บทที่ 1
เมตริกซ์

บทที่ 1
เมตริกซ์ (MATRICES)

1.1 บทนำ (Introduction)

ในชีวิตประจำวันเราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดซึ่งเขียนอยู่ในรูปการจัดเรียงสี่เหลี่ยมมุมฉากของตัวเลข ตัวอย่างเช่น กระดานแจ้งผลการแข่งขันฟุตบอลไทยแลนด์คัพประจำปี 2528 ปรากฏผลดังนี้

	ชนะ	แพ้	เสมอ
ทีม A	4	0	1
ทีม B	3	1	1
ทีม C	1	4	0
ทีม D	2	2	1

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

หรือบัญชีแสดงรายการขายเสื้อยี่ห้อหนึ่ง ประจำเดือนมกราคม 2528 ปรากฏยอดขายดังนี้

ชนิดเสื้อ	เบอร์ L	เบอร์ M	เบอร์ S
เชิ๊ตแขนสั้น	5	12	4
เชิ๊ตแขนยาว	7	10	3
ฮาวาย	2	3	1
โปโล	1	1	0

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น

$$\begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

หรือแม้แต่ในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถจัดเรียงสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น (linear equations system)

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

ให้อยู่ในสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

(1.1) (1.2) และ (1.3) คือตัวอย่างเบื้องต้นของเมตริกซ์

ในบทนี้จะเป็นการนิยามความหมายของเมตริกซ์ และถกปัญหาการดำเนินการหลายอย่างที่จำเป็น เพื่อสร้างการดำเนินการทางพีชคณิตของเมตริกซ์ และจะพิจารณาการดำเนินการอื่น ๆ ซึ่งมีประโยชน์ในการศึกษาเมตริกซ์ต่อไป

ดังนั้นจากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถให้คำจำกัดความของเมตริกซ์ดังนี้

เมตริกซ์คือ การจัดเรียงกลุ่มของตัวเลขหรือฟังก์ชันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular array) ภายในเครื่องหมาย [ ]

นิยาม 1.1.1 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก การจัดเรียงสี่เหลี่ยมมุมฉากของสมาชิกซึ่งจัดเรียง m แถว (row) และ n สดมภ์ (column) คือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} \qquad \begin{aligned} i &= 1,2,\ldots,m \\ j &= 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ A มี m แถว และ n สดมภ์ ดังนั้นถ้าต้องการพูดถึงขนาดของเมตริกซ์ A จะใช้จำนวนแถวและจำนวนสดมภ์บอกขนาดของเมตริกซ์ ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $m \times n$ นั่นคือเมตริกซ์ A มีขนาด $m \times n$ (m by n matrix)

ดรรชนีล่างตัวแรก (the first subscript) ของสมาชิกแต่ละตัวเรียกว่า "ดรรชนีล่างแนวนอน (row subscript)" และดรรชนีล่างตัวที่สอง (the second subscript) เรียกว่า "ดรรชนีล่างแนวตั้ง (column subscript)"

ดังนั้น a_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.1.1 ตัวอย่างของเมตริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; [3 \;\; 2 \;\; 5], \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์แรก $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมตริกซ์แนวตั้งหรือเมตริกซ์สดมภ์ (column matrix) ขนาด 2×1

เมตริกซ์ที่สอง $[3 \;\; 2 \;\; 5]$ เรียกว่าเมตริกซ์แนวนอน หรือเมตริกซ์แถว (row matrix) ขนาด 1×3

สามเมตริกซ์ต่อไป $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{bmatrix}$
เรียกว่าเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) เพราะว่าแต่ละเมตริกซ์มีจำนวนแถวและจำนวนสดมภ์เท่ากัน

และเมตริกซ์สุดท้าย $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ เรียกว่าเมตริกซ์ขนาด 2×4

ตัวอย่างที่ 1.1.2 ตัวอย่างของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^2 & 2 \\ 2x & x+2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2i & i \\ 3 & i-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pi \\ \frac{2}{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 24 & 0121 \end{bmatrix}$ สมาชิกเป็นจำนวนเต็มและเป็นจำนวนจริง

$\begin{bmatrix} x^2 & 2 \\ 2x & x+2 \end{bmatrix}$ สมาชิกเป็นค่าของฟังก์ชันของตัวแปรจริง x

$\begin{bmatrix} 2i & i \\ 3 & i-1 \end{bmatrix}$ สมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

$\begin{bmatrix} \pi \\ \frac{2}{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ สมาชิกเป็นจำนวนจริง

ข้อตกลงเกี่ยวกับเมตริกซ์

1. เมตริกซ์จะเขียนแทนด้วยอักษรโรมันตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C,...
2. สมาชิกของเมตริกซ์จะเขียนแทนด้วยอักษรโรมันตัวพิมพ์เล็ก a, b, c,...
3. เครื่องหมายที่ใช้แทนเมตริกซ์คือ [ ] หรือ ⌈ ⌉ หรือ ( ) หรือ || || ก็ได้
4. สมาชิกของเมตริกซ์ที่เป็นสเกลาร์ อาจเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงเรียกว่า "เมตริกซ์จริง (real matrix)" และเมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อนเรียกว่า "เมตริกซ์เชิงซ้อน (complex matrix)"
5. เมตริกซ์ใดที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงแถวเดียว เราจะเรียกว่า "เมตริกซ์แถว (row matrix) หรือเวกเตอร์แถว (row vector)"
6. เมตริกซ์ใดที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงสดมภ์เดียว เราจะเรียกว่า "เมตริกซ์สดมภ์ (column matrix) หรือเวกเตอร์สดมภ์ (column vector)"
7. ในกรณีที่ไม่ต้องการเน้นขนาดของเมตริกซ์ ก็ไม่ต้องเขียนขนาดกำกับไว้

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \pi & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2-3i & 5 & -3 \\ 1+i & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = [3], \quad E = \begin{bmatrix} i & 2i \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(ก) เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์จริง

(ข) เมตริกซ์ใดไม่เป็นเมตริกซ์จริง (เมตริกซ์เชิงซ้อน)

(ค) เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์จตุรัส

(ง) เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์แถว

(จ) เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์สดมภ์

(ฉ) บอกขนาดของเมตริกซ์ทั้งหมด

2. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} i & 2i & 3i & 4i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{4} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 40 & 21 & 00 \end{bmatrix} \quad D = [0], \quad E = \begin{bmatrix} 4i & I-2i & 43 \end{bmatrix}$$

จงตอบคำถามเหมือนข้อ 1

3. ทำไมการจัดเรียงต่อไปนี้ไม่เป็นเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & \end{bmatrix}$

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

(ก) a_{22} คืออะไร

(ข) ตำแหน่งของสมาชิกซึ่งมีค่าเป็น 6 คือตำแหน่งใด

(ค) ขนาดของเมตริกซ์ A มีขนาดเท่าใด

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

   (ก) a_{21} คืออะไร

   (ข) a_{23} นิยามหรือไม่

   (ค) ตำแหน่งของสมาชิกซึ่งมีค่าเป็น 8 คืออะไร

   (ง) ขนาดของเมตริกซ์ A คืออะไร

6. จงเขียนเมตริกซ์ศูนย์ขนาด 2×3

7. จงเขียนเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ ซึ่งมีสมาชิก $a_{12} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{31} = 6$, $a_{11} = 2$, $a_{32} = 8$, $a_{21} = 3$

8. จงเขียนสมาชิกบนเส้นทแยงหลักของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

9. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ w, x, y และ z เพื่อว่า $A = B$

10. จงหาทุกค่าของตัวไม่รู้ค่าเพื่อว่าสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} u+1 & 3 \\ u+v & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2 การดำเนินการระหว่างเมตริกซ์ (Matrix operations)

1.2.1 การเท่ากันของเมตริกซ์ (Equality of matrices)

นิยาม 1.2.1 เมตริกซ์ A เท่ากับเมตริกซ์ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์ A เท่ากับสมาชิกที่สมนัยของเมตริกซ์ B นั่นคือ ถ้ากำหนดให้

$A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$

เราจะกล่าวว่า $A = B$

ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$

ตัวอย่างที่ 1.2.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า $A = B$ จงหาค่าของ x_1, x_2, x_3 และ x_4

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.1 เพราะว่า A = B ดังนั้น

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

และ $x_4 = 1$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 จงหาค่าของ u และ v เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} u+1 & 3 \\ u+v & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.1 จะได้

$$u+1 = -8$$

หรือ $u = -9$

และ $u+v = -7$

$$v = -7-(-9) = 2$$

สัญลักษณ์ $A \neq B$ หมายความว่า A ไม่เท่ากับ B

ตัวอย่างที่ 1.2.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.1 กล่าวได้ว่า $A \neq B$ เพราะว่า A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน

1.2.2 การบวกเมตริกซ์ (Addition of matrices)

การบวกเมตริกซ์สามารถกระทำได้ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองที่นำมาบวกกันมีขนาดเท่ากัน และเรียกลักษณะนี้ว่าเป็นไปตามการบวก (conformable for addition)

นิยาม 1.2.2 กำหนดให้เมตริกซ์

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

ผลบวกของเมตริกซ์นิยามโดย

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

กล่าวอีกอย่างได้ว่า ถ้าเมตริกซ์ทั้งสอง A และ B มีขนาดเท่ากัน ดังนั้นเมตริกซ์ทั้งสองบวกกันได้ โดยบวกสมาชิกที่สมนัยกัน ผลลัพธ์ที่ได้เรียกว่า ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B

ตัวอย่างที่ 1.2.4 กำหนดให้

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ A + B

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.2 จะได้

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-3) & 2 + 1 & 3 + 5 \\ 0 + 2 & -2 + 1 & 4 + 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต ถ้า

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

A + B จะไม่นิยาม (หาค่าไม่ได้) เพราะว่า A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน

นิยาม 1.2.3 ถ้าสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์เป็นศูนย์ จะเรียกเมตริกซ์นี้ว่า "เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix or null matrix)" และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ O

ตัวอย่างที่ 1.2.5

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ คือ เมตริกซ์ศูนย์ขนาด } 2\times 2$$

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ คือเมตริกซ์ศูนย์ขนาด } 2 \times 3$$

จากนิยามการบวกเมตริกซ์ (1.2.2) สำหรับเมตริกซ์ A ใด ๆ จะพบว่า

$$A + O = A$$

ดังนั้น บางครั้งจะเรียก O ว่า "เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) สำหรับการบวก"

เมตริกซ์ผกผัน (Inverse matrix) สำหรับการบวกของเมตริกซ์ A คือค่าลบของ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วย -A

นิยาม 1.2.4 เมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีสมาชิกแต่ละตัวเป็นค่าลบของสมาชิกที่สมนัยในเมตริกซ์ A ที่กำหนดให้ จะเรียกเมตริกซ์ลักษณะนี้ว่า "ค่าลบของ A หรือเมตริกซ์ผกผันสำหรับการบวกของ A"

ตัวอย่างที่ 1.2.6 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

จากนิยาม 1.2.4 จะได้

$$-A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต

$$A + (-A) = 0$$

1.2.3 **การลบเมตริกซ์** (Substraction of matrices)

นิยาม 1.2.5 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น ผลต่างของเมตริกซ์ทั้งสอง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A - B นิยามเป็น

$$A - B = A + (-B)$$

หรือ $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 1.2.7 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ $A - B$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.5

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+4 & -2+(-1) & 7+5 \\ 3+0 & 4+(-2) & 0+(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.2.4 **การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์** (The scalar multiplication)

นิยาม 1.2.6 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และให้ k เป็นสเกลาร์ ดังนั้นผลคูณของสเกลาร์ k และเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ kA นิยามเป็น

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าผลคูณของสเกลาร์ k และเมตริกซ์ A คือเมตริกซ์ ซึ่งมีสมาชิกแต่ละตัวเป็น k เท่าของสมาชิกใน A ที่สมนัยกัน

นั่นคือถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \; . \; . \; . & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \; . \; . \; . & ka_{2n} \\ & . \quad . & . \\ ka_{m1} & ka, \; . \; . \; . & ka,. \end{bmatrix} .$$

ตัวอย่างที่ 1.2.8 **ให้**

$$A = \begin{bmatrix} \\ 01\ -2\ 3\ \ -1\ 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ

(ก) 2A

(ข) $-\frac{1}{2}$ A

วิธีทำ ใช้นิยาม 12.6

$$\text{(ก)}\ 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ข)}\ -\frac{1}{2}A = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1.2.5 **การคูณระหว่างเมตริกซ์** (The multiplication of matrices)

A และ B เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ผลคูณเมตริกซ์ AB จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนสดมภ์ของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B

นิยาม 1.2.7 ถ้าผลคูณของสองเมตริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB คูณกันได้แล้วก็ต่อเมื่อ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และผลคูณของเมตริกซ์ A และ B คือ

$$AB = C = [c_{ij}]_{m \times p} \text{ ในเมื่อ}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad ; \ i = 1,2,3,\ldots,m$$

$$j = 1,2,3,\ldots,p$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

= ผลรวมของผลคูณของสมาชิกแถวที่ i ของ A กับสมาชิกที่สมนัยในสดมภ์ที่ j ของ B ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้คือสมาชิกแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ของ C = AB นั่นเอง

การดำเนินการตามนิยามข้างต้นสามารถแสดงในรูปทั่ว ๆ ไป ด้วยแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{n1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \cdots b_{1p} \\ \cdots b_{2p} \\ \cdot\ \cdot \\ \cdots b_{np} \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} & \cdots c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots c_{mp} \end{bmatrix}$$

ในเมื่อ $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{in}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \begin{array}{|c|} \hline b_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \\ \hline \end{array} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & & & & \cdot\ \cdot \\ \cdot & & & & \cdot\ \cdot \\ \cdot & & & & \cdot\ \cdot \\ b_{n1} & \cdots & & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c_{m1} & & c_{mp} \end{bmatrix}$$

ในเมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่างที่ 1.2.9 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ AB

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.7 (การคูณเมตริกซ์)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} = C_{2\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ในเมื่อ $c_{11} = 1(-1) + 3(2) = 5$

$c_{12} = 1(0) + 3(1) = 3$

$$c_{21} \;=\; 2(-1)+4(2) \;=\; 6$$

$$c_{22} \;=\; 2(0)+4(1) \;=\; 4$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

จากคุณสมบัติบางข้อของจำนวนจริงกล่าวว่า สำหรับ $a, b \in R$ จะได้

$$ab = ba$$

นั่นคือเป็นไปตามกฎการสลับที่ (Commutative law)

จากคุณสมบัติข้อนี้เราจะนำมาเปรียบเทียบในกรณีของเมตริกซ์ว่าเป็นไปตามกฎการสลับที่หรือไม่ ตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.10 ให้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{และ } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาผลคูณของเมตริกซ์

วิธีทำ **จากนิยามผลคูณเมตริกซ์**

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+1(2)+2(1) & 1(0)+1(1)+2(2) & 1(2)+1(0)+2(1) \\ 0(1)+1(2)+3(1) & 0(0)+1(1)+3(2) & 0(2)+1(0)+3(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต ในขณะที่ผลคูณ AB สามารถคูณกันได้ แต่ผลคูณ BA คูณกันไม่ได้ เพราะว่าจำนวนสดมภ์ของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

ตัวอย่างที่ 1.2.11 ให้

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{และ } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ CD และ DC

วิธีทำ จากนิยาม ผลคูณเมตริกซ์

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+1(2)+2(1) & 1(0)+1(1)+2(2) \\ 0(1)+1(2)+3(1) & 0(0)+1(1)+3(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } DC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+0(0) & 1(1)+0(1) & 1(2)+0(3) \\ 2(1)+1(0) & 2(1)+1(1) & 2(2)+1(3) \\ 1(1)+2(0) & 1(1)+2(1) & 1(2)+2(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้ผลคูณ CD และ DC ต่างก็สามารถคูณกันได้ แต่เมตริกซ์ทั้งสองไม่เท่ากัน นั่นคือ

$$CD \neq DC$$

จากตัวอย่างนี้สรุปได้ว่าผลคูณของสองเมตริกซ์ใด ๆ ไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่

ตัวอย่างที่ 1.2.12 ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{และ } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ

(ก) AB

(ข) BA

วิธีทำ จากนิยามผลคูณเมตริกซ์

$$\text{(il)}\ \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และ (ข) $\mathbf{B}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้พบว่าเมื่อ

$$\mathbf{AB} = 0$$

ไม่จำเป็นว่า $\mathbf{A} = 0$ หรือ $\mathbf{B} = 0$

ตัวอย่างที่ 1.2.13 ให้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ}\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

จงตรวจสอบว่า AB = AC หรือไม่

วิธีทำ จากนิยามการคูณเมตริกซ์

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ}\ \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ **AB = AC**

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้พบว่า AB = AC เป็นจริงได้ ถึงแม้ว่า $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$ หรือ $\mathbf{A} \neq 0$ ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงว่าการคูณเมตริกซ์มีประโยชน์อย่างไร ในปัญหาการตัดสินใจ

ตัวอย่างที่ 1.2.14 ชาวสวนผลไม้ในเชียงใหม่ได้บรรทุกผลไม้เพื่อส่งไปขายในจังหวัดทางตอนใต้ ในรถบรรทุกผลไม้คันนี้ประกอบด้วยลำไย 900 เข่ง ลิ้นจี่ 700 เข่ง และสตรอเบอรี่ 400 เข่ง ราคาขายต่อเข่งจะขึ้นกับชนิดของผลไม้และระยะทางของจังหวัดซึ่งกำหนดให้ตามตารางดังนี้

	ลำไย	ลิ้นจี่	สตรอเบอรี่
ตาก	300 บาท/ เข่ง	200 บาท/ เข่ง	500 บาท/ เข่ง
นครราชสีมา	400 บาท/ เข่ง	300 บาท/ เข่ง	200 บาท/ เข่ง
กาญจนบุรี	500 บาท/ เข่ง	100 บาท/ เข่ง	200 บาท/ เข่ง
กรุงเทพฯ	400 บาท/ เข่ง	200 บาท/ เข่ง	300 บาท/ เข่ง

อยากทราบว่าจังหวัดอะไรที่รถบรรทุกผลไม้ควรจะไปส่งเพื่อว่าชาวสวนจะได้รับกำไรสูงสุดจากการขายผลไม้ของเขา

วิธีทำ พิจารณาตารางข้างบนเมตริกซ์ราคา (price matrix) และเมตริกซ์จำนวน (quantity matrix) คือ

$$\begin{bmatrix} 900 \text{ เข่ง} \\ 700 \text{ เข่ง} \\ 400 \text{ เข่ง} \end{bmatrix}$$

ผลคูณของเมตริกซ์ทั้งสองนี้ซึ่งแสดงข้างล่างจะให้ "เมตริกซ์รายได้ (income matrix)" ซึ่งสมาชิกแต่ละตัวแทนรายได้รวมของผลไม้ 3 ชนิด ตามจังหวัดตามลำดับ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 300 & 200 & 500 \\ 400 & 300 & 200 \\ 500 & 100 & 200 \\ 400 & 200 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 900 \\ 700 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270{,}000 + 140{,}000 + 200{,}000 \\ 360{,}000 + 210{,}000 + 80{,}000 \\ 450{,}000 + 70{,}000 + 80{,}000 \\ 360{,}000 + 140{,}000 + 120{,}000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{[redacted]}0{,}000 \\ \text{[redacted]}0{,}000 \\ \text{[redacted]}0{,}001) \\ \text{[redacted]}0{,}000 \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่มากที่สุดในเมตริกซ์รายได้คือ 650,000 ดังนั้น เพื่อให้ได้รายได้สูงสุด (ทำให้มีกำไรสูงสุดด้วย) ควรส่งผลไม้ไปขายจังหวัดนครราชสีมา

1.2.6 การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ (The transpose of matrices)

ถ้าแถวและสดมภ์ของเมตริกซ์มีการสลับที่กัน กล่าวคือ แถวที่หนึ่งเปลี่ยนไปเป็น

สดมภ์ที่หนึ่ง แถวที่สองเปลี่ยนไปเป็นสดมภ์ที่สอง ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแถวในเมตริกซ์ที่กำหนดให้หมดไป เมตริกซ์ที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า "การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์" สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ คือ A^T นั่นคือ ถ้า a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์ A a_{ij} นี้จะเป็นสมาชิกในแถวที่ j และสดมภ์ที่ i ของ A^T ด้วย ไม่จำเป็นว่าเมตริกซ์ A ต้องเป็นเมตริกซ์จตุรัส จึงจะสลับเปลี่ยนได้

นิยาม 1.2.8 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น $B = [b_{ij}]_{n\times m}$

ในเมื่อ $b_{ij} = a_{ji}$ เรียกว่า การสลับเปลี่ยนของ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^T ดังนั้น

$$A^T = B = [b_{ij}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.15 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ จงหา A^T

วิธีทำ เนื่องจากเมตริกซ์ A มีสองแถว เพราะฉะนั้นถ้าสลับเปลี่ยนแถวที่หนึ่งใน A ไปเป็นสดมภ์ที่หนึ่งใน A^T และสลับเปลี่ยนแถวที่สองใน A ไปเป็นสดมภ์ที่สองใน A^T ดังนั้น

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

หรือหา A^T โดยใช้นิยาม 1.2.8

เพราะว่าเมตริกซ์ A มีขนาด 2×3 เพราะฉะนั้น A^T จะมีขนาด 3×2 และ

$$A^T = B = [b_{ij}]_{3\times 2} = [a_{ji}]_{3\times 2}$$

นั่นคือ

$$b_{11} = a_{11} = 1, \quad b_{12} = a_{,,} = -1$$

$$b_{21} = a_{12} = 3, \quad b_{22} = a22 = 2$$

$$b_{31} = a_{13} = 0, \quad b_{32} = a_{23} = 1$$

ดังนั้น

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ข้อสังเกต การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์หาโดยวิธีแรกจะง่ายกว่ามาก

นิยาม 1.2.9 ถ้า A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ **ดังนั้น ผลบวกเฉียงของเมตริกซ์** A (Trace of a matrix or spur of a matrix) **ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์** Tr(A) **คือผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงหลักของเมตริกซ์** A **นั่นคือ**

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.18 **ให้** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 6 \\ -4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

จงหา Tr(A), Tr(B) และ Tr(A + B)'

94
วิธีทำ จากนิยาม 1.2.9 **จะได้**

$$Tr(A) = 1 + 7 + (-4) = 4$$

$$Tr(B) = 2 + (-1) + 8 = 9$$

จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & 13 \\ -4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $Tr(A + B) = 3 + 6 + 4 = \mathbf{13}$

และ $Tr(A) + Tr(B) = 4 + 9 \quad 13$

จากสองสมการข้างต้นสรุปได้ว่า

$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B) = 13$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหาค่า $A+B$ (ถ้าเป็นไปได้) ในแต่ละกรณีต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ค) $A = [7]$ $B = [3]$

(ง) $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 7 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ฉ) $A = \begin{bmatrix} 1-2i & 8 \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3+4i & 1+2i \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

จงหาเมตริกซ์ X ซึ่งสอดคล้องตามสมการ

$$X + A = B$$

3. (ก) ถ้า $A = [4 \quad 3 \quad 4 \quad -5]$ และ $B = [b_{ij}]_{1\times 4}$ จงเขียนเมตริกซ์ $A+B$

(ข) ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $A+B$ มีค่าเท่ากับเมตริกซ์ $[8 \quad 8 \quad 3 \quad 1]$ ให้ใช้สมการนี้หาค่าสมาชิกของเมตริกซ์ B

4. จงหาผลคูณของ AB ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

พร้อมทั้งบอกขนาดของเมตริกซ์ A, B และ AB

5. กำหนดว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(ก) คูณข้างหน้า B ด้วย A

(ข) คูณข้างหลัง B ด้วย A

(ค) AB = BA หรือไม่

6. กำหนดว่า $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

จงคำนวณค่าต่อไปนี้ (ถ้าหาค่าได้)

(ก) คูณข้างหน้า A ด้วย C

(ข) คูณข้างหน้า A ด้วย B

(ค) C^2

(ง) B^2

(จ) คูณข้างหลัง (2A + C) ด้วย B

(ฉ) (AC)B

7. จงหาผลคูณของเมตริกซ์ AB (ถ้าเป็นไปได้) เมื่อกำหนดเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 4, 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(ง) $A = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(ฉ) $A = \begin{bmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1+2i & \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

8. ให้ $A = [a_{ij}]_{3\times1}$ และ $B = [b_{ij}]_{4\times5}$

(ก) ภายใต้เงื่อนไขอะไร AB จึงจะหาค่าได้

(ข) ขนาดของ AB คืออะไร

(ค) ภายใต้เงื่อนไขอะไร BA จึงจะหาค่าได้

9. ถ้า $A = [a_{ij}]_{4\times5}$ และ $B = [b_{ij}]_{5\times6}$ สมาชิกในแถวที่ 2 สดมภ์ที่ 3 ของผลคูณ AB คืออะไร

10 . จงหาผลคูณของ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\text{-}1 & & 0 & & 11 \\ 6\text{-}3 & & 14 & & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

11. ถ้า k เป็นสเกลาร์ จงพิสูจน์ว่า

(ก) $tr(kA) = ktr(A)$

(ข) $tr(A+B) = trA + trB$

(ค) $tr(AB) = tr(BA)$

1.3 คุณสมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการในเมตริกซ์

(Algebraic properties of matrices operations)

ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และเซตของทุก ๆ เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนจริง แทนด้วยสัญลักษณ์ $M_{m \times n}$ ต่อไปจะแสดงว่าการบวกใน $M_{m \times n}$ สอดคล้องตามคุณสมบัติการบวกของจำนวนจริง

คุณสมบัติการบวกของจำนวนจริงมี 4 ข้อ ดังนี้

A1. การบวกของจำนวนจริงเป็นไปตามกฎการสลับที่ (commutative law) นั่นคือ

$$a+b = b+a \tag{1.3.1}$$

เมื่อ a, b อยู่ใน $\mathbb{R}$

A2. การบวกของจำนวนจริงเป็นไปตามกฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) นั่นคือ

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{1.3.2}$$

เมื่อ a, b และ c อยู่ใน $\mathbb{R}$

A3. **สำหรับทุกค่าของ a ใน $\mathbb{R}$ จะมีสมาชิกตัวหนึ่งใน $\mathbb{R}$ ซึ่งจะแทนด้วย $-a$ และ** สอดคล้องตามสมการ

$$a+(-a) = 0 = (-a)+a \tag{1.3.3}$$

และเรียกสมาชิก $-a$ ว่า ตัวผกผันสำหรับการบวก (additive inverse) ของ a

A4. จะมีสมาชิกเอกลักษณ์ (identity element) ใน $\mathbb{R}$ แทนด้วย 0 (เรียกว่าศูนย์) สำหรับการบวก ดังนั้น สำหรับแต่ละค่า a ใน $\mathbb{R}$ จะได้

$$a+0 = a = 0+a \tag{1.3.4}$$

การพิสูจน์การบวกใน $M_{m \times n}$

ทฤษฎีบท 1.3.1 ถ้า A, B และ C อยู่ใน $M_{m \times n}$ ดังนั้น การบวกเมตริกซ์

(1) $A+B = B+A$ (คุณสมบัติการสลับที่)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ A, B และ C อยู่ใน $M_{m \times n}$

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$C = [c_{ij}]_{m \times n}$

ดังนั้น จากนิยามการบวกเมตริกซ์

(1) $$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n}$$
$$= B + A$$

พิสูจน์ (2) จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$(A+B) + C = \left([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}\right) + [c_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}$$
$$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]_{m \times n}$$

ใช้คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกของจำนวนจริง(1.3.2) ดังนั้น

$$(A+B) \text{ t } C = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]_{m \times n}$$
$$= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$$
$$= [a_{ij}]_{m \times n} + \left([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}\right)$$
$$= A + (B + C)$$ #

ตัวอย่างที่ 1.3.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ

$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

(ก) $A + B = B + A$

(ข) **(A+B) t C = A + (B+C)**

พร้อมทั้งหาค่าของข้อ (ก) และ (ข)

วิธีทำ (ก) จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$A+B = B+A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(ข) จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

และ $$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$(A+B)+C = A+(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.3.2 ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งสามารถคูณกันได้ ดังนั้น

$$(AB)C = A(BC) \qquad \text{(คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)}$$

พิสูจน์ ขั้นแรกจะต้องกำหนดให้ขนาดของเมตริกซ์ A, B และ C สามารถคูณกันได้ ดังนั้นกำหนดให้

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

$$B = [b_{jk}]_{n\times p}$$

และ $$C = [c_{k\ell}]_{p\times q}$$

ในเมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

$k = 1, 2, \ldots, p$; $\ell = 1, 2, \ldots, q$

จากนิยามการคูณเมตริกซ์

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]_{m\times p}$$

$$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{k\ell}\right]_{m\times q}$$

หรือ $$(AB)C = \left[\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{k\ell}\right]_{m\times q} \quad (1.3.5)$$

และ $$BC = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}\right]_{n\times q}$$

ดังนั้น $$A(BC) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}\right)\right]_{m\times q}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}\right]_{m\times q}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{k\ell}\right] \quad (1.3.6)$$

นั่นคือ (1.3.5) = (1.3.6)

จะได้ $(AB)C = A(BC)$ #

ตัวอย่างที่ 1.9.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.3.2 เป็นจริง

วิธีทำ จากนิยามการคูณเมตริกซ์

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$(AB)C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

และ $$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (1.3.8)$$

$$(1.3.7) = (1.3.8)$$

ดังนั้น $(AB)C = A(BC)$

ต่อไปเราจะพิจารณาคุณสมบัติซึ่งมีทั้งการคูณเมตริกซ์และการบวกเมตริกซ์

ทฤษฎีบท 1.3.3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ ดังนั้น

$$A(B+C) = AB+AC$$

คุณสมบัติการแจกแจงทางซ้ายสำหรับการคูณเมตริกซ์เทียบกับการบวกเมตริกซ์-
(left-distributive property)

พิสูจน์ จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$B+C = [b_{ij}+c_{ij}]_{n\times p}$$

ใช้นิยามการคูณเมตริกซ์

$$A(B+C) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})\right]_{m\times p}$$

ใช้คุณสมบัติของ Σ

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]_{m\times p}$$

$$= AB+AC \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 1.3.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ และ $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ ดังนั้น

$$(A+B)C = AC+BC$$

คุณสมบัติการแจกแจงทางขวาสำหรับการคูณเมตริกซ์เทียบกับการบวกเมตริกซ์- (right-distributive property)

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.3.4 จะเหมือนกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 1.3.3 (ให้พิสูจน์เอง)

ตัวอย่างที่ 1.3.3 ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีขนาดเท่ากัน จงแสดงว่าโดยทั่ว ๆ ไป

$$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$$

วิธีทำ เพราะว่า $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

ใช้คุณสมบัติการแจกแจงทางซ้ายจะได้ด้านขวามือ

$$= (A+B)A + (A+B)B$$

แล้วใช้คุณสมบัติการแจกแจงทางขวาอีกครั้งจะได้

$$(A+B)^2 = A^2+BA+AB+B^2$$

แต่โดยทั่ว ๆ ไป $BA \neq AB$

ดังนั้น $BA+AB \neq 2AB$

นั่นคือ จะได้ว่า $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

ทฤษฎีบท 1.3.5 ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งสามารถบวกกันได้ c และ d เป็นจำนวนจริง ดังนั้น (1) $c(A+B) = cA+cB$

(2) $(c+d)A = cA+dA$

พิสูจน์ (1) ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

ใช้นิยาม 1.2.6 ดังนั้น

$$\begin{aligned} c(A+B) &= c[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \\ &= [c(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n} \\ &= [ca_{ij}+cb_{ij}]_{m\times n} \\ &= [ca_{ij}]_{m\times n} + [cb_{ij}]_{m\times n} \\ &= c[a_{ij}]_{m\times n} + c[b_{ij}]_{m\times n} \\ &= cA+cB \end{aligned}$$

#

พิสูจน์ (2) เพราะว่า $(c+d)A = (c+d)[a_{ij}]_{m\times n}$

เนื่องจาก c และ d เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น c+ d เป็นจำนวนจริงด้วย แล้วใช้**นิยาม 1.2.6**

$$
\begin{aligned}
(c+d)A &= [(c+d)a_{ij}]_{m\times n} \\
&= [ca_{ij} + da_{ij}]_{m\times n} \\
&= [ca_{ij}]_{m\times n} + [da_{ij}]_{m\times n} \\
&= c[a_{ij}]_{m\times n} + d[a_{ij}]_{m\times n} \\
&= cA + dA
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1.9.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $5A = 2A+3A$

วิธีทำ เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
5A &= (2+3)A \\
&= (2+3)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2+3)2 & (2+3)3 \\ (2+3)4 & (2+3)5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\times 2 + 3\times 2 & 2\times 3 + 3\times 3 \\ 2\times 4 + 3\times 4 & 2\times 5 + 3\times 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\
&= 2A + 3A
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1.3.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $2(A+B) = 2A+2B$

วิธีทำ จากนิยามการบวกเมตริกซ์

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $2(A+B) = 2\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$

และ $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$2B = 2\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $2A+2B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $2(A+B) = 2A+2B$

ทฤษฎีบท 1.3.6 ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งสามารถคูณกันได้ c และ d เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

(1) $c(AB) = (cA)B$

(2) $c(dA) = (cd)A$

(3) $(Ac)B = A(cB)$

พิสูจน์ (1) ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$

จากนิยามการคูณเมตริกซ์ $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}$

ดังนั้น จากนิยาม 1.2.6 $c(AB) = \left[c \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}$

$= \left[\sum_{k=1}^{n} ca_{ik}b_{kj}\right]_{m\times p}$

$= \left[\sum_{k=1}^{n} (ca_{ik})b_{kj}\right]_{m\times p}$

$= (cA)B$ #

พิสูจน์ (2)

$$
\begin{aligned}
c(dA) &= c[da_{ij}]_{m\times n} \\
&= [cda_{ij}]_{m\times n} \\
&= [(cd)a_{ij}]_{m\times n} \\
&= (cd)[a_{ij}]_{m\times n} \\
&= (cd)A \qquad \#
\end{aligned}
$$

พิสูจน์ (3) เพราะว่า $cA = [ca_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}c]_{m\times n} = Ac$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(Ac)B &= \left([a_{ij}c]_{m\times n}\right)[b_{ij}]_{n\times p} \\
& \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c)b_{kj}\right]_{m\times p} \\
& \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}cb_{kj}\right]_{m\times p} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(cb_{kj})\right]_{m\times p} \\
&= [a_{ij}]_{m\times n}\left([cb_{ij}]_{n\times p}\right) \\
&= A\left(c[b_{ij}]_{n\times p}\right) \\
&= A(cB) \qquad \#
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1.3.6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $6A = 2(3A)$

วิธีทำ เพราะว่า $6 = 2\times 3$ เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
6A &= (2x3)\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2 \text{ x } 3)4 & (2 \text{ x } 3)5 \\ (2 \text{ x } 3)6 & (2 \text{ x } 3)7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(3 \text{ x } 4) & 2(3 \text{ x } 5) \\ 2(3 \text{ x } 6) & 2(3 \text{ x } 7) \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times 5 \\ 3\times 6 & 3\times 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{matrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{matrix} \; 3 \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \Big)$$

$$= \quad 3A)$$

ตัวอย่างที่ 1.3.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $$A(3B) = 3(AB)$$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2.6 $$3B = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

และนิยามผลคูณเมตริกซ์ $$A(3B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

และ $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $$3(AB) = 3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$A(3B) = 3(AB)$$

คุณสมบัติการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

ทฤษฎีบท 1.3.7 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ดังนั้น

$$(A^T)^T = A$$

พิสูจน์ ให้ $$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

และ $$B = A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$$

ในเมื่อ $b_{ij} = a_{ji}$ ตามนิยามการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

ดังนั้น ถ้าให้ $$C = (A^T)^T = B^T = [c_{ij}]_{m \times n}$$

ในเมื่อ $c_{ij} = b_{ji}$ ตามนิยามการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

เพราะว่า	b_{ij}	$=$	a_{ji}	
เพราะฉะนั้น	b_{ji}	$=$	a_{ij}	(สลับ i กับ j)
นั่นคือ	a_{ij}	$=$	c_{ij}	
หรือ	$[a_{ij}]_{m\times n}$	$=$	$[c_{ij}]_{m\times n}$	
	A	$=$	$(A^T)^T$	#

ทฤษฎีบท 1.3.8 ถ้าเมตริกซ์ A และ B สามารถบวกกันได้ ดังนั้น

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

พิสูจน์ ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีขนาดเท่ากัน ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

จากนิยามการบวกเมตริกซ์ $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

สมมติให้	C	$=$	$[c_{ij}]_{n\times m} = (A+B)^T$	
ในเมื่อ	c_{ij}	$=$	$a_{ji}+b_{ji}$ ตามนิยามการสลับเปลี่ยนเมตริกซ์	
และ	A^T	$=$	$[d_{ij}]_{n\times m}$	
ในเมื่อ	d_{ij}	$=$	a_{ji}	
และ	B^T	$=$	$[e_{ij}]_{n\times m}$	
ในเมื่อ	e_{ij}	$=$	b_{ji}	
ดังนั้น	A^T+B^T	$=$	$[d_{ij}+e_{ij}]_{n\times m}$	
		$=$	$[a_{ji}+b_{ji}]_{m\times n}$	
		$=$	$[c_{ij}]_{n\times m}$	
		$=$	$(A+B)^T$	#

ทฤษฎีบท 1.3.9 ถ้าเมตริกซ์ A และ B สามารถคูณกันได้ ดังนั้น

$$(AB)^T = B^TA^T$$

พิสูจน์ ข้อสังเกต ถ้าผลคูณเมตริกซ์ AB หาค่าได้ การสลับเปลี่ยนผลคูณเมตริกซ์ AB จะหาค่าได้ด้วย และจะพบว่า B^TA^T หาค่าได้ขณะที่ A^TB^T อาจจะหาค่าไม่ได้ ดังนั้น ถ้าให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{jk}]_{n\times p}$

และให้ $AB = C = [c_{ik}]_{m\times p}$

ในเมื่อ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

ดังนั้น $(AB)^T = C^T = [d_{ik}]_{p\times m}$

ในเมื่อ $d_{ik} = c_{ki}$

เพราะฉะนั้น $[c_{ki}]_{p\times m} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{kj}\right]_{p\times m}$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}\right]_{p\times m} \qquad (1.3.9)$$

จากนิยามการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

$B^T = E = [e_{jk}]_{p\times n}$

ในเมื่อ $e_{jk} = b_{kj}$

และ $A^T = F = [f_{ij}]_{n\times m}$

ในเมื่อ $f_{ij} = a_{ji}$

ดังนั้น $B^TA^T = [e_{jk}]_{p\times n}[f_{ij}]_{n\times m}$

$$= [b_{kj}]_{p\times n}[a_{ji}]_{n\times m}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}\right]_{p\times m} \qquad (1.3.10)$$

(1.3.9) = (1.3.10) ดังนั้น

$(AB)^T = B^TA^T$ #

ทฤษฎีบท 1.3.10 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $m\times n$ และ k เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$(kA)^T = kA^T$$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

เพราะฉะนั้น $kA = B = [b_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

ในเมื่อ $b_{ij} = ka_{ij}$

ถ้าให้ $c = (kA)^T = B^T = [c_{ij}]_{n\times m}$

ในเมื่อ $c_{ij} = b_{ji}$

เพราะว่า $A^T = D = [d_{ij}]_{n\times m}$

ในเมื่อ $d_{ij} = a_{ji}$