตริกซ์ขนาด 1×1) จะมีบางเมตริกซ์ย่อย M ขนาด $r \times r$ ของ B ซึ่ง $M = S$ หรือ M ได้จาก S โดยการสับเปลี่ยนสองแถว (หรือสดมภ์) หรือมากกว่าของ S ในเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง $\det M \neq 0$ ดังนั้น ลำดับชั้นของ B จะไม่น้อยกว่า r

กรณีที่ 2 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการคูณแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งของ A ด้วยตัวคงค่าที่ไม่เป็นศูนย์ จะมีบางเมตริกซ์ย่อย M ขนาด $r \times r$ ของ B ซึ่ง $M = S$ หรือ M ได้จาก S โดยการคูณแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งของ S ด้วยตัวคงค่าที่ไม่เป็นศูนย์ในเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง $\det M \neq 0$ ดังนั้น ลำดับชั้นของ B จะไม่น้อยกว่า r

กรณีที่ 3 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการคูณแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งของเมตริกซ์ A ด้วยสเกลาร์ แล้วนำไปบวกกับแถว (หรือสดมภ์) อื่นของ A (A ไม่ใช่เมตริกซ์ขนาด 1×1) เพื่อมิให้เสียคุณลักษณะทั่ว ๆ ไป เราสามารถสมมติการพิจารณาตามสดมภ์ โดยกำหนดให้

M คือ เมตริกซ์ย่อยขนาด $r \times r$ ของเมตริกซ์ B ซึ่งเข้าครอบครองที่ตั้งของ B เหมือนกับ S เข้าครอบครองใน A ดังนั้น ไม่ $M = S$ ก็ $M = [S_1 \mid \ldots \mid S_i + kA_j \mid \ldots \mid S_r]$ ในเมื่อ S_i

คือสดมภ์ที่ i ของ S และ A_j คือเมตริกซ์ย่อยที่เหมาะสมของสดมภ์ j ของ A ถ้า M = S ดังนั้น det M = det S $\neq$ 0 และลำดับชั้นของ B ไม่น้อยกว่า r

ถ้า $$M = [S_1 \mid \ldots \mid S_i + kA_j \mid \ldots \mid S_r]$$

จากแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 26 และทฤษฎีบท 2.3.7 จะได้

$$\det M = \det S + k \det[S_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid S_r]$$

ถ้า $\det[S_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid S_r] = 0$

ดังนั้น $\det M = \det S \neq 0$

นั่นคือ ลำดับชั้นของ B จะไม่น้อยกว่า r

หรือถ้า

$$\det[S_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid S_r] \neq 0$$

ดังนั้น จะมีเมตริกซ์ย่อยขนาด $r \times r$ ของ B (หาได้จากจำนวนสับเปลี่ยนที่แน่นอนของสดมภ์ของเมตริกซ์ $[S_1 \mid \ldots \mid A_j \mid \ldots \mid S_r]$) และตัวกำหนดของเมตริกซ์นี้ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น ลำดับชั้นของ B จะไม่น้อยกว่า r #

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาลำดับชั้นของ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยการจัดให้อยู่ในรูปนอร์แมล หลักการจัดให้อยู่ในรูปนอร์แมล เราจะทำให้ตัวเลขในตำแหน่ง a_{11} เป็น 1 ก่อนเสมอ

$$A \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

หลังจากนั้น ทำให้ตัวเลขอื่น ๆ ในสดมภ์ที่ 1 เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้นตำแหน่งที่ a_{11}

$$\underset{-R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ต่อไปพยายามทำให้แถวที่ 1 เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้นตำแหน่ง a_{11}

$$\begin{array}{l} -2C_1+C_2 \\ -3C_1+C_3 \\ -C_1+C_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2+R_4}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -C_2+C_3 \\ -C_2+C_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของรูปนอร์แมลคือ 2 ดังนั้น จากทฤษฎีบท 4.2.1 ลำดับชั้นของ A คือ 2 ด้วย

การหาลำดับชั้นของเมตริกซ์สามารถหาได้โดยการลดรูปเมตริกซ์ไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix) โดยการดำเนินการตามแถว (row operation) เท่านั้น จำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ในเมตริกซ์เป็นขั้น คือลำดับชั้นของเมตริกซ์ (rank of matrix) ตัวอย่างเช่น การลดรูปเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้นในรูปทั่ว ๆ ไป

$$\begin{array}{r|ccccccc|}
 & 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n}\\
 & 0 & 1 & a_{23} & & & a_{2r} & a_{2n}\\
r\text{ แถว} & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & a_{rn}\\
 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0\\
k\text{ แถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมด} & \cdot & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของเมตริกซ์ A คือ $r = m-k$

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาลำดับชั้นของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยการลดรูป A ให้อยู่ในรูปเป็นขั้น (echelon form) โดยใช้การดำเนินการแบบแถว เท่านั้น จะได้

$$A \underset{-2R_1+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-R_2+R_3}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

สรุปได้ว่า ลำดับชั้นของเมตริกซ์เป็นขั้นแน่นอนไม่ใช่ 3 เพราะว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยใด ๆ ขนาด 3×3 เป็นศูนย์ และเนื่องจากเมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ตรงมุมบนซ้ายเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม และตัวกำหนดของเมตริกซ์นี้ไม่เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของเมตริกซ์เป็นขั้นคือ 2 ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.1 สามารถกล่าวได้ว่าลำดับชั้นของ A คือ 2 ด้วย

แบบฝึกหัด 4.2

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหาลำดับชั้นของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ โดยการลดรูปไปอยู่ในรูปนอร์แมล

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 46 & 780 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. จงหาลำดับชั้นของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ในข้อ 2 โดยการลดรูปไปเป็นเมตริกซ์เป็นขั้นใช้เฉพาะการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล

8. ทำเหมือนข้อ 7 โดยใช้เมตริกซ์ที่กำหนดให้ในข้อ 6
9. รูปนอร์แมลของเมตริกซ์ขนาด 4×6 ซึ่งมีลำดับชั้น 2 คืออะไร แยกคำตอบโดยใช้เมตริกซ์ย่อย
10. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ สมมูลกับ I_3 หรือไม่ ทำไม
11. เมตริกซ์ใดต่อไปนี้สมมูลกัน

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

12. ใช้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และการดำเนินการเปลี่ยนสดมภ์เชิงธาตุมูลเพื่อแสดงแต่ละกรณีของการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.1
13. แถลงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับสองเมตริกซ์ซึ่งสมมูลกัน

4.3 เมตริกซ์ธาตุมูล (Elementary matrices)

นิยาม 4.3.1 เมตริกซ์ธาตุมูลคือ เมตริกซ์ใด ๆ ที่ได้จากการดำเนินการธาตุมูลบนเมตริกซ์เอกลักษณ์ I_n หนึ่งครั้ง

ตัวอย่างที่ 4.3.1 แบบของเมตริกซ์ธาตุมูล

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

ในเมื่อ

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสับเปลี่ยนสดมภ์ที่ 2 และสดมภ์ที่ 3 ของ I_3 หรือเกิดจากการสับเปลี่ยนแถวที่ 2 และแถวที่ 3 ของ I_3

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการเอาสเกลาร์ c คูณสดมภ์ที่ 2 ของ I_3 หรือเกิดจากการเอาสเกลาร์ c คูณแถวที่ 2 ของ I_3

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$ เกิดจากการเอาสเกลาร์ c คูณสดมภ์ที่ 3 ของ I_3 แล้วไปบวกกับสดมภ์ที่ 2 ของ I_3

การดำเนินการธาตุมูลเชิงเดี่ยว (single elementary operation) ใด ๆ ของเมตริกซ์สามารถทำได้สำเร็จ (หาได้) โดยการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ธาตุมูลที่เลือกได้เหมาะสม

ตัวอย่างที่ 4.3.2 เพื่อจะสับเปลี่ยนแถวแรกและแถวที่สองของเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ ให้คูณข้างหน้า A ด้วยเมตริกซ์

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า เมตริกซ์ธาตุมูล E_1 ที่ต้องการหาได้โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวแบบที่ 1 บนเมตริกซ์เอกลักษณ์ อันดับขนาดเหมาะสมนั่นคือ

$$E_1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{สลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2}$$

เพื่อจะสับเปลี่ยนสดมภ์ที่หนึ่งและสดมภ์ที่สองของ A ให้คูณข้างหลัง A ด้วย

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

สลับสดมภ์ที่ 1 และสดมภ์ที่ 2

นั่นคือ

$$AE_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 เพื่อจะคูณแถวที่สองของ $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ ด้วยสเกลาร์ที่ไม่เป็นศูนย์ c ให้คูณข้างหน้า A ด้วย

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \end{matrix}$$

เพื่อจะคูณสดมภ์ที่สองของ A ด้วย c ให้คูณข้างหลัง A ด้วย

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$AE_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \\ a_{31} & ca_{32} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 เพื่อจะคูณ k กับแถวที่สองแล้วนำไปบวกกับแถวแรกของเมตริกซ์ A = $[a_{ij}]_{3\times 2}$ ให้คูณข้างหน้าเมตริกซ์ A ด้วย

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

เพื่อจะคูณ k กับสดมภ์ที่สองแล้วนำไปบวกกับสดมภ์ที่หนึ่งของ A ให้คูณข้างหลังเมตริกซ์ A ด้วย

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$AE_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} \end{bmatrix}$$

จากนิยามของเมตริกซ์ธาตุมูลซึ่งได้จากการกระทำการดำเนินการธาตุมูลเชิงเดี่ยวของเมตริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งเป็นไปได้สำหรับการพิสูจน์ว่า เมตริกซ์ธาตุมูล E ใด ๆ หาค่าตัวผกผันได้ ถ้า EA = B ดังนั้น คูณข้างหน้าทั้งสองข้างของสมการด้วย E^{-1} จะได้

$$\begin{aligned} E^{-1}(EA) &= E^{-1}B \\ (E^{-1}E)A &= E^{-1}B \\ I_nA &= E^{-1}B \\ A &= E^{-1}B \end{aligned}$$

กล่าวได้อีกอย่างว่า ตัวผกผัน E^{-1} จะหาค่าได้ เมื่อ E ดำเนินการกับ A ได้

ข้อสังเกต เมตริกซ์ธาตุมูลไม่เป็นเอกฐาน (nonsingular) เพราะว่า E สมมูลกับ I (E ~ I)

นิยาม 4.3.2 เมตริกซ์ธาตุมูลแบบแถว คือเมตริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินการธาตุมูลแบบแถวบนเมตริกซ์เอกลักษณ์หนึ่งครั้ง

นิยาม 4.3.3 เมตริกซ์ธาตุมูลแบบสดมภ์ คือเมตริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินธาตุมูลแบบสดมภ์ของเมตริกซ์เอกลักษณ์หนึ่งครั้ง

การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ธาตุมูล

1. ให้ $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์นี้เกิดจากการสลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ I_3

จะได้ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

หรือ $E_1^{-1}E_1 = -1$,

ดังนั้น $E_1^{-1} = E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. ให้ $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ (& & \\ 0 & 0c0 & \end{bmatrix}$

เมตริกซ์นี้เกิดจากการคูณแถวที่ 2 ของ I_3 ด้วย c

จะได้ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

หรือ $E_2^{-1}E_2 = I_3$

ดังนั้น $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์นี้เกิดจากการคูณแถวที่สองของ I_3 ด้วย $1/c$

3. ให้ $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์นี้เกิดจากการคูณแถวที่สองด้วย k แล้วนำไปบวกกับแถวที่หนึ่ง

จะได้ $\begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

หรือ $E_3^{-1}E_3 = I_3$

ดังนั้น $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์นี้เกิดจากการคูณแถวที่สองด้วย $-k$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่หนึ่ง

ทฤษฎีบท 4.3.1 ทุก ๆ เมตริกซ์ธาตุมูลมีตัวผกผันเป็นเมตริกซ์ธาตุมูลแบบเดียวกัน

พิสูจน์ เมตริกซ์ธาตุมูลแบบแถว (หรือสดมภ์) E เกิดจากการดำเนินการธาตุมูลแบบแถว (หรือสดมภ์) ข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อกับเมตริกซ์เอกลักษณ์ I ดังนั้น การดำเนินการซึ่งกลับกันจะทำให้กลับไปเป็น I ตามเดิม (ดูตัวอย่างที่เพิ่งผ่านมา) นั่นคือ ตัวผกผันของ E_1 คือ E_1 และตัวผกผันของ E_2 (เมื่อ $c \neq 0$) จะเหมือนกับ E_2 ยกเว้น c ถูกแทนด้วย $\frac{1}{c}$ ถ้า E_3 เกิดจาก I โดยการคูณแถวที่ i (หรือสดมภ์ที่ i) ของ I ด้วย k แล้วนำไปรวมกับสมาชิกที่สมนัยในแถว (หรือสดมภ์) ที่ j ดังนั้น E_3^{-1} ได้จากการคูณสมาชิกในแถว (หรือสดมภ์) ที่ i ของ I ด้วย $-k$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกที่สมนัยในแถว (หรือสดมภ์) ที่ j นั่นคือ ตัวผกผันของเมตริกซ์ธาตุมูลเกิดจากเมตริกซ์ธาตุมูลแบบเดียวกัน #

เมตริกซ์ 3 คู่ต่อไปนี้ คือเมตริกซ์ธาตุมูลและตัวผกผันของมัน

$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.3.2 ถ้าเมตริกซ์ A และ B สมมูลกัน ดังนั้นจะหาค่าสองเมตริกซ์ผกผัน P และ Q ได้ และ $A = PBQ$

พิสูจน์ เพราะว่าเมตริกซ์ A และ B สมมูลกัน เพราะฉะนั้น จะหาเมตริกซ์ธาตุมูล $E_1, E_2, \ldots, E_h$ และ $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ได้ ดังนั้น

$$(E_h \ldots E_2E_1)A(F_1F_2 \ldots F_k) = B$$

ถ้า $P_i = E_i^{-1}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, h$ และ $Q_j = F_j^{-1}$ เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, k$ ดังนั้น เมตริกซ์ P_i และ Q_j เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลด้วยตามทฤษฎีบท 4.3.1 ดังนั้น การคูณข้างหน้าและข้างหลังทั้งสองข้างของสมการด้วยเมตริกซ์ผกผันที่สมนัย จะได้

$$A = (P_1P_2 \ldots P_h)B(Q_k \ldots Q_2Q_1)$$

ให้ P คือผลคูณของเมตริกซ์ผกผัน $P_1P_2 \ldots P_h$

และ Q คือผลคูณของเมตริกซ์ผกผัน $Q_k \ldots Q_2Q_1$

ดังนั้น $$A = PBQ$$ #

บทแทรกทฤษฎีบท 4.3.2 ถ้าเมตริกซ์ A และ B สมมูลแบบแถว ดังนั้น จะหาเมตริกซ์ผกผัน P ได้ และ $A = PB$

ทฤษฎีบท 4.3.3 เมตริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน (nonsingular) ใด ๆ สามารถเขียนในรูปผลคูณเมตริกซ์ธาตุมูล

พิสูจน์ เพราะว่าเมตริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน A ใด ๆ จะสมมูลกับเมตริกซ์เอกลักษณ์ I (ตามนิยามการสมมูล) ดังนั้น จะมีเมตริกซ์ธาตุมูล B_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, k$ และ C_j เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, h$ ซึ่งทำให้

$$(B_k \ldots B_2B_1)A(C_1C_2 \ldots C_h) = I$$

ถ้า $D_i = B_i^{-1}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, k$ และ $F_j = C_j^{-1}$ เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, h$ ดังนั้น เมตริกซ์ D_i และ F_j ต่างก็เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลแบบเดียวกัน (ตามทฤษฎีบท 4.3.1) ดังนั้นการคูณข้างหน้าและข้างหลังทั้งสองข้างของสมการด้วยเมตริกซ์ผกผันที่สมนัยจะได้

$$A = (D_1D_2 \ldots D_k)I(F_h \ldots F_2F_1)$$

นั่นคือ เมตริกซ์ A สามารถเขียนในรูปผลคูณของเมตริกซ์ธาตุมูล #

ทฤษฎีบท 4.3.4 ถ้า E เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลใด ๆ ดังนั้น

1. $\det EA = \det E \det A$ และ (4.3.1)
2. $\det AE = \det A \det E$ (4.3.2)

พิสูจน์ เพราะว่าเมตริกซ์ E เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลใด ๆ ดังนั้นเมตริกซ์ธาตุมูล E อาจจะเป็นชนิดที่ 1, 2 หรือ 3 ก็ได้ ซึ่งจะแยกการพิจารณาแต่ละกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า E เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลชนิดที่ 1 ดังนั้น EA และ AE คือเมตริกซ์ซึ่งได้จากการสับเปลี่ยนระหว่างสองแถว (หรือสดมภ์) ใด ๆ ของ A ตามลำดับ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้

$$\det EA = -\det A = \det E \det A; \qquad \det E = 1$$

และ

$$\det AE = -\det A = \det A \det E; \qquad \det E = 1$$

กรณีที่ 2 ถ้า E เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลชนิดที่ 2 ดังนั้น EA และ AE คือเมตริกซ์ซึ่งได้จากการคูณแถว (หรือสดมภ์) ใด ๆ ของ A ด้วย c ตามลำดับ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.7 จะได้

$$\det EA = c \det A = \det E \det A; \qquad \det E = c$$

และ

$$\det AE = c \det A = \det A \det E; \qquad \det E = c$$

กรณีที่ 3 ถ้า E เป็นเมตริกซ์ธาตุมูลชนิดที่ 3 ดังนั้น EA และ AE คือเมตริกซ์ซึ่งได้จากการเอา c เท่าของแถว (หรือสดมภ์) ที่ i ไปบวกกับแถว (หรือสดมภ์) ที่ j ของเมตริกซ์ A ตามลำดับ เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท *2.3.9* จะได้

$$\det EA = \det A = \det E \det A; \qquad \det E = 1$$

$$\det AE = \det A = \det A \det E; \qquad \det E = 1$$

จาก 3 กรณีข้างต้น สรุปได้ว่าไม่ว่า E จะเป็นเมตริกซ์ธาตุมูลชนิดใด ๆ เราจะได้

$$\det EA = \det E \det A$$

และ $\det AE = \det A \det E$ #

จากทฤษฎีบท 4.3.4 เราสามารถขยายทฤษฎีบทนี้ให้กว้างขึ้นได้ กล่าวคือ

ถ้า $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$

ดังนั้น $\det B = \det E_k \det E_{k-1} \ldots \det E_2 \det E_1 \det A$ (4.3.3)

และถ้า $B = A E_1 E_2 \ldots E_{k-1} E_k$

ดังนั้น $\det B = \det A \det E_1 \det E_2 \ldots \det E_{k-1} \det E_k$ (4.3.4)

แบบฝึกหัด 4.3

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึงข้อ 6 จะเขียนเมตริกซ์ธาตุมูล E ซึ่งกระทำการแปลงธาตุมูลบน

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น คูณเมตริกซ์เพื่อให้ได้การแปลงที่ต้องการ

1. สับเปลี่ยนแถวแรกและแถวที่สอง
2. สับเปลี่ยนสดมภ์แรกและสดมภ์ที่สาม
3. คูณแถวที่สองด้วย 9
4. คูณสดมภ์ที่สามด้วย 7
5. บวก 4 คูณกับแถวแรกกับแถวที่สอง
6. บวก 5 คูณสดมภ์ที่สามกับสดมภ์แรก

ในแบบฝึกหัดข้อ 7 ถึงข้อ 10 จงแสดงทฤษฎีบท 4.3.2 โดยหาเมตริกซ์ P และ Q

7. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $B = \begin{bmatrix} 1 & & 1,0 \\ (& &) \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. กำหนดว่า $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ ได้จากเมตริกซ์ A โดยบวก 2 คูณสดมภ์ที่สองของ A กับสดมภ์แรกของ A การดำเนินการธาตุมูลนี้สามารถแยกเป็น

    $AE = B$ หรือ $AEE^{-1} = BE^{-1}$ หรือ $A = BE^{-1}$

    จงหา A โดยหา E ก่อน แล้วหา E^{-1} และต่อไปคูณเหมือนที่แสดงข้างบน

12. ทำเหมือนข้อ 11 โดยใช้ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

13. ทำเหมือนข้อ 11 ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เราสามารถสรุปได้หรือไม่ว่า $E = A^{-1}$

4.4 การหาค่าผกผันโดยการดำเนินการธาตุมูล

(Calculation of the inverse by elementary operations)

ทฤษฎีบท 4.4.1 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และถ้าเมตริกซ์ $[A \vdots I_n]$ สามารถแปลงไปเป็นเมตริกซ์สมมูล $[I_n \vdots B]$ โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล ดังนั้น B คือตัวผกผันของ A

พิสูจน์ ถ้า $[A \vdots I_n]$ สมมูลแบบแถวกับ $[I_n \vdots B]$ ดังนั้น จากบทแทรกของทฤษฎีบท 4.3.2 จะมีเมตริกซ์ P ซึ่ง

$$P[A \vdots I_n] = [I_n \vdots B]$$

ดังนั้น จะได้

$$[I_n \vdots B] = P[A \vdots I_n] = [PA \vdots PI_n] = [PA \vdots P]$$

เพราะฉะนั้น $PA = I_n$

และ $B = P$

นั่นคือ จะได้ว่า

$$BA = I_n$$

หรือ $B = A^{-1}$ #

ตัวอย่างที่ 4.4.1 จงหา A^{-1} ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_1 + R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{-R_2 + R_3 \\ -2R_2 + R_1}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{-2R_3+R_2\\3R_3+R_1}}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบว่า $AA^{-1} = I_3$ หรือไม่

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อเมตริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n \times n$ มีลำดับชั้นเป็น n ดังนั้นในกรณีที่ลำดับชั้นของ A น้อยกว่า n ทฤษฎีนี้จะใช้ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4.4.2 พิจารณา

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{-3R_1+R_2}{\overset{\text{แถว}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

สังเกตว่าเมตริกซ์ A ขนาด 2×2 ถูกแปลงไปเป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น ซึ่งลำดับชั้นของ A น้อยกว่า 2 ดังนั้น A หาตัวผกผันไม่ได้

แบบฝึกหัด 4.4

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหา A^{-1} (ถ้าเป็นไปได้) โดยวิธีที่เรียนมาในหัวข้อนี้ ถ้า A^{-1} หาค่าได้ ให้ตรวจสอบโดยแสดงว่า $AA^{-1} = I_n$

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} & \\ 48 & -1-2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 311 & 001 & 001 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ในแบบฝึกหัดข้อ 7 ถึงข้อ 10 จงหาคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้ (ถ้าเป็นไปได้) โดยใช้เมตริกซ์ผกผันซึ่งคำนวณตามทฤษฎีบท 4.4.1

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

9. $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1+2x_2+x_3 = 0 \end{cases}$$

11. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-2} และ A^{-3} โดยใช้ทฤษฎีบท 4.4.1

12. กำหนดว่า A และ B ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ขนาด $n \times n$ และ $AB = 0$ ถามว่า $A \overset{\text{แถว}}{\sim} I_n$ ใช่หรือไม่ และทำไม

13. กำหนดว่าการแปลงแถวเชิงธาตุมูล (elementary row transformations) กระทำต่อสองเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ และ $K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ จนกระทั่งกลายเป็น $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ ตามลำดับ ความเกี่ยวดองระหว่าง A และ B คืออะไร

14. จงหา A^{-1} ในแบบฝึกหัดข้อ 3 โดยใช้วิธีที่เรียนมาในบทที่ 3

15. จงอธิบายว่าอะไรจะเกิดขึ้นถ้าเราพยายามใช้วิธีหา A^{-1} ที่เรียนมาในหัวข้อนี้ของเมตริกซ์ A ซึ่งมีตัวกำหนดเป็นศูนย์

16. ทำไมจึงมีความจำเป็นต้องการการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูลในทฤษฎีบท 4.4.1

คำศัพท์ใหม่

elementary transformation matrix	การแปลงเมตริกซ์เชิงธาตุมูล	4.1
elementary row operation	การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล	4.1
elementary column operation	การดำเนินการเปลี่ยนสดมภ์เชิงธาตุมูล	4.1
equivalent	สมมูล	4.1
row equivalent matrices	เมตริกซ์สมมูลตามแถว	4.1
column equivalent matrices	เมตริกซ์สมมูลตามสดมภ์	4.1
augment matrix	เมตริกซ์แต่งเติม	4.1
'normal form of a matrix	รูปนอร์แมลของเมตริกซ์	4.2
elementary matrix	เมตริกซ์ธาตุมูล	4.3
single elementary operation	การดำเนินการธาตุมูลเชิงเดี่ยว	4.3
premultiplication	คูณข้างหน้า	4.3
postmultiplication	คูณข้างหลัง	4.3