บทที่ 2
ตัวกำหนด

บทที่ 2
ตัวกำหนด (Determinants)

2.1 นิยามของตัวกำหนด (Definition of determinant)

จากบทที่ผ่านมาสังเกตว่านิยามของเมตริกซ์ A ไม่ได้กำหนดค่าตามตัวเลขของ A จุดประสงค์แรกของบทนี้คือ เพื่อนิยามฟังก์ชันของสมาชิกของเมตริกซ์จัตุรัสสำหรับทุก ๆ เมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีสมาชิกเป็นสเกลาร์จะสมนัยกับสเกลาร์เพียงค่าเดียว ฟังก์ชันนี้เรียกว่า ตัวกำหนดหรือฟังก์ชันตัวกำหนด ค่าของตัวกำหนดจะเขียนแทนด้วย det A หรือ |A| (ในเมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส) และเรียกว่าตัวกำหนดของ A

2.1.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

ก่อนที่จะให้นิยามของตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ให้พิจารณาตัวเลข 2, 4, 3, 1 ว่าจะต้องสับเปลี่ยน (interchange) ตัวเลขกี่ครั้ง เพื่อว่าตัวเลขเหล่านี้จะเรียงอยู่ในอันดับธรรมชาติ (nature order) กล่าวคือตัวเลขเรียงจากน้อยไปหามาก 1, 2, 3, 4

ข้อสังเกต การหาจำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนตัวเลขชุดหนึ่งอาจแตกต่างกันขึ้นอยู่กับวิธีการสับเปลี่ยน แต่จำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนจะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่เหมือนกัน (ให้ดูจากตัวอย่างที่ 2.1.1 และตัวอย่างที่ 2.1.2)

ตัวอย่างที่ 2.1.1 จงหาจำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนของตัวเลข 2 4 3 1

วิธีที่ 1

สับเปลี่ยน 4 กับ 1 เปลี่ยน 2 4 3 1 ไปเป็น 2 1 3 4
สับเปลี่ยน 2 กับ 1 เปลี่ยน 2 1 3 4 ไปเป็น 1 2 3 4
จำนวนครั้งที่ใช้สับเปลี่ยนคือ 2 ครั้ง (จำนวนคู่)

วิธีที่ 2

สับเปลี่ยน 3 กับ 1 เปลี่ยน 2 4 3 1 ไปเป็น 2 4 1 3
สับเปลี่ยน 4 กับ 1 เปลี่ยน 2 4 1 3 ไปเป็น 2 1 4 3
สับเปลี่ยน 2 กับ 1 เปลี่ยน 2 1 4 3 ไปเป็น 1 2 4 3
สับเปลี่ยน 4 กับ 3 เปลี่ยน 1 2 4 3 ไปเป็น 1 2 3 4
จำนวนครั้งที่ใช้สับเปลี่ยนคือ 4 ครั้ง (จำนวนคู่)

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จงหาจำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนของตัวเลข 4 2 3 1

วิธีที่ 1

สับเปลี่ยน 4 กับ 1 เปลี่ยน 4 2 3 1 ไปเป็น 1 2 3 4

จำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนคือ 1 ครั้ง (จำนวนคี่)

วิธีที่ 2

สับเปลี่ยน 3 กับ 1 เปลี่ยน 4 2 3 1 ไปเป็น 4 2 1 3

สับเปลี่ยน 1 กับ 4 เปลี่ยน 4 2 1 3 ไปเป็น 1 2 4 3

สับเปลี่ยน 4 กับ 3 เปลี่ยน 1 2 4 3 ไปเป็น 1 2 3 4

จำนวนครั้งที่สับเปลี่ยนคือ 3 ครั้ง (จำนวนคี่)

นิยาม 2.1.1 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ **คือผลรวมของทุก ๆ พจน์ซึ่งอยู่ในรูป** $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ เมื่อดรรชนีล่างตัวที่สอง (second subscript) $j_1, j_2, \ldots, j_n$ **แทนสดมภ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ในเมื่อแต่ละสดมภ์แทนได้เพียงครั้งเดียว (ไม่ซ้ำกัน) ในแต่ละพจน์ของผลรวมและเลขชี้กำลัง** t **คือจำนวนครั้งที่ใช้สับเปลี่ยน เพื่อให้ดรรชนีล่างตัวที่สองเรียงตามอันดับธรรมชาติ** (นั่นคือ 1, 2, 3, ..., n) ให้ตัวกำหนดของ A เขียนแทนด้วย det A **หรือ** $|A|$ **ดังนั้น** นิยามของตัวกำหนดสามารถเขียนได้อีกรูปคือ

$$\det A = |A| = \sum_{(j)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n} \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

ตัวอย่างที่ 2.1.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad n = 2$

จงหาตัวกำหนดของ A

วิธีทำ จากนิยาม 2.1.1

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = /A/ = \sum_{(j)} (-1)^t a_{1j_1} \; a_{,,}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ A มี **2** สดมภ์ เพราะฉะนั้น โอกาสที่จะเป็นไปได้ของ j_1 และ j_2 คือ

ถ้า $j, = 1, \quad j_2 = 2$ และ

ถ้า $j_1 = 2, \quad j_2 = 1$

ดังนั้น $$|A| = (-1)^t \underset{\uparrow}{a_{11}}\underset{\uparrow}{a_{22}} + (-1)^t \underset{\uparrow\ \ t}{a_{12}a_{21}} \qquad (2.1.2)$$

การหาค่า t

พิจารณาพจน์แรกดรรชนีล่างตัวที่สอง ตัวเลขคือ 1 2 **ซึ่งเรียงตามอันดับธรรมชาติอยู่แล้ว เพราะฉะนั้นไม่ต้องสับเปลี่ยน** (t = 0) สำหรับพจน์ที่สอง **ดรรชนีล่างตัวที่สอง ตัวเลขคือ** 2 1 **ซึ่งยังไม่เรียงตามอันดับธรรมชาติ** แต่ถ้าสับเปลี่ยน 1 ครั้ง **ตัวเลขก็จะเรียงตามอันดับธรรมชาติ เพราะฉะนั้น** t = 1 แทนค่า t ใน (2.1.2) **ดังนั้น**

$$|A| = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.1.3)$$

ด้านขวามือของ (2.1.3) **เรียกว่า** การกระจายของตัวกำหนดของเมตริกซ์ A **ขนาด** 2×2

ข้อสังเกต ดรรชนีล่างตัวแรกยังคงเรียงตามอันดับธรรมชาติ ส่วนดรรชีล่างตัวที่สองสมมติการจัดที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 2.1.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$; $n = 3$

จงหา det A

วิธีทำ จากนิยามตัวกำหนด

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = |A| = \sum_{(j)} (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

โอกาสที่เป็นไปได้ของดรรชนีล่างตัวที่สอง j_1, j_2, j_3 คือ ให้

$j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 3$

$j_1 = 1, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 2$

$j_1 = 2, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 1$

$j_1 = 2, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 3$

$j_1 = 3, \quad j_2 = 2, \quad j_3 = 1$

$j_1 = 3, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 2$

ดังนั้น $|A| = (-1)^t a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^t a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^t a_{12}a_{23}a_{31}$

$\qquad + (-1)^t a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^t a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^t a_{13}a_{21}a_{32}$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (2.1.4)$$

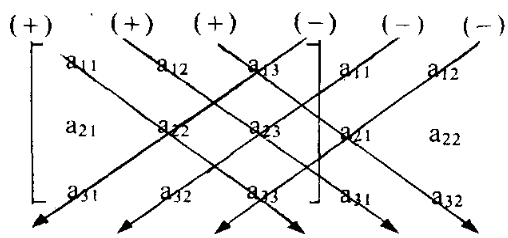
ตัวอย่างที่ 2.1.6 **ให้** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

จงหา det A ตามนิยาม 2.1.1

วิธีทำ จากนิยามตัวกำหนด

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^0(2)(8)(5) + (-1)^1(2)(6)(7) + (-1)^1(1)(4)(5)$$
$$+ (-1)^2(1)(6)(0) + (-1)^2(3)(4)(7) + (-1)^1(3)(8)(0)$$
$$= 80 - 84 - 20 + 0 + 84 - 0$$
$$= 60$$

รูป 2.1.1 แสดงวิธีการกระจายตัวกำหนดของเมตริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งสามารถกระจายออกมาเป็น 6 พจน์ ใช้วิธีนี้หาตัวกำหนดของเมตริกซ์ซึ่งกำหนดให้ในตัวอย่างที่ 2.1.5 อย่างไรก็ตาม ผู้อ่านควรระมัดระวังว่าแผนภูมิของตัวกำหนดซึ่งมีอันดับสูงกว่า 3($n \geq 4$) การกระจายจะไม่ได้ n! พจน์



$$/A/ = -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

รูปที่ 2.1.1 *แผนภูมิการกระจายตัวกำหนดอันดับ 3*

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาค่าตัวกำหนดโดยใช้นิยาม 2.1.1

(ก) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$ (ข) $\det\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 2i \end{vmatrix}$ (ง) $\det\begin{bmatrix} 1 & t \\ 4 & t \end{bmatrix}$

(จ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (ฉ) $\det\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. จงเขียนเมตริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งตัวกำหนดมีค่าเท่ากับ $cb-ad$
3. จำนวนพจน์ในการกระจายของตัวกำหนดอันดับ 4 คือเท่าใด (แนะนำ: ใช้ความรู้วิธีเรียงสับเปลี่ยนให้เป็นประโยชน์) และจำนวนพจน์ในการกระจายของตัวกำหนดอันดับ n คือเท่าใด
4. จงเขียนสองพจน์ใด ๆ ของการกระจายตัวกำหนดอันดับ 4
5. พจน์ $(-1)^t a_{14}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{45}\, a_{53}$ ของการกระจายของตัวกำหนดอันดับ 5, t เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ t มีเพียงค่าเดียวใช่หรือไม่
6. จงหาค่าของ

(ก) $\det[5]$

(ข) $\det[a]$

2.2 **การกระจายโดยโคแฟกเตอร์** (Cofactor expansion)

นิยาม 2.2.1 ส่วนน้อย (minor) ของสมาชิก a_{ij} ของเมตริกซ์ A ขนาด nxn ($n \geqslant 2$) คือ ตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยของ A ซึ่งได้จากการขีดฆ่าแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ออก

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงหาส่วนน้อยของ a_{32} ของ $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$

$$\text{ส่วนน้อยของ } a_{32} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ จะได้

$$\text{ส่วนน้อยของ } a_{21} = \det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

$$\text{ส่วนน้อยของ } a_{13} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21}a_{31} \quad a_{22}a_{31}$$

....

....

นิยาม 2.2.2 โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij} ของเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และส่วนน้อยของ a_{ij} โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A_{ij}

ดังนั้น $A_{ij} = (-1)^{i+j}$ (ส่วนน้อยของ a_{ij})

$$= (-1)^{i+j} M_{ij}$$

เมื่อ M_{ij} แทนส่วนน้อยของ a_{ij}

ตัวอย่างที่ 2.2.2 สำหรับเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)(a_{21}a_{33} \quad a_{23}a_{31})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

จากตัวอย่างที่ 2.1.4 กระจายตัวกำหนด A เป็น

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad (2.2.1) \end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 2.2.2 เพราะว่า

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \qquad (2.2.2)$$

$$-A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \qquad (2.2.3)$$

$$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \qquad (2.2.4)$$

ดังนั้น แทนค่า (2.2.2), (2.2.3) และ (2.2.4) ลงใน (2.2.1) จะได้

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}(-A_{12}) + a_{13}A_{13}$$

หรือ

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

จาก (2.2.1) เรียกว่า การกระจายโดยโคแฟกเตอร์ (cofactor expansion) ตามแถวที่ 1 นัยทั่วไปของ (2.2.1) นำไปสู่ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geqslant 2$

ดังนั้น $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

หรือ $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

(พิสูจน์ในหัวข้อต่อไป)

ถ้า A เป็นเมตริกซ์จำนวนจริง ข้อสรุปของทฤษฎีบท 2.2.1 สามารถคิดเหมือนผลคูณสเกลาร์ของแถวที่ i (หรือสดมภ์ที่ j) ของ A กับเวกเตอร์ของโคแฟกเตอร์สมนัยกับแถวที่ i (หรือสดมภ์ที่ j) ของ A

ตัวอย่างที่ 2.2.3 จงหาค่าของ $|A|$ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่า $n = 3$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 2.2.1

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

ให้ $i = 2$ (กระจายตัวกำหนด A ตามแถวที่ 2)

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= (3)\, A_{21} + (2)\, A_{22} + (0)\, A_{23} \\
&= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \\
&= 3(-1)\,(24-12) + 2(1)\,(4-8) \\
&= (-3)\,(12) + 2(-4) \\
&= -36-8 \\
&= -44
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต การหาค่าของ det A จากตัวอย่างนี้ สามารถหาได้อีก โดยแทนค่า $i = 1$ **หรือ** $i = 3$ ลงในสูตร det A และคำตอบที่หาได้จะมีค่าเท่ากัน เหตุผลที่เลือกให้ $i = 2$ ในตัวอย่างนี้ เพราะว่าในแถวที่ 2 ของ A มีสมาชิกตัวหนึ่งเป็นศูนย์ ทำให้การคำนวณทำได้รวดเร็วขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.2.4 จงหาค่าของ $|A|$ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพราะว่า $n = 4$ เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 2.2.1

$$\det A = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{(กระจาย det A ตามสดมภ์ที่ j)}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}$$

สดมภ์ที่ควรเลือกเพื่อแทนค่า j คือ สดมภ์ที่ 1 และสดมภ์ที่ 3 (เพราะว่ามีสมาชิกเป็นศูนย์ 2 ตัว)

เลือก $j = 1$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} \\
&= (3)A_{11} + (0)A_{21} + (0)A_{31} + (1)A_{41} \\
&= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

สองตัวกำหนดสุดท้ายสามารถหาค่าได้ โดยกระจายตัวกำหนดตามแถวหรือสดมภ์ก็ได้ แต่สำหรับตัวอย่างนี้จะเลือกกระจายตัวกำหนดตามสดมภ์ที่ 2 ทั้งสองตัวกำหนด เพราะว่ามีสมาชิกเป็นศูนย์อยู่สองตัว เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
|A| &= 3\left\{0 + 0 + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0\right\} - \left\{6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right\} \\
&= (-3)\ (4-3) - (-6)\ (4-3) \\
&= -3 + 6 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

   (ก) จงกระจาย $|A|$ ตามสดมภ์ที่ 1

   (ข) จงกระจาย $|A|$ ตามแถวที่ 3

   (ค) จงกระจาย $|A|$ ตามสดมภ์ที่ 3

   (ง) โคแฟกเตอร์ของสมาชิกในแถวที่ 3 และสดมภ์ที่ 2 คืออะไร

   (จ) ส่วนน้อยของสมาชิกในแถวที่ 1 และสดมภ์ที่ 2 คืออะไร

2. จงหาค่าของ $|A|$ โดยการกระจายตามแถวหรือสดมภ์ (แนะนำ : ให้ใช้แถวหรือสดมภ์ที่มีสมาชิกศูนย์มากเป็นหลักในการกระจาย) ในเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. ค่าของส่วนน้อยของสมาชิกในแถวที่ 13 และสดมภ์ที่ 11 ของเมตริกซ์ขนาด 22×22 คือ 4 โคแฟกเตอร์ของสมาชิกนี้คืออะไร ทำไม

4. (ก) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

   (ข) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(ค) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. (ก) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

(ข) จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(ค) จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

(ง) จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -132$

2.3 **คุณสมบัติของตัวกำหนด** (Properties of determinant)

เพื่อใช้อ้างอิงต่อไป ดังนั้น บางคุณสมบัติของตัวกำหนดจะถูกแถลงและหลาย ๆ คุณสมบัติเหล่านี้ จะพิสูจน์เพื่อใช้ประโยชน์ในหัวข้อต่อไปในหนังสือเล่มนี้ สำหรับหัวข้อนี้ทุก ๆ เมตริกซ์ที่กล่าวถึงจะเป็นเมตริกซ์จัตุรัสทั้งหมด

ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยการสับเปลี่ยนแถว (หรือสดมภ์) ดังนั้น

$$\det B = -\det A$$

หรือ $$\det A = -\det B \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

พิสูจน์ 1. กรณีสับเปลี่ยนแถว

ให้ $$A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

และ $$\det A = \sum_{(j)}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots a_{nj_n}$$

สมมติว่าสองแถวที่สับเปลี่ยนกันคือ แถวที่ k และแถวที่ p และ $k < p$ จากนิยามของตัวกำหนด

$$|A| = \sum_{(j)}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n} \qquad (2.3.2)$$

และ $$|B| = \sum_{(j)}(-1)^{t_1}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{pj}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{nj_n} \qquad (2.3.3)$$

จากด้านขวาของสมการ (2.3.2) และ (2.3.3) มีค่าเท่ากัน ยกเว้นเลขชี้กำลัง t กับ t_1 ถ้าเราถือว่า t คือจำนวนครั้งในการสับเปลี่ยน $j_1, j_2, \ldots j_k, \ldots j_p, \ldots j_n$ ให้เรียงตามอันดับธรรมชาติ ดังนั้น จำนวนครั้งที่ใช้สับเปลี่ยน $j_1, j_2, \ldots j_p, \ldots j_k, \ldots j_n$ ให้เรียงตามอันดับธรรมชาติ คือ $t+1$ (นั่นคือ $t_1 = t+1$)

ดังนั้น $$t = t_1 - 1$$

หรือ $$(-1)^t = (-1)^{t_1-1} = (-1)^{t_1}(-1)^{-1} = -(-1)^{t_1}$$

จาก **(2.3.2)** แทนค่า $(-1)^t$ จะได้

$$|A| = -\sum_{(j)}(-1)^{t_1}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{pj_p}\ldots a_{nj_n}$$

แต่เพราะว่า

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{pj_p}a_{nj_n} = a_{1j_1}a_{2j_2}a_{pj_p}\ldots a_{kj_k}\ldots a_{nj_n}$$

เพราะฉะนั้น $$|A| = -|B|$$

หรือ $$|B| = -|A|$$

พิสูจน์ 2. กรณีสับเปลี่ยนสดมภ์ให้พิสูจน์เสมือนกรณีสับเปลี่ยนแถว

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $|A| = -|B|$

วิธีทำ เพราะว่าเมตริกซ์ B เกิดจากการสับเปลี่ยนสดมภ์ที่ 1 และสดมภ์ที่ 3 ในเมตริกซ์ A ดังนั้น ถ้าใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้

$$|A| = -|B|$$

สำหรับตัวอย่างนี้ สามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง นั่นคือ โดยวิธีกระจาย $|A|$ และ $|B|$ ตามทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$|A| = -6$$

และ $|B| = 6$

ดังนั้น $|A| = -|B|$

เนื่องจากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.1 จำเป็นต้องใช้ผลของทฤษฎีบท 2.3.1 ดังนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.1 จึงนำมาพิสูจน์หลังการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.3.1

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$

ดังนั้น $$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(สูตรกระจาย det A ตามแถวที่ i)

หรือ $$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(สูตรกระจาย det A ตามสดมภ์ที่ j)

พิสูจน์ ส่วนแรก (สูตรที่ 1)

จากนิยามของตัวกำหนด เรารู้ว่าแต่ละพจน์ของการกระจาย $|A|$ ประกอบด้วยตัวประกอบหนึ่งจากแถว i อย่างแน่นอน ถ้าทุกพจน์ของการกระจาย $|A|$ ประกอบด้วยสมาชิก a_{ij} (ถูกเลือก) สำหรับ $j = 1, 2, \dots, n$ จาก (2.2.1) จะได้ว่า

$$|A| = a_{i1}\,p_{i1} + a_{i2}\,p_{i2} + \dots + a_{in}\,p_{in}$$

โดยที่ p_{ij} แทนตัวประกอบที่เหลือหลังจากดึงตัวร่วม a_{ij} ออกไป

เราจะแสดงว่า $p_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

ในเมื่อ M_{ij} คือ ส่วนน้อยของ a_{ij} การพิสูจน์นี้ จะพิจารณาเป็น 3 ขั้น ดังนี้

1. จะพิสูจน์ว่า

$$a_{11}p_{11} = a_{11}M_{11}$$

จากนิยามตัวกำหนด ปรากฏว่าพจน์สมนัยของสองจำนวนเหล่านี้ คือ จำนวนเดียวกัน อย่างไรก็ตามเครื่องหมายของพจน์ $a_{11}p_{11}$ เหมือนกับเครื่องหมายของพจน์สมนัยของ $a_{11}M_{11}$ เพราะว่าจำนวนครั้งในการสับเปลี่ยนเพื่อให้ดรรชนีล่างตัวที่สองเรียงตามอันดับธรรมชาติในพจน์ของการกระจายของ M_{11} ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อคูณข้างหน้าแต่ละพจน์ด้วย a_{11}

2. พิจารณาสมาชิกเจาะจงใด ๆ $a_{ij} = m$ สมาชิกตัวนี้สามารถย้ายไปอยู่ในตำแหน่งเริ่มแรกของ a_{11} โดยการสับเปลี่ยนแถวที่อยู่ใกล้กัน $i-1$ ครั้ง และสับเปลี่ยนสดมภ์ที่อยู่ใกล้กัน $j-1$ ครั้ง ใช้วิธีการนี้ ส่วนน้อยของสมาชิก m ยังคงไม่เปลี่ยนแปลง ใช้ทฤษฎีบท 2.3.1 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ใหม่ B คือ

$$|B| = (-1)^{(i-1)+(j-1)} |A| = (-1)^{i+j} |A|$$

ดังนั้น แต่ละพจน์ของการกระจาย $|B|$ เท่ากับ $(-1)^{i+j}$ คูณกับพจน์สมนัยของการกระจาย $|A|$

3. การพิสูจน์ในส่วนแรก (เพราะว่า m อยู่มุมบนซ้ายมือ) ดังนั้น ผลรวมของทุกพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ m ในการกระจาย $|B|$ เท่ากับ m คูณส่วนน้อยของมันใน B แต่ในการพิสูจน์ส่วนที่สอง ส่วนน้อยของ m ใน B มีค่าเหมือนกับส่วนน้อยของ m ใน A นั่นคือ M_{ij} เพราะฉะนั้น ผลรวมของทุกพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ m ในการกระจาย $|A|$ คือ $(-1)^{i+j}$ mM นั่นคือ

$$a_{ij}p_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}$$

หรือ $$p_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

หรือ $$p_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$ #

(2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ (1)

ทฤษฎีบท 2.3.2 ตัวกำหนดของเมตริกซ์และเมตริกซ์สลับเปลี่ยนของมัน จะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$|A| = |A^T| \tag{2.3.2}$$

พิสูจน์ ขั้นแรกจะพิสูจน์ว่า

$$|A| = \sum_{(i)} (-1)^t a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \qquad (2.3.3)$$

จากนิยามตัวกำหนด

$$|A| = \sum_{(j)} (-1)^t a_{1 j_1} \dots a_{n j_n} \qquad (2.3.4)$$

เพราะว่าการกระจายของ (2.3.3) และ (2.3.4) คือ ผลรวมของพจน์ ซึ่งประกอบด้วยหนึ่งตัวประกอบแน่นอนจากแต่ละแถวและแต่ละสดมภ์ จะมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างพจน์ของการกระจายทั้งสอง พจน์สมนัยเหล่านี้จะแตกต่างเฉพาะเครื่องหมายเท่านั้น อย่างไรก็ตามเมื่อสับเปลี่ยนตัวประกอบ $a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ เพื่อให้ดรรชนีล่างตัวที่สอง $(j_1, \dots, j_n)$ เรียงตามอันดับธรรมชาติ ในขณะเดียวกันเราได้เปลี่ยนการเรียงอันดับของดรรชนีล่างตัวแรกไปจากการเรียงตามอันดับธรรมชาติด้วย ดังนั้น เครื่องหมายของพจน์ $a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ จะเหมือนกับเครื่องหมายของพจน์สมนัย $a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}$ เพราะว่าการสับเปลี่ยนเพื่อให้ $j_1, \dots, j_n$ เรียงตามอันดับธรรมชาติเหมือนกับการสับเปลี่ยนเพื่อให้ $i_1, \dots, i_n$ กลับไปเรียงตามอันดับธรรมชาติ

แต่ $\qquad |A^T| = \sum_{(i)} (-1)^t a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}$

ดังนั้น $\qquad |A| = |A^T|$ #

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $\qquad |A| = |A^T|$

วิธีทำ จากนิยามการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 สูตรที่ 2 เลือก $j = 1$

$$|A| = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 8$$

และเลือก $i = 1$

$$|A^T| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 8$$

ดังนั้น $|A| = |A^T|$

ทฤษฎีบท 2.3.3 ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถว (หรือสดมภ์) ของเมตริกซ์ A เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$|A| = 0 \tag{2.3.5}$$

พิสูจน์ กระจาย $|A|$ ตามแถวที่ i (หรือสดมภ์ที่ j) จะได้

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{2.3.6}$$

หรือ

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \tag{2.3.7}$$

ถ้ากำหนดให้แถวที่ i (หรือสดมภ์ที่ j) ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น แทนค่าใน (2.3.6) และ (2.3.7) จะได้

$$|A| = 0$$ #

ตัวอย่างที่ 2.3.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงหา $|A|$

วิธีทำ เพราะว่า สมาชิกทุกตัวในแถวที่สามมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ใช้ทฤษฎีบท 2.3.3 เพราะฉะนั้น

$$|A| = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} = 0$$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $|A|$

วิธีทำ เพราะว่าสมาชิกทุกตัวในสดมภ์ที่ 3 มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ใช้ทฤษฎีบท 2.3.3 เพราะฉะนั้น

$$|A| = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cancel{0} \\ 4 & 3 & \cancel{0} \\ 0 & 5 & \cancel{0} \end{bmatrix} = 0$$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และถ้า $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นกล่าวได้ว่า

$$c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \dots + c_nA_{in}$$

และ $$c_1A_{1j} + c_2A_{2j} + \dots + c_nA_{nj}$$

ต่างเท่ากับตัวกำหนดของเมตริกซ์ซึ่งเหมือนกับ A ยกเว้นสมาชิกแถวที่ i และสดมภ์ที่ j แทนด้วยจำนวนจริง $c_1, c_2, \dots, c_n$ ตามลำดับ

พิสูจน์ (1) ถ้ากระจาย |A| ตามแถวที่ i จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

แทนสมาชิกแถวที่ i ของ A ด้วยจำนวนจริง $c_1, c_2, \dots, c_n$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 \;\dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \dots + c_nA_{in}$$

แถวที่ i ของ A

พิสูจน์ (2) ถ้ากระจาย |A| ตามสดมภ์ที่ j จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \quad + a_{nj}A_{nj}$$

แทนสมาชิกสดมภ์ที่ j ของ A ด้วยจำนวนจริง $c_1, c_2, \dots, c_n$ ตามลำดับ ดังนั้น

สดมภ์ที่ j ของ A

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = c_1A_{1j} + c_2A_{2j} + \dots + c_nA_{nj}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\det\begin{bmatrix} c_1 & 6 & 1 \\ c_2 & 3 & 2 \\ c_3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1, c_2 และ c_3 เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ กระจาย $|A|$ ตามสดมภ์ที่ 1 จะได้

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม ถ้าแทนสดมภ์ที่ 1 ของ A ด้วย c_1, c_2 และ c_3 ตามลำดับ **ใช้ทฤษฎี**บท 2.3.4 ข้อ 2 จะได้

$$\begin{vmatrix} c_1 & 6 & 1 \\ c_2 & 3 & 2 \\ c_3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.3.5 ตัวกำหนดของเมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีแถวคู่หนึ่ง (หรือสดมภ์คู่หนึ่ง) เหมือนกันจะมีค่าเป็นศูนย์

พิสูจน์ (1) กรณีเมตริกซ์มีแถวคู่หนึ่งเหมือนกัน

สมมติให้แถวที่ p และแถวที่ q ของเมตริกซ์ A เหมือนกัน และให้เมตริกซ์ใหม่ที่ได้จากการสับเปลี่ยนแถวที่เหมือนกันคือ B

ดังนั้น $\qquad A = B$

หรือ $\qquad |A| = |B| \qquad (2.3.8)$

จากทฤษฎีบท 2.3.1 เมื่อมีการสับเปลี่ยนแถว จะได้

$$|A| = -|B| \qquad (2.3.9)$$

แทนค่า (2.3.8) ใน (2.3.9)

$$|A| = -|A|$$

$$2|A| = 0$$

$$|A| = 0$$

#

พิสูจน์ (2) พิสูจน์เหมือน (1)

ตัวอย่างที่ 2.3.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $|A|$

วิธีทำ เพราะว่าแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของเมตริกซ์ A เหมือนกัน ใช้ทฤษฎีบท 2.3.5 เพราะฉะนั้น

$$|A| = 0$$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ผลรวมของผลคูณของสมาชิกแถวหนึ่ง (หรือสดมภ์หนึ่ง) ของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกสมนัยของแถว (หรือสดมภ์) ขนาน ซึ่งต่างกันของ A มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad \text{ถ้า } i \neq k$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0 \qquad \text{ถ้า } j \neq k$$

พิสูจน์ (1) ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ $n \geqslant 2$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 กระจาย $|A|$ ตามแถวที่ k จะได้

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} \qquad (2.3.10)$$

ถ้าแทน $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ในแถวที่ k ของเมตริกซ์ A ดังนั้น จะได้เมตริกซ์ใหม่ เรียกว่าเมตริกซ์ B ใช้ทฤษฎีบท 2.3.4 จะได้ว่า

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + . + a_{in}A_{kn} = |B|$$

แต่เมตริกซ์ B มีสมาชิกสองแถวซ้ำกัน ดังนั้น det B = 0 ตามทฤษฎีบท 2.3.5 นั่นคือ

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$$ #

พิสูจน์ (2) พิสูจน์เหมือน (1)

ตัวอย่างที่ 2.3.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้ากระจาย $|A|$ ตามสดมภ์ที่ 1 จะได้

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม ถ้าแทนสมาชิกของสดมภ์ที่ 1 ในการกระจาย $|A|$ ด้วยสมาชิกของสดมภ์อื่น (เลือกสดมภ์ที่ 2) ใช้ทฤษฎีบท 2.3.6 นั่นคือ

$$4\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยคูณสมาชิกทุกตัวในแถว (หรือสดมภ์) ของ A ด้วยจำนวนจริง c ดังนั้น

$$|B| = c|A| \qquad (2.3.11)$$

พิสูจน์ ให้เมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยคูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ของ a ด้วยจำนวนจริง c ดังนั้น

$$B = cA$$

กระจาย $|cA|$ ตามแถวที่ i จะได้

$$\begin{aligned} |B| &= (ca_{i1})A_{i1} + (ca_{i2})A_{i2} + \dots + (ca_{in})A_{in} \\ &= c\{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}\} \\ &= c|A| \end{aligned}$$

#

ทฤษฎีบท 2.3.8 ตัวกำหนดของผลคูณสองเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีขนาดเท่ากัน จะเท่ากับผลคูณของตัวกำหนดของเมตริกซ์ทั้งสอง นั่นคือ

$$|AB| = |A|\,|B| \qquad (2.3.12)$$

พิสูจน์ (ต้องเรียนจบบทที่ 4 ก่อน จึงจะพิสูจน์ได้)

กรณีที่ 1 ถ้า A ไม่เป็นเอกฐาน (nonsingular) ดังนั้น A จะสมมูลตามแถวกับ I_n ดังนั้น จะมีเมตริกซ์ธาตุมูล $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}, E_k$ ซึ่งทำให้

$$A = E_kE_{k-1} \dots E_2E_1I_n = E_kE_{k-1} \dots E_2E_1$$

เพราะฉะนั้น $\det A = \det E_k \det E_{k-1} \dots \det E_2 \det E_1$

(ดูทฤษฎีบท 4.3.4)

และ
$$\begin{aligned} \det AB &= \det E_kE_{k-1} \dots E_2E_1B \\ &= \det E_k \det E_{k-1} \dots \det E_2 \det E_1 \det B \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ถ้า A เป็นเอกฐาน จะได้ว่า $\det A = 0$ และ A จะสมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ C ซึ่งมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้นจะมีเมตริกซ์ธาตุมูล ซึ่งทำให้

$$C = E_kE_{k-1} \dots E_2E_1A$$

เพราะฉะนั้น $CB = E_kE_{k-1} \dots E_2E_1AB$

แสดงว่าเมตริกซ์ CB สมมูลตามแถวกับเมตริกซ์ AB แต่ CB เป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิก

อย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น AB จะเป็นเอกฐาน นั่นคือ det AB = 0 แต่เราทราบว่า det A = 0 เพราะฉะนั้น จะได้

$$\det AB = \det A \det B = 0$$

จาก 2กรณีข้างต้น สรุปได้ว่า ไม่ว่า A จะเป็นเอกฐานหรือไม่เป็นเอกฐาน จะได้

$$\det AB = \det A \det B$$

หรือ $$|AB| = |A|\,|B| \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 2.3.9 ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากเมตริกซ์ A โดยเอาจำนวนจริง c ไปคูณกับสมาชิกทุกตัวของแถว (หรือสดมภ์) แล้วนำไปบวกกับแถว (หรือสดมภ์) อื่น ดังนั้น ตัวกำหนดของเมตริกซ์ ผลลัพธ์จะมีค่าเท่ากับตัวกำหนดของเมตริกซ์เริ่มแรก นั่นคือ

$$|B| = |A| \qquad (2.3.13)$$

พิสูจน์

ให้ $$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\ldots a_{1p}\ldots a_{1n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\ldots a_{nk}\ldots a_{np}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

สร้างเมตริกซ์ใหม่ B โดยคูณ c กับสดมภ์ที่ k แล้วนำไปบวกกับสดมภ์ที่ p ดังนั้น

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & (a_{1p}+ca_{1k}) & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & (a_{np}+ca_{nk}) & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้ากระจาย $|B|$ ตามสดมภ์ที่ p จะได้

$$\begin{aligned} |B| &= (a_{1p}+ca_{1k})A_{1p} + \ldots + (a_{np}+ca_{1k})A_{np} \\ &= (a_{1p}A_{1p} + \ldots + a_{np}A_{np}) + c(a_{1k}A_{1p} + \ldots + a_{nk}A_{np}) \end{aligned}$$

สำหรับวงเล็บแรกทางขวามือใช้ทฤษฎีบท 2.2.1 และใช้ทฤษฎีบท 2.3.6 สำหรับวงเล็บหลัง ดังนั้น

$$|B| = |A| + c(0)$$

หรือ $$|B| = |A| \qquad \#$$

การพิสูจน์ในลักษณะเดียวกันนี้สามารถทำได้ ถ้าเอาตัวคงค่าคูณสมาชิกแต่ละตัวของบางแถวแล้วนำไปรวมกับสมาชิกสมนัยของแถวอื่น

ตัวอย่าง 2.3.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

สร้างเมตริกซ์ใหม่ B โดยคูณแถวแรกขยายเมตริกซ์ A ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 3 ของ A ดังนั้น

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

และ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-12) + (0+8) = 0$$

นั่นคือ $|B| = |A|$

หรือ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

สังเกตว่าเฉพาะแถวที่ 3 เท่านั้นที่เปลี่ยนไป สำหรับทฤษฎีบท 2.3.9 จะช่วยได้มาก ในกรณีหาค่าตัวกำหนดอันดับมาก ดังเช่นตัวอย่างที่ 2.3.9 ถ้ากระจายตัวกำหนดสุดท้าย (เมตริกซ์ B) ตามสดมภ์แรก จะพบว่าตัวกำหนดเริ่มแรกอันดับสาม ถูกลดเป็นสเกลาร์คูณกับตัวกำหนดอันดับสอง นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.3.10 ตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยม คือผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงหลัก

พิสูจน์ (อยู่ในแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 25)

ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการใช้ทฤษฎีบท 2.3.10 เพื่อคำนวณหาค่าของตัวกำหนดของเมตริกซ์สามเหลี่ยม

ตัวอย่างที่ 2.3.10 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม ใช้ทฤษฎีบท 2.3.10 เพราะฉะนั้น

$$\det A = 4\cdot6\cdot1\cdot3 = 72$$

ถ้าเมตริกซ์ไม่เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม ก่อนใช้ทฤษฎีบท 2.3.10 จะต้องทำให้เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมเสมอ

ตัวอย่างที่ 2.3.11 จงหาตัวกำหนดของเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ใช้การดำเนินการ $(-2R_1+R_3)$, $(2R_2+R_3)$ และ $(-R_3+R_4)$ ตามลำดับ จะหาค่าของตัวกำหนดได้ดังนี้

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \underset{-2R_1+R_3}{=} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2R_2+R_3}{=} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-R_3+R_4}{=} \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= 1\cdot2\cdot3\cdot(-7)$$

$$= -42$$

การหาตัวกำหนดในบางกรณีมีการใช้ทฤษฎีบท 2.3.2 เพื่อทำเมตริกซ์ที่กำหนดให้เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อปรากฏว่ามีสมาชิกศูนย์อยู่ในแนวทแยงหลักและสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ ปรากฏในสดมภ์เดียวกันใต้แนวทแยงหลัก ให้สลับเปลี่ยนกับแถวที่เหมาะสมเพื่อตัดปัญหายุ่งยากนี้ ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 2.3.12 ใช้ทฤษฎีบท 2.3.2 เพื่อทำให้เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม ซึ่งจะแสดงดังนี้

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} (-1)\det\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ใช้ทฤษฎีบท 2.3.2)}$$

$$\underset{-4R_2 + R_4}{=} (-1)\det\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{(ใช้ทฤษฎีบท 2.3.9)}$$

$$= (-1)\{4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-5)\} \quad \text{(ใช้ทฤษฎีบท 2.3.10)}$$

$$= 120$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ให้เหตุผลโดยไม่ต้องกระจาย

(n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(ll) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

(ค) $\begin{vmatrix} 2x & 3x & 4x \\ 5x & 6x & 7x \\ 8x & 9x & 9x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ a & 9 & 9 \end{vmatrix}$ ถ้า $x \neq 0$ และ $x \neq \pm 1$

2. โดยไม่ต้องกระจาย แต่ให้ใช้ 2 ทฤษฎีบทหาค่าของ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3. กำหนดว่า $\det A = 8$ และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งเหมือนกับเมตริกซ์ A ยกเว้นแถวที่ 1 และแถวที่ 4 สับเปลี่ยนที่กัน จงหาค่าของ $\det B$

4. ถ้าอันดับของ $|A|$ มากกว่า 1 และถ้า $|A| \neq 0$ ดังนั้น $2 \det A = \det (2A)$ หรือไม่ ทำไม

5. ถ้า $\det [a_{ij}]_{3\times 3} = 4$ จงหา $\det 3[a_{ij}]_{3\times 3}$

6. จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} x+y & -z(x+y) \\ z+x & y(z+x) \end{vmatrix} = (x+y)(z+x)(y+z)$

โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.'

7. โดยไม่ต้องกระจาย จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x+y & x \\ x-y & 1 & 1 \\ x-y & 1 & y \end{vmatrix} = 0$ ให้เหตุผลทุกขั้นตอน

8. จงเปลี่ยนรูปแต่ไม่ต้องหาค่าของ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

เพื่อว่าสมาชิกในสดมภ์ที่ 1 เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้นในแถวที่ 3 (แนะนำ : ให้ใช้ทฤษฎีบท 2.3.9)

9. จงหาค่าของ $|A|$ ในข้อ 8

10. ใช้เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ เพื่อแสดงว่าทฤษฎีบท 2.3.6 เป็นจริง

11. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.3.8 เป็นจริง สำหรับแต่ละเมตริกซ์ต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

12. ให้ $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ เปรียบเทียบ $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ กับ $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (แนะนำ : ทำโดยใช้ทฤษฎีบท)

13. จงหาค่าของตัวกำหนดต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.9

(ก) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

(ข) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

(ค) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(ง) $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(จ) $\det\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

14. ถ้า c เป็นสเกลาร์ และถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ จงพิสูจน์ว่า $|cA| = c^n|A|$ (แนะนำ : ใช้ทฤษฎีบท 2.3.7 และนิยามการคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์)

15. ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ และ $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ ใช้ทฤษฎีบท 2.3.8 จงพิสูจน์ว่า

$$|ABC| = |A||B||C|$$

16. จงหาตัวอย่างของเมตริกซ์ขนาด 2×2 ของ A และ B ซึ่งจะแสดงการคาดคะเนว่า

$\det(A+B) = \det A + \det B$ ไม่สมบูรณ์

ในแบบฝึกหัดข้อ 17-24 ให้ใช้ทฤษฎีบท 2.3.10 (และทฤษฎีบท 2.3.2 และ 2.3.9 ถ้าจำเป็น) เพื่อคำนวณตัวกำหนดของเมตริกซ์ที่กำหนดให้

17. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 14 & 8 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

25. **พิสูจน์ทฤษฎีบท** 2.3.10

26. **จงพิสูจน์ว่า** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+h & i+j & k+\ell \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & j & \ell \end{vmatrix}$

2.4 เมตริกซ์โคแฟกเตอร์และเมตริกซ์ผูกพัน

(The cofactor matrix and adjoint matrix)

นิยาม 2.4.1 ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geqslant 2$ เมตริกซ์โคแฟกเตอร์ (cofactor matrix) ของ A เขียนแทนด้วย cof A คือเมตริกซ์ขนาด $n\times n$ ซึ่งสมาชิกของเมตริกซ์ในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j คือ A_{ij} และสมาชิกของ A_{ij} คือโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ใน A

ตัวอย่างที่ 2.4.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา cof A

วิธีทำ

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

นิยาม 2.4.2 เมตริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ adj A ขนาด $n\times n$ (เมื่อ $n \geqslant 2$) คือการสลับเปลี่ยนของ cof A นั่นคือ

$$\text{adj } A = (\text{cof } A)^T \qquad (2.4.1)$$

ตัวอย่างที่ 2.4.2 ใช้ตัวอย่างที่ 2.4.1 จงหาค่าของ adj A

วิธีทำ เพราะว่า $\text{adj } A = (\text{cof } A)^T$

ดังนั้น $$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ **ดังนั้น**

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I_n \qquad (2.4.2)$$

พิสูจน์ จากนิยาม 2.4.2 จะได้

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_1 A_{12} & & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

พิจารณาสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) แถวที่ i สดมภ์ที่ j ของผลคูณเมตริกซ์ A(adj A) คือ

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

ถ้า $i = j$ จากทฤษฎีบท 2.3.3 จะได้

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}a_{in} = \det A$$

และถ้า $i \neq j$ จากทฤษฎีบท 2.3.6 จะได้

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

นั่นคือ เราสามารถกล่าวได้ว่าสมาชิกที่ตำแหน่ง (i, j) ของเมตริกซ์ A(adj A) มีค่าเป็น det A เมื่อ $i = j$ และมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $i \neq j$ ดังนั้น

$$A(\mathrm{adj}\ A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$$

$$= (\det A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\det A)I_n \qquad (2.4.3)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า

$$(\mathrm{adj}\ A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

พิจารณาสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของผลคูณเมตริกซ์ (adj A)A คือ

$$A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \ldots + A_{ni}a_{nj}$$

หรือ $a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \ldots + a_{nj}A_{ni}$

ถ้า $i = j$ จากทฤษฎีบท 2.3.3 จะได้

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \det A$$

และถ้า $i \neq j$ จากทฤษฎีบท 2.3.6 จะได้

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \ldots + a_{nj}A_{ni} = 0$$

นั่นคือ

$$(\mathrm{adj}\ A)A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \det A \end{bmatrix}$$

$$= (\det A)I_n \qquad (2.4.4)$$

$$(2.4.3) = (2.4.4)$$

ดังนั้น $$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I_n \qquad (2.4.5)$$

ถ้า $\det A \neq 0$ **เอา** $\det A$ **หารตลอดสมการ** (2.4.5) **แล้วจัดรูปใหม่ จะได้**

$$A\left(\frac{1}{\det A}\text{adj } A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\text{adj } A\right)A = I, \qquad (2.4.6)$$

ตัวอย่างที่ 2.4.3 จงแสดงว่า $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A$ โดยการคำนวณผลคูณ $A(\text{adj } A)$ และ $(\text{adj } A)A$ **เมื่อกำหนดให้** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.4.1 และตัวอย่างที่ 2.4.2

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 11I, \qquad (2.4.7)$$

และ

$$(\text{adj} A)A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= 11I, \qquad (2.4.8)$$

$$(2.4.7) = (2.4.8)$$

เพราะฉะนั้น $$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = 11I_3$$

แบบฝึกหัด 2.4

ในแบบฝึกหัดข้อ 1 ถึง 6 ใช้นิยาม 2.4.1 และ 2.4.2 หาเมตริกซ์ผูกพันของเมตริกซ์ที่กำหนดให้

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ (ในเมื่อ $n \geq 2$) เปรียบเทียบ cof A และ adj A ให้เหตุผล

8. สำหรับเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ (ในเมื่อ $n \geq 2$)

$$(\text{cof } A)^T = \text{cof}(A^T)$$

ใช่หรือไม่ ให้เหตุผล

1.6 ลำดับชั้นของเมตริกซ์ (Rank of matrix)

ตัวกำหนดสามารถใช้หาลำดับชั้นของเมตริกซ์ (ไม่ว่าเมตริกซ์จะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือจัตุรัสก็ตาม) ประโยชน์ของลำดับชั้นจะอธิบายในบทที่ 5

นิยาม 2.5.1 ลำดับชั้นของเมตริกซ์ A คือจำนวนที่มากที่สุด r ซึ่ง A มีเมตริกซ์ย่อยขนาด $r \times r$ และตัวกำหนดของมันไม่เป็นศูนย์

ข้อสังเกต ถ้าสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ลำดับชั้นจะเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 2.5.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาลำดับชั้นของ A

วิธีทำ ลำดับชั้นของ A ไม่ใช่ 3 เพราะว่า $\det A = 0$ แต่ลำดับชั้นของ A คือ 2 เพราะว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์อย่างน้อยที่สุดเมตริกซ์หนึ่งขนาด 2×2 ไม่เป็นศูนย์

เพราะว่า
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

เอาสดมภ์ที่ 1 ไปบวกกับสดมภ์ที่ 3
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

เอา 2 คูณสดมภ์ที่ 2 แล้วไปบวกกับสดมภ์ที่ 1
$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

ใช้ทฤษฎีบท 2.3.9 และทฤษฎีบท 2.3.5 จะได้
$$\det A = 0$$

เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของ A ไม่ใช่ 3

พิจารณาเมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2
$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = (2)(4) - (1)(-1)$$
$$= 8+1 = 9 \neq 0$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของ A คือ 2

ตัวอย่างที่ 2.5.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

จงหาลำดับชั้นของ A

วิธีทำ พิจารณาเมตริกซ์ย่อยขนาด 3×3

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det A_1 = 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det A_2 = 0$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det A_3 = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \neq 0$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของ A คือ 3

ทฤษฎีบท 2.5.1 ลำดับชั้นของเมตริกซ์ A จะเท่ากับลำดับชั้นของ A^T

พิสูจน์ ให้

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ใช้นิยามการสลับเปลี่ยน

ดังนั้น
$$A^T = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{array}\right]$$

จะพบว่าเมตริกซ์ย่อยของ A^T คือการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ย่อยสมนัยของ A จากทฤษฎีบท 2.3.2 จะได้ว่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ทั้งสองมีค่าเท่ากัน เพราะฉะนั้น ลำดับชั้นของ A^T เท่ากับลำดับชั้นของ A #

ข้อสังเกต ถ้า r คือลำดับชั้นของ A ดังนั้น ตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยแต่ละตัวของ A อันดับ r+1 และมากกว่า จะมีค่าเป็นศูนย์และสำหรับ A^T ก็เป็นจริงด้วย นอกจากนี้สามารถกล่าวเพิ่มได้ว่าจะมีตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยอันดับ r ใน A อย่างน้อย 1 ค่า ซึ่งไม่เป็นศูนย์ และอย่างน้อย 1 ค่าที่สมนัยใน A^T ไม่เป็นศูนย์ด้วย

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น ลำดับชั้นของ $A \leqslant \min\{m, n\}$

พิสูจน์ ปรากฏการณ์ 2 อย่าง ในการหาลำดับชั้นของ A กล่าวคือ ถ้าเมตริกซ์ A มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ลำดับชั้นของ A เป็นศูนย์ และถ้าเมตริกซ์ A มีขนาด $m\times n$ ลำดับชั้นของ $A\leqslant m$ แต่จากทฤษฎีบท 2.5.1 จะได้ว่า ลำดับชั้นของ $A\leqslant n$ ดังนั้นลำดับชั้นของ $A \leqslant \min\{m, n\}$

#

ตัวอย่างที่ 2.5.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่าลำดับชั้นของ A เท่ากับลำดับชั้นของ A^T

วิธีทำ พิจารณาเมตริกซ์ย่อย A_1 ใน A

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของ A คือ 2

เพราะว่า
$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ย่อย A_2 ใน A^T

$$\det A_2 \;=\; \det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \;=\; -3 \;\neq\; 0$$

ดังนั้น ลำดับชั้นของ A^T คือ 2

นั่นคือ ลำดับชั้นของ A = ลำดับชั้นของ A^T

ข้อสังเกต ถ้าเมตริกซ์ A มีขนาด $m \times n$ และลำดับชั้นของ A เท่ากับค่าต่ำสุดของ m และ n ดังนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า A มีลำดับชั้นเต็ม (full rank)

ตัวอย่างที่ 2.6.4 **เมตริกซ์** $[0]$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ทั้งหมดมีลำดับชั้นเป็นศูนย์และเมตริกซ์

$[4]$, $\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

ทั้งหมดมีลำดับชั้นเป็น 1 และเมตริกซ์

$[1]$, $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ทั้งหมดมีลำดับชั้นเต็ม (full rank)

สุดท้ายถ้าให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และมีลำดับชั้นเป็น n ดังนั้น ตัวกำหนดของ A ไม่เป็นศูนย์ จากทฤษฎีบท 2.4.2 จะได้ความเกี่ยวเนื่องระหว่างลำดับชั้นและตัวผกผันดังนี้

ทฤษฎีบท 2.5.3 เมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$ มีตัวผกผันก็ต่อเมื่อลำดับชั้นของ A คือ n

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

(1) ถ้าลำดับชั้นของ A คือ n ดังนั้น $\det A \neq 0$ จากทฤษฎีบท 2.4.2 เมื่อ $\det A \neq 0$ จะหา A^{-1} ได้

(2) ถ้า A มีตัวผกผัน A^{-1} ดังนั้น $\det A \neq 0$ เมื่อ $\det A \neq 0$ ลำดับชั้นของ A คือ n #

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงให้เหตุผลว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

   (ก) ถ้า $A = [a_{ij}]_{4\times5}$ มีลำดับชั้นเป็น 3 ดังนั้น ตัวกำหนดของทุก ๆ เมตริกซ์ย่อยขนาด 4×4 เป็นศูนย์ และในทางกลับกัน ถ้าทุก ๆ ตัวกำหนดขนาด 4×4 มีค่าเป็นศูนย์ ลำดับชั้นของเมตริกซ์คือ 3

   (ข) ลำดับชั้นของ A เท่ากับลำดับชั้นของ A^T

   (ค) ถ้า A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตรขนาด 3×3 ลำดับชั้นของ A จะน้อยกว่า 3

2. ลำดับชั้นมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ของเมตริกซ์ขนาด $m\times n$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $m>n$ คือเท่าใด

3. จงหาลำดับชั้นของเมตริกซ์ต่อไปนี้

   (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

   (ข) $\begin{bmatrix} 203 & 21 & 243 & 4 \end{bmatrix}$ 1

   (ค) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (ง) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (จ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. ภายใต้เงื่อนไขอะไรลำดับชั้นของเมตริกซ์ต่อไปนี้เป็น 3 เป็นไปได้ไหม ลำดับชั้นเป็น 1 ทำไม

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

5. จงหาลำดับชั้นของเมตริกซ์แต่งเติมและเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ x+3y &= 4 \\ 2x-y &= 2 \end{aligned}$$

6. จงเขียนตัวอย่างของเมตริกซ์ขนาด 4×4 ซึ่งมีลำดับชั้นเป็น 2

7. ถ้าสดมภ์ที่ 2 ของ $A = [a_{ij}]_{4\times 3}$ ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ทั้งหมด เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของ A ได้อย่างไร

8. ให้ $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$

(ก) ถ้า $\det A = 0$ เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของ A ได้อย่างไร

(ข) ถ้า $\det A \neq 0$ เราสามารถพูดเกี่ยวกับลำดับชั้นของ A ได้อย่างไร

9. จงหาลำดับชั้นของเมตริกซ์ต่อไปนี้ และเมตริกซ์ไหนมีลำดับชั้นเต็ม (full rank)

(ก) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า AA^T มีตัวผกผัน และจงหา $(AA^T)^{-1}$

จงพิสูจน์ว่า A^TA ไม่มีตัวผกผัน

2.6 กฎของเครเมอร์ (Cramer's rule)

วิธีหนึ่ง (ซึ่งอาจไม่ใช่วิธีดีที่สุด) ที่ใช้หารากของระบบสมการของ n สมการเชิงเส้นและ n ตัวไม่รู้ค่า เรียกว่า "กฎของเครเมอร์ (Cramer's rule)"

พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์

$$AX = B$$

ในเมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ถ้าให้ $({}^iA)$ แทนเมตริกซ์ซึ่งได้จากเมตริกซ์ A โดยการแทนสดมภ์ที่ i ของ A ด้วยเวกเตอร์ B

ทฤษฎีบท 2.6.1 (กฎของเครเมอร์) ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้นระบบสมการ $AX = B$ มีเพียงหนึ่งคำตอบเท่านั้น และคำตอบนั้นคือ

$$\boxed{x_i = \frac{\det({}^iA)}{\det A}} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \qquad (2.6.1)$$

พิสูจน์ ระบบสมการคือ

$$AX = B$$

ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้นเราสามารถหาตัวผกผันของ A ได้ คูณ A^{-1} ข้างหน้าทั้งสองข้างของระบบสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
A^{-1}AX &= A^{-1}B \\
I_nX &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B \qquad (2.6.2)
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นคำตอบของระบบสมการ $AX = B$

จาก (2.4.5)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\text{adj } A}{\det A} B \\
&= \frac{1}{\det A}(\text{cof } A)^T B \\
&= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} (b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) \\ (b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\det({}^1A)}{\det A} \\ \dfrac{\det({}^2A)}{\det A} \\ \vdots \\ \dfrac{\det({}^nA)}{\det A} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ถ้า $({}^iA)$ แทนเมตริกซ์ซึ่งได้จากการแทนสดมภ์ที่ i ของ A ด้วยเวกเตอร์ B ดังนั้น

$$x_i = \frac{\det({}^iA)}{\det A} \qquad \text{สำหรับ } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ตัวอย่างที่ 2.6.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\
x_2 - x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

โดยใช้กฎของเครเมอร์

วิธีทำ ระบบสมการนี้สามารถเขียนในรูปสมการเมตริกซ์ $AX = B$ โดยที่

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6
$$

LW5lf-h

$$
{}^1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad {}^2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\det({}^1A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24
$$

$$
\det({}^2A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -36
$$

$$
\det({}^3A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12
$$

ใช้กฎของเครเมอร์

$$x_1 = \frac{\det({}^1A)}{\det A} = \frac{24}{-6} = -4$$

$$x_2 = \frac{\det({}^2A)}{\det A} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$x_3 = \frac{\det({}^3A)}{\det A} = \frac{-12}{-6} = 2$$

ตัวอย่างที่ 2.6.2 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

โดยใช้กฎของเครเมอร์

วิธีทำ ในรูปเมตริกซ์ระบบสมการนี้สามารถเขียนเป็น

$$AX = B$$

ในเมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$${}^1A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$\det({}^{1}A) = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -32$$

$$\det({}^{2}A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 32$$

$$\det({}^{3}A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -64$$

$$\det({}^{4}A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 64$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -32$$

ใช้กฎของเครเมอร์ ดังนั้น

$$x_1 = \frac{\det({}^{1}A)}{\det A} = \frac{-32}{-32} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det({}^{2}A)}{\det A} = \frac{32}{-32} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det({}^{3}A)}{\det A} = \frac{-64}{-32} = 2$$

$$x_4 = \frac{\det(^4\mathbf{A})}{\det A} = \frac{64}{-32} = -2$$

ข้อสังเกต เกี่ยวกับการใช้กฎของเครเมอร์

1. เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A ต้องเป็นเมตริกซ์จัตุรัส
2. กฎนี้จะใช้ไม่ได้ ถ้าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A มีตัวกำหนดเป็นศูนย์
3. สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาดใหญ่ การหาคำตอบโดยวิธีนี้จะยุ่งยากมาก เพราะต้องหาตัวกำหนดมากครั้ง

จากตัวอย่างพบว่ากฎของเครเมอร์เป็นวิธีที่เหมาะในกรณีหาคำตอบของระบบสมการน้อย ๆ และมีตัวแปรค่าเพียงสองหรือสามตัวแปรเท่านั้น

แบบฝึกหัด 2.6

1. ในระบบสมการต่อไปนี้ จงหาค่า y โดยใช้กฎของเครเมอร์ และจงหาตัวไม่รู้ค่าอื่น ๆ โดยการแทนค่า

(ก) $\begin{cases} x+y = 5 \\ 2x-y = 7 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ -y+2z = 4 \\ 2x+2y = 1 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x-2y+z+t = 3 \\ x+y = 0 \\ 2x-y-t = 0 \\ x+y+z+t = 0 \end{cases}$

2. ในระบบสมการต่อไปนี้ จงหาตัวไม่รู้ค่าแต่ละตัวโดยใช้กฎของเครเมอร์

(ก) $\begin{cases} 2x-2y = 5 \\ x-4y = 7 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+3y+4z = 3 \\ x-2y-z = 1 \\ 3x+2x+3y-t = \text{[illegible]} \end{cases}$

(ค)

$x-y+z = 1$

(ง) $\begin{cases} 3x+y+3z+6w = 1 \\ 2x+3y+2z-w = 9 \\ x-y-z+3w = -9 \\ x+2y+z+2w = 2 \end{cases}$

คำศัพท์ใหม่

determinant	ตัวกำหนด	2.1
permutation	วิธีเรียงสับเปลี่ยน	2.1
interchange	สับเปลี่ยน	2.1
nature order	อันดับธรรมชาติ	2.1
cofactor expansion	การกระจายโดยโคแฟกเตอร์	2.2
minor of a_{ij}	ส่วนน้อยของ a_{ij}	2.2
cofactor matrix	เมตริกซ์โคแฟกเตอร์	2.4
adjoint matrix	เมตริกซ์ผูกพัน	2.4
rank of matrix	ลำดับชั้นของเมตริกซ์	2.5
Cramer's rule	กฎของเครเมอร์	2.6