บทที่ 3
เมตริกซ์ผกผัน

บทที่ 3
เมตริกซ์ผกผัน
(The inverse matrix)

3.1 บทนำ (Introduction)

ในหัวข้อนี้จะนำคำว่า "สมาชิกเอกลักษณ์ (identity element)" และ "สมาชิกผกผัน (inverse element)" มาให้รู้จัก ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในบทต่อไป และการดำเนินการต่อสมาชิกจะเป็น 2 แบบเท่านั้น คือ การดำเนินการบวก และการดำเนินการคูณ

ตัวอย่างที่ 3.1.1 (ก) สำหรับเซตของจำนวนจริงและการดำเนินการบวก จะเรียก 0 ว่า สมาชิกเอกลักษณ์ เพราะว่า

$$a+0 \;=\; 0+a \;=\; a \qquad (3.1.1)$$

(ข) สำหรับเซตเหมือนข้อ (ก) และการดำเนินการคูณ จะเรียก 1 ว่า สมาชิกเอกลักษณ์ เพราะว่า

$$a\cdot 1 \;=\; 1\cdot a \;=\; a \qquad (3.1.2)$$

นิยาม 3.1.1 สมาชิก $\in$ ซึ่งอยู่ในเซต S เรียกว่าสมาชิกเอกลักษณ์ สำหรับการดำเนินการ $\circ$ บนเซต S ถ้า

$$a\circ\in \;=\; \in\circ a \;=\; a \qquad (3.1.3)$$

สำหรับทุกค่าของ a ใน S

ตัวอย่างที่ 3.1.2 (ก) สำหรับเซตของเมตริกซ์ขนาด $n\times n$ และเป็นเมตริกซ์สเกลาร์ และการดำเนินการบวกเมตริกซ์ สมาชิกเอกลักษณ์คือ เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix)

$$o \;=\; \begin{bmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $$A+O \;=\; O+A \;=\; A \qquad (3.1.4)$$

(ข) สำหรับเซตเหมือนข้อ (ก) และการดำเนินการคูณเมตริกซ์ สมาชิกเอกลักษณ์คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ I_n ขนาด $n \times n$ เพราะว่า

$$AI_n \;=\; I_nA \;=\; A \tag{3.1.5}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 พิจารณาเซตของจำนวนจริง

(ก) เมื่อการดำเนินการคือการบวก (-a) เรียกว่า ตัวผกผันของ a เพราะว่า

$$a + (-a) \;=\; -a+a \;=\; 0 \tag{3.1.6}$$

และ 0 คือ สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกบนเซตจำนวนจริง

(ข) เมื่อการดำเนินการคือ การคูณ $\frac{1}{a}$ เรียกว่า ตัวผกผันของ a เพราะว่า

$$a \cdot \frac{1}{a} \;=\; \frac{1}{a} \cdot a \;=\; 1$$

เมื่อ $a \neq 0$ และ 1 คือสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการคูณบนเซตจำนวนจริง นั่นคือ สำหรับเซตของจำนวนจริง ยกเว้น 0 ตัวผกผันของ a สำหรับการคูณ คือ $\frac{1}{a}$

นิยาม 3.1.2 ให้ $\in$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการดำเนินการ $\circ$ บนเซต S ถ้ามีสมาชิก q ซึ่ง $a \circ q = q \circ a = \in$ ในเมื่อ $\in$, a และ q เป็นสมาชิกของ S ดังนั้น จะเรียก q ว่าตัวผกผันของ a เทียบกับการดำเนินการ $\circ$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 พิจารณาเซตของเมตริกซ์

(ก) เมื่อการดำเนินการบวกเมตริกซ์บนเซต S ขนาด $m \times n$ เมตริกซ์ $(-A)$ คือเมตริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของ A เพราะว่า

$$A + (-A) \;=\; -A + A \;=\; O' \tag{3.1.7}$$

และเมตริกซ์ศูนย์ คือ สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกเมตริกซ์

(ข) เมื่อการดำเนินการคูณเมตริกซ์บนเซต S ของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ดังนั้น บางครั้งจะหาเมตริกซ์ A^{-1} ได้ (และเรียกว่าเมตริกซ์ผกผันของ A) เพราะว่า

$$AA^{-1} \;=\; A^{-1}A \;=\; I_n \tag{3.1.8}$$

จุดประสงค์ในบทนี้ต้องการอธิบายการหา การคำนวณและคุณสมบัติของตัวผกผันสำหรับการคูณของเมตริกซ์จัตุรัส ต่อไปในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงตัวผกผันของเมตริกซ์จัตุรัสสำหรับการดำเนินการคูณเท่านั้น

3.2 เมตริกซ์ผกผัน (Inverse matrix)

นิยาม 3.2.1 ถ้ากำหนดให้เมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ จะมีเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย A^{-1} และ

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \qquad (3.2.1)$$

ดังนั้น A^{-1} คือ ตัวผกผันของ A นั่นคือเราสามารถกล่าวได้ว่า A มีตัวผกผัน ถ้าหา A^{-1} ได้ และ A ไม่มีตัวผกผัน ถ้าหา A^{-1} ไม่ได้

จากนิยามนี้มีคำถามเบื้องต้น 2 คำถามที่น่าสนใจคือ

1. เมื่อใดเมตริกซ์ผกผันสามารถหาได้
2. ถ้าเมตริกซ์ผกผันหาได้ จะหาได้อย่างไร

คำถาม 2 ข้อนี้ สามารถหาคำตอบได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 เมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ หาตัวผกผันได้ก็ต่อเมื่อ $|A| \neq 0$ อย่างไรก็ตาม ถ้า $n \geqslant 2$ และถ้าหา A^{-1} ได้ ดังนั้น

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A} \qquad (3.2.2)$$

แนวพิสูจน์ เพราะว่ากำหนดเงื่อนไขในรูป แล้ว...ก็ต่อเมื่อ (if and only if) เพราะฉะนั้น การพิสูจน์จะพิสูจน์เป็น 2 ทาง คือ

1. ถ้า $|A| \neq 0$ จะได้ว่า A^{-1} หาได้
2. ถ้า A^{-1} หาได้ จะได้ว่า $|A| \neq 0$

พิสูจน์ 1. ถ้า $|A| \neq 0$ จาก (2.4.6) จะได้

$$A\left(\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A\right)A = I_n$$

เทียบกับ (3.2.1) จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A \qquad \#$$

2. ถ้า A มีตัวผกผัน (หา A^{-1} ได้) ใช้ทฤษฎีบท 2.3.8 จะได้

$$\begin{aligned} |A|\,|A^{-1}| &= |AA^{-1}| \\ &= |I_n| \end{aligned}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $|A| \neq 0$ #

นิยาม 3.2.3 เมตริกซ์จัตุรัส A เรียกว่า "เอกฐาน (singular)" ถ้า det A = 0 และไม่เป็นเอกฐาน (nonsingular) ถ้า det A $\neq$ 0

นั่นคือ ถ้า A ไม่เป็นเอกฐาน (det A $\neq$ 0) ใช้ทฤษฎีบท 3.2.1 สรุปได้ว่า A มีตัวผกผัน (HI A-' ได้)

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาตัวผกผันของ A

วิธีทำ หา cof A ตามนิยาม 2.4.1 จะได้

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ใช้นิยาม 2.4.2

$$\text{adj } A = (\text{cof } A)^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

แทนค่าในสูตร A^{-1} (3.2.2) เพราะฉะนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \; 11 \; 4 \; 11 \; 2 & \overline{11} \, 1 \\ -\frac{6}{11} \; 16 & 11 \\ 11 \quad \overline{11} & \overline{11} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

จงหา A^{-1}

วิธีทำ เพราะว่า

$$\text{cof}\,A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \text{adj}\,A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

และ $|A| = 5$

เพราะฉะนั้น $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต

1. สูตรที่ใช้หา A^{-1} ในตัวอย่างที่ 3.2.1 และตัวอย่างที่ 3.2.2 ไม่ใช่วิธีเฉพาะสำหรับการคำนวณหา A^{-1} และไม่ใช่วิธีที่มีประสิทธิภาพที่สุด เพราะว่าการหาโคแฟกเตอร์เมื่อเมตริกซ์มีขนาดใหญ่จะยุ่งยากมาก

2. เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส จะไม่สามารถหาตัวผกผันได้

นิยาม 3.2.4 เลขชี้กำลังที่เป็นลบสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสที่หาตัวผกผันได้ สามารถนิยามเป็น

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-1}(A^{-1})^2$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^{n} = A^{-1}(A^{-1})^{n-1}$$

ในเมื่อ $n \geqslant 2$

ข้อสังเกต $A^0 = I_n$ เมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด nxn ตัวอย่างเช่น

เพราะว่า $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}$

เพราะฉะนั้น

$$A^{-2}(A^2) = (A^{-1}A^{-1})\ (AA)$$

= A-‘(A-‘A)A

$$= A^{-1}I_nA$$

= A-‘A

$$= I_n$$

หรือ $A^0 =$ I,

แบบฝึกหัด 3.2

1. ใช้คำตอบของแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 1 ถึง 6 เพื่อคำนวณตัวผกผันของเมตริกซ์เหล่านั้น (ถ้าเป็นไปได้) แต่ถ้าเป็นไปไม่ได้ จงแถลงเหตุผล
2. จงหาตัวผกผันของเมตริกซ์ต่อไปนี้ (ในเมื่อเป็นไปได้) และตรวจสอบคำตอบโดยใช้นิยาม 3.2.1 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ถ้า $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B^{-3} นิยามหรือไม่ ทำไม
4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-2} และ A^{-3}
5. กำหนดให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา A
6. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ภายใต้เงื่อนไขอะไร C^{-2} จึงจะนิยาม จงหา C^{-2} ภายใต้เงื่อนไขนั้น
7. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด 5×5 ซึ่งสามารถหาตัวผกผันได้ อยากทราบว่าลำดับชั้นของ A เป็นเท่าใด ทำไม
8. ถ้า $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ สามารถหาตัวผกผันได้ จงแสดงว่า

$$G^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

9. เมตริกซ์ยูนิแทรี (unitary matrix) A คือเมตริกซ์ซึ่งสอดคล้องตามสมการ $A^* = A^{-1}$ จงแสดงว่า $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ยูนิแทรี

10. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้น

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

11. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ ดังนั้น

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

การพิสูจน์หัวข้อนี้ในกรณีที่ $\det A \neq 0$ และดังนั้นจงแสดงการหาค่า โดยใช้สูตร เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12. ถ้า $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีตัวผกผัน จงแสดงว่า

$$\det G = \det(\operatorname{adj} G)$$

13. กำหนดว่า A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn (ในเมื่อ $n \geqslant 2$) มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $A = \operatorname{cof} A$

(n) จงหา det A

(ข) จงหา A-’

(n) ถ้า $n \neq 2$ และ A เป็นเมตริกซ์จำนวนจริงและไม่เป็นศูนย์ ถามว่า A-’ = A^T หรือไม่ (แนะนำ : ขั้นแรกจะต้องแสดงว่า ถ้า $A \neq 0$ ดังนั้น $\det A \neq 0$)

3.3 คุณสมบัติของเมตริกซ์ผกผัน (Properties of an inverse matrix)

ขณะนี้เราได้ศึกษาการหาตัวผกผันของเมตริกซ์มาแล้ว ดังนั้นวิธีการคำนวณเมื่อตัวผกผันมีอยู่ (exist) จำเป็นต้องใช้คุณสมบัติหลายข้อในการหาเมตริกซ์ผกผัน

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้า A ไม่เป็นเอกฐาน (A มีตัวผกผัน) ดังนั้น ตัวผกผันของ A จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ กำหนดให้เมตริกซ์ A มีตัวผกผัน 2 ตัว คือ B และ C และจะแสดงว่า B และ C คือตัวเดียวกัน

ดังนั้น ตามนิยามการคูณเมตริกซ์ใด ๆ กับตัวผกผันของมัน คือ

$$AB = BA = I_n$$

และ

$$AC = CA = I_n$$

เนื่องจาก I_n คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} B &= BI_n \\ &= B(AC) \\ &= (BA)C \quad \text{ตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม} \\ &= (I_n)C \\ &= I_nC \\ &= C \end{aligned}$$

#

ทฤษฎีบท 3.3.2 ถ้าผลคูณของสองเมตริกซ์จัตุรัสคือ I_n ดังนั้น ผลคูณนั้นเป็นไปตามกฎการสลับที่ (commutative law) นั่นคือ ถ้า $AB = I_n$ ดังนั้น $AB = BA$

พิสูจน์ ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และถ้า $AB = I_n$ ดังนั้น B คือ A^{-1}

จากนิยามกล่าวว่า ถ้าเมตริกซ์ A มีตัวผกผัน A^{-1} ดังนั้น

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

เพราะฉะนั้น

เมื่อ $B = A^{-1}$ จะได้

$$AB = BA = I_n$$

นั่นคือ $AB = BA$

#

ทฤษฎีบท 3.3.3 ถ้าเมตริกซ์ A และ B มีขนาดเท่ากัน และหาตัวผกผันได้ ดังนั้น

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{3.3.1}$$

แนวคิดเพื่อพิสูจน์ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

ดังนั้น ใช้ทฤษฎีบท 3.3.1 จะกล่าวได้ว่า $B^{-1}A^{-1}$ คือตัวผกผันของ (AB)

พิสูจน์ จากคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณเมตริกซ์

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= [(AB)B^{-1}]A^{-1}\\ &= [A(BB^{-1})]A^{-1}\\ &= [A(I_n)]A^{-1}\\ &= [A]A^{-1}\\ &= I_n\end{aligned}$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(\ A\ \ B\ ) = I_n$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.3.1 ดังนั้น ตัวผกผันของ (AB) คือ $B^{-1}A^{-1}$ นั่นคือ

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$ #

ตัวอย่างที่ 3.3.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ใช้ทฤษฎีบท 3.3.3 จงแสดงว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

วิธีทำ หาตัวผกผันของ A และ B จะได้

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

หาผลคูณของเมตริกซ์ AB จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

และ
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB)$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}; \quad |AB| = 2$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (3.3.3)$$

(3.3.2) = (3.3.3) ดังนั้น
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.3.4 ถ้า A หาตัวผกผันได้ ดังนั้น
$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T} \qquad (3‘3.4)$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า ถ้า A ไม่เป็นเอกฐาน ดังนั้น A^T ไม่เป็นเอกฐาน และตัวผกผันของ A^T นิยามเป็น
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

พิสูจน์ เพราะว่า A ไม่เป็นเอกฐาน เพราะฉะนั้น
$$AA^{-1} = I_n$$
ใส่การสลับเปลี่ยนทั้งสองข้าง
$$(AA^{-1})^T = (I_n)^T$$
ใช้คุณสมบัติการสลับเปลี่ยน จะได้
$$(A^{-1})^T(A)^T = I_n; \qquad (I_n)^T = I_n$$
นั่นคือ A^T มีตัวผกผันเป็น $(A^{-1})^T$

ดังนั้น $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ #

ทฤษฎีบท 3.3.5 ถ้า A ไม่เป็นเอกฐาน (A มีตัวผกผัน) ดังนั้น

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (3.3.5)$$

พิสูจน์ เพราะว่า A ไม่เป็นเอกฐาน เพราะฉะนั้น A มีตัวผกผัน สมมติให้ตัวผกผันของ A คือ A-’ ดังนั้น

AA-’ = I” (3.3.6)

$$(AA^{-1})^{-1} = (I_n)^{-1} = I”$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.3.3 จะได้

(A^{-1})$^{-1}$ A-’ = I_n (3.3.7)

(3.3.6) = (3.3.7)

AA-’ = $(A^{-1})^{-1} A^{-1} = I_n$

นั่นคือ (A-‘)-’ = A #

ทฤษฎีบท 3.3.6 ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และถ้า AB = 0 ดังนั้น

1. A = 0 หรือ B = 0 หรือ
2. ทั้ง A และ B หาตัวผกผันไม่ได้

แนวพิสูจน์ เพราะว่า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เพราะฉะนั้น 2 กรณีที่สามารถหาได้คือ

1. อย่างน้อยหนึ่งเมตริกซ์หาตัวผกผันได้
2. ทั้งสองเมตริกซ์หาตัวผกผันไม่ได้

พิสูจน์ กำหนดว่า

$$AB = 0 \qquad (3.3.8)$$

ถ้าสมมติว่า A หาตัวผกผันได้ คือ A^{-1} คูณข้างหน้า AB ด้วย A^{-1} จะได้

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(0) = 0$$

$$(A^{-1}A)B = 0$$ ตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$I_nB = 0$$

$$B = 0$$

นั่นคือ ถ้า A หาตัวผกผันได้ B = 0

โดยวิธีเดียวกัน ถ้ากำหนดว่า B หาตัวผกผันได้ คือ B^{-1} เอา B^{-1} คูณข้างหลัง AB จะได้

$$(AB)B^{-1} = (0)B^{-1} = 0$$
$$A(BB^{-1}) = 0$$
$$A(I_n) = 0$$
$$A = 0$$

นั่นคือ ถ้า B หาตัวผกผันได้ $A = 0$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้าเมตริกซ์หนึ่งมีตัวผกผัน เมตริกซ์ที่เหลือจะเป็นศูนย์

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ถ้าหา A^{-1} ได้ $|A| \neq 0$ และถ้าหา A^{-1} ไม่ได้ $|A| = 0$

เพราะว่า $AB = 0$

เพราะฉะนั้น $|AB| = 0$

ใช้คุณสมบัติของตัวกำหนด (2.3.12)

$$|A|\,|B| = 0$$

นั่นคือ $|A| = 0$

หรือ $|B| = 0$

หรือทั้ง $|A|$ และ $|B| = 0$

ถ้า $|A| = 0$ และ $|B| = 0$ ดังนั้น ทั้งสองเมตริกซ์ A และ B หาตัวผกผันไม่ได้ #

ข้อสังเกต

1. ถ้า A และ B ไม่เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เป็นไปได้ว่า $AB = 0$ ทั้ง ๆ ที่ทั้งสองเมตริกซ์ไม่เป็นศูนย์ เช่น

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ผลจากตัวอย่างนี้ ไม่สามารถสรุปตามทฤษฎีบท 3.3.6 ได้ ถึงแม้ว่า $AB = 0$ ก็ตาม เพราะว่า A และ B ไม่เป็นเมตริกซ์จัตุรัส

2. ถ้า $AB = 0$ ไม่อาจกล่าวได้ว่า $A = 0$ หรือ $B = 0$ หรือทั้ง A และ $B = 0$ เพราะว่าคุณสมบัติการดำเนินการคูณของเมตริกซ์ไม่เหมือนกับการคูณของสเกลาร์

ทฤษฎีบท 3.3.7 ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และถ้า A หาตัวผกผันได้ ดังนั้น ถ้า $AB = AC$ จะได้ว่า $B = C$

พิสูจน์ สมมติว่าตัวผกผันของเมตริกซ์ A คือ A^{-1}

ถ้า
$$AB = AC \tag{3.3.9}$$

เอา A^{-1} คูณข้างหน้าตลอดสมการ (3.3.9) จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(AC) \\ (A^{-1}A)B &= (A^{-1}A)C \\ I_nB &= I_nC \\ B &= C \end{aligned}$$

#

ข้อสังเกต ผลจากทฤษฎีบท 3.3.7 นี้ มีข้อขัดแย้งกับคุณสมบัติของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่ว่า ถ้า $AB = AC$ ไม่จำเป็นว่า $B = C$ (ดูตัวอย่างที่ 1.2.13 เพื่อเปรียบเทียบ) เงื่อนไขที่ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง กล่าวคือ A ในทฤษฎีบท 3.3.7 หาตัวผกผันได้ แต่ A ในคุณสมบัติของเมตริกซ์ไม่ได้กล่าวถึงการหาตัวผกผันของ A ว่าหาได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดง

   (ก) ทฤษฎีบท 3.3.3

   (ข) ทฤษฎีบท 3.3.4

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงเหมือนข้อ 1

3. จงพิสูจน์ว่าถ้า A, B, ..., M ทุกเมตริกซ์สามารถหาตัวผกผันได้และมีอันดับ $n \times n$ ดังนั้น

$$(AB\ldots M)^{-1} = M^{-1}\ldots B^{-1}A^{-1}$$

4. จงแสดงว่า ตัวผกผันของเมตริกซ์สมมาตร ซึ่งสามารถหาตัวผกผันได้ เป็นเมตริกซ์สมมาตรด้วย

5. ให้ A, B และ C เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีขนาดเท่ากัน ถ้า A สามารถหาตัวผกผันได้ จงพิสูจน์ว่า $BA = CA$ จะได้ว่า $B = C$

6. จงแสดงทฤษฎีบท 3.3.6 สำหรับ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ให้ทำแบบเดียวกัน สำหรับ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

7. กำหนดว่า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง $A \neq 0$, $B \neq 0$ และ $AB = 0$ เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของ A และ B ได้อย่างไรบ้าง และทำไม

8. กำหนดว่า A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่ง A สามารถหาตัวผกผันได้ และ $AB = 0$ อะไรที่สามารถพูดเกี่ยวกับ B และทำไม

9. ถ้า A และ B สามารถหาตัวผกผันได้ และมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น จงพิสูจน์หรือคาดคะเนว่า $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$ หรือไม่

3.4 คำตอบของ n สมการเชิงเส้น n ตัวไม่รู้ค่า

(Solution of n linear equations with n unknowns)

จากความรู้เรื่องเมตริกซ์ผกผันสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในบางกรณีเพื่อหาคำตอบของ n สมการเชิงเส้น n ตัวไม่รู้ค่า ตัวอย่างเช่น

ให้ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปสัญลักษณ์เมตริกซ์ $AX = B$ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้คือเวกเตอร์ $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เหมือนเช่น n คำตอบเอกลักษณ์ เมื่อแทนค่าเหล่านี้ในตัวไม่รู้ค่าตามลำดับในระบบสมการ ถ้าคำตอบเป็นได้อย่างเดียว (unique solution) เราสามารถหาได้โดยคูณข้างหน้าสมการ $AX = B$ ด้วย A^{-1} จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

ดังนั้น $A^{-1}B$ คือเวกเตอร์สดมภ์ (column vector) ซึ่งให้ทุกค่าของ x

ทฤษฎีบท 3.4.1 ถ้าระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ A หาตัวผกผันได้ มีคำตอบเป็นได้อย่างเดียว (unique solution) ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad (3.4.1)$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการในรูปสัญลักษณ์เมตริกซ์

$$AX = B$$

ในเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ใช้สูตรในทฤษฎีบท 3.2.1 หา A^{-1} จะได้

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.4.1

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

วิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อจำนวนของสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่า และ A หาตัวผกผันได้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูงในการหา A^{-1} วิธีการหาคำตอบ n สมการ n ตัวไม่รู้ค่านี้สำคัญมาก เพราะสามารถปรับปรุงเฉพาะปัญหาที่เกี่ยวกับเซตของระบบสมการ $AX = B$ ในเมื่อทุกระบบมีสัมประสิทธิ์เมตริกซ์เหมือนกัน (A) แต่เมตริกซ์ซึ่งแตกต่างคือ B ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.4.2 คณะผู้บริหารงานของบริษัทแห่งหนึ่งกำลังเผชิญหน้ากับการตัดสินใจซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้ ในโรงงานใช้เครื่องจักรต่างกัน 2 แบบ คือแบบ M และแบบ N เพื่อผลิตสินค้า 2 ชนิดต่างกันคือ P และ Q โดยที่เครื่องจักร M สามารถทำงานได้ 12 ชม./ วัน เครื่องจักร N สามารถทำงานได้ 16 ชม./ วัน สำหรับสินค้า P แต่ละหน่วยที่โรงงานผลิตออกมาต้องใช้เครื่องจักร M ทำงาน 2 ชม. และเครื่องจักร N ทำงาน 1 ชม. และสินค้า Q แต่ละหน่วย

ที่โรงงานผลิตออกมา ต้องใช้เครื่องจักร M ทำงาน 2 ชม. และเครื่องจักร N ทำงาน 3 ชม. จงหาจำนวนหน่วยของสินค้าแต่ละชนิดที่โรงงานผลิตได้ใน 1 วัน เพื่อที่จะรักษาเครื่องจักรให้ทำงานเต็มกำลัง และจะมีผลต่อผลิตกรรมอย่างไรถ้าซื้อเครื่องจักรแต่ละชนิดเพิ่มมากขึ้นด้วย

วิธีทำ ให้ x_1 แทนจำนวนหน่วยของสินค้า P ที่ผลิต และ x_2 แทนจำนวนหน่วยของสินค้า Q ที่ผลิต

ดังนั้น เครื่องจักร M ทำงาน $2x_1$ ชม. ในการผลิตสินค้า P และ $2x_2$ ชม. ในการผลิตสินค้า Q ถ้าเครื่องจักร M ทำงานเต็มเวลา จะได้สมการ

$$2x_1 + 2x_2 = 12$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าเครื่องจักร N ทำงานเต็มเวลาจะได้สมการ

$$x_1 + 3x_2 = 16$$

ระบบสมการทั้งสองสามารถเขียนในรูปสมการเมตริกซ์

$$AX = B$$

ในเมื่อ $A = \begin{bmatrix} & \\ 1_2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท 3.4.1 จะได้

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ จะผลิตสินค้า P ได้ 1 หน่วย และสินค้า Q ได้ 5 หน่วย ใน 1 วัน

ต่อไปถ้ามีการซื้อเครื่องจักรเพิ่มขึ้น เราสามารถหาการเปลี่ยนผลิตกรรมโดยการเปลี่ยนเฉพาะเมตริกซ์ B เท่านั้น แล้วคำนวณ $A^{-1}B$ ใหม่ สังเกตว่า A^{-1} ไม่ได้เปลี่ยน สมมติว่าถ้าซื้อเครื่องจักร M อีก 1 เครื่อง (รวมเป็น 2 เครื่อง) ในขั้นนี้เป็นการเพิ่มความสามารถของเครื่องจักร M ให้ทำงานได้ 24 ชม.ต่อวัน ดังนั้น

$$X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ จะผลิตสินค้า P ได้ 10 หน่วย และสินค้า Q 2 หน่วย เมื่อซื้อเครื่องจักร M เพิ่มขึ้นอีก 1 เครื่อง

แบบฝึกหัด 3.4

จากแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 4 ใช้วิธีที่เรียนมาในหัวข้อนี้ เพื่อแก้ระบบของสมการที่กำหนดให้

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

หรือ $AX = B$ ในเมื่อ $\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$ และ $|A| = 4$

5. จงแก้ $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -5 \\ y & -6 \end{bmatrix} - 3I_2 = 0$ สำหรับ x และ y โดยหาตัวผกผันของ $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

6. ให้ A, B, C และ X เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีขนาดเท่ากันภายใต้เงื่อนไขอะไร สมการ $BXC = A$ สามารถหา X ได้ จงหา X กำหนดว่าเงื่อนไขเหล่านี้สอดคล้อง

7. จงแก้สมการเมตริกซ์ $AX = B$ ในเมื่อ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. เราสามารถแก้สมการเมตริกซ์ $AX = B$ เมื่อ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ได้หรือไม่

คำศัพท์ใหม่

inverse matrix	เมตริกซ์ผกผัน	3.1
singular	เอกฐาน	3.2
nonsingular	ไม่เป็นเอกฐาน	3.2
column vector	เวกเตอร์สดมภ์	3.4
unique solution	คำตอบเป็นได้อย่างเดียว	3.4