เพราะฉะนั้น $c_{ij} = b_{ji} = ka_{ji}$

แต่ $d_{ij} = a_{ji}$

ดังนั้น $c_{ij} = kd_{ij}$

$$[c_{ij}]_{n\times m} = [kd_{ij}]_{n\times m} = k[d_{ij}]_{n\times m}$$

$$C = kD$$

หรือ $(kA)^T = kA^T$ #

ตัวอย่างที่ 1.3.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ $(AB)^T$ และ B^TA^T

วิธีทำ จากนิยามการคูณเมตริกซ์

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(AB)^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

และ $B^TA^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะได้ $(AB)^T = B^TA^T$

ตัวอย่างที่ 1.3.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

(ก) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ข) $(2A)^T = 2A^T$

วิธีทำ (ก)

$$A+B = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

(ข)

$$2A = 2\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}$$

$$(2A)^T = \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$2A^T = 2\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$(2A)^T = 2A^T = \begin{bmatrix} & \\0 & 2\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.9 จงทำ $\{A^T(B+I_n)\}^T$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (กำหนดว่าทุกเมตริกซ์มีขนาด n x n) พร้อมทั้งให้เหตุผลทุกขั้นตอน

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\{A^T(B+I_n)\}^T &= (B+I_n)^T(A^T)^T && \text{(ทฤษฎีบท 1.3.9)}\\
&= (B+I_n)^T A && \text{(ทฤษฎีบท 1.3.7)}\\
&= (B^T+I_n^T)A && \text{(ทฤษฎีบท 1.3.8)}\\
&= (B^T+I_n)A && I_n^T = I''\\
&= B^TA + A && I_nA = A
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.3

จงพิสูจน์ว่าคุณสมบัติการแจกแจงทางซ้ายหรือทางขวาในแบบฝึกหัดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$

3. $\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

6. $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ เปรียบเทียบกับแบบฝึกหัดข้อ 1

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (ก) จงแสดงว่าคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกเมตริกซ์เป็นจริง

   (ข) จงแสดงว่าคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณเมตริกซ์เป็นจริง

   (ค) จงแสดงว่าคุณสมบัติการแจกแจงทางซ้ายสำหรับการคูณเมตริกซ์เทียบกับการบวกเมตริกซ์เป็นจริง

(ง) จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.3.6 ข้อ (1) เป็นจริง เมื่อ $c = 3$

(จ) จงแสดงว่า $AB \neq BA$

(ฉ) จงหาค่าของ $(A+B)^2$ และ $A^2+2AB+B^2$

(ช) จงหาค่าของ $(AC)^2$ และ A^2C^2 เปรียบเทียบดูความแตกต่างของคำตอบ

8. ข้อความต่อไปนี้บางข้อเป็นจริงและบางข้อเป็นเท็จ จงอธิบายเหตุผล (กำหนดว่าแต่ละเมตริกซ์สามารถคูณและบวกกันได้)

(ก) ถ้า $C^2 = 0$ ดังนั้น $C = 0$

(ข) $A^2+B^2 = B^2+A^2$

(ค) $(AB)C^2 = A(BC^2)$

(ง) ถ้า $BA+CA = 0$ ดังนั้น $B = -C$ หรือ $A = 0$

(จ) $BA+CA = A(B+C)$

(ฉ) $A + (B+C) = B + (C+A)$

9. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.3.2 เป็นจริง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

10. จงแสดงว่าโดยทั่ว ๆ ไป $A^2-B^2 \neq (A-B)(A+B)$ ในเมื่อ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีขนาดเท่ากัน

11. จงกระจาย $(A+B)^3$ ในเมื่อ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีขนาดเท่ากัน

12. จงกระจาย $\left((A+B) + C\right)^2$ โดยใช้คุณสมบัติการแจกแจงซ้ำ (กำหนดว่าเมตริกซ์สามารถคูณและบวกกันได้) ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเท่าที่จะทำได้

13. เราเคยพบว่าบ่อยครั้งที่ $AB \neq BA$ แต่ในกรณีที่ $AB = BA$ เรากล่าวว่า A และ B สลับที่กันได้

(ก) จงแสดงว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & \text{[illegible]} \\ 0 & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ สลับที่กันได้

(ข) ทุก ๆ เมตริกซ์จัตุรัสสลับที่กับตัวมันเองได้หรือไม่

14. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $A(BC) = (AB)C$ แม้แต่ในกรณีไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส

15. จงแสดงว่าในเมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A(BC) = (AB)C$ เป็นจริง

16. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า สมการต่อไปนี้เป็นจริง

(ก) $(A^T)^T = A$

(ข) $(AB)^T = B^TA^T$

(ค) $(A+B)^T = A^T+B^T$

17. ใช้ทฤษฎีบท 1.3.9 จงแสดงว่า $(ABC)^T = C^TB^TA^T$

18. จงทำ $(A^TB^T+3C)^T$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย พร้อมทั้งให้เหตุผลทุกขั้นตอน

19. จงทำ $(A^T+2B^T+C)^T$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย พร้อมทั้งให้เหตุผลทุกขั้นตอน

20. จงยกตัวอย่างซึ่งแสดงว่าเมื่อ $AB = 0$ ไม่จำเป็นว่า $A = 0$ หรือ $B = 0$

1.4 ลักษณะพิเศษของเมตริกซ์ (The special type of matrix)

นิยาม 1.4.1 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ $A^T = A$ เราเรียก A ว่า **"เมตริกซ์สมมาตร** (symmetric matrix)"

ตัวอย่างที่ 1.4.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **จงแสดงว่าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร**

วิธีทำ เราจะกล่าวว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร เมื่อ $A^T = A$

เพราะว่า $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ดังนั้น A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

นิยาม 1.4.2 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและ A^T = -A เราเรียก A ว่า "เมตริกซ์เสมือนสมมาตร (skew-symmetric matrix)"

ตัวอย่างที่ 1.4.2 $$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร เพราะว่า

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

ตัวอย่างที่ 1.4.3 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $A+A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร และ $A-A^T$ เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

พิสูจน์ ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ดังนั้น A และ A^T สามารถบวกกันได้ ถ้าให้

$$A+A^T = B$$

สลับเปลี่ยนเมตริกซ์ทั้งสองข้าง

$$B^T = (A+A^T)^T$$

ใช้ทฤษฎีบท1.3.8 จะได้

$$B^T = A^T+(A^T)^T$$

ใช้ทฤษฎีบท 1.3.7 และทฤษฎีบท 1.3.1 ข้อ (1)

$$B^T = A^T+A = A+A^T = B$$

ดังนั้น $A + A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าให้

$$\begin{aligned} C &= A-A^T \\ C^T &= (A-A^T)^T \\ &= A^T-(A^T)^T \\ &= A^T-A \\ &= -(A-A^T) \\ &= -C \end{aligned}$$

ดังนั้น $A-A^T$ เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

จากตัวอย่างนี้ทำให้เกิดทฤษฎีที่น่าสนใจ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.4.1 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ เราสามารถเขียน A ในรูปผลบวกของเมตริกซ์สมมาตร และเมตริกซ์เสมือนสมมาตรได้ นั่นคือ

$$A = S+K$$

ในเมื่อ S คือเมตริกซ์สมมาตร

และ K คือเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^T \\ &= \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T) \\ &= S+K \end{aligned}$$

ในเมื่อ

$$S = \frac{1}{2}(A+A^T)$$

และ

$$K = \frac{1}{2}(A-A^T)$$

จากตัวอย่างที่ 1.4.3 เราทราบว่า $A+A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น $\frac{1}{2}(A+A^T)$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรด้วย และ $\frac{1}{2}(A-A^T)$ เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร #

ทฤษฎีบท 1.4.2 ผลคูณของเมตริกซ์และเมตริกซ์สลับเปลี่ยนของมัน คือเมตริกซ์สมมาตร

พิสูจน์ ให้

$$C = AA^T$$

$$C^T = (AA^T)^T$$

ใช้ทฤษฎีบท1.3.8และทฤษฎีบท1.3.7

$$C^T = (A^T)^T \; A^T = AA^T = C$$

ดังนั้น C เป็นเมตริกซ์สมมาตร นั่นคือ AA^T เป็นเมตริกซ์สมมาตร #

นิยาม 1.4.3 เมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง เรียกว่า "เมตริกซ์จริง (real matrix)"

จากความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน (complex number) ทราบว่า จำนวนเชิงซ้อนมักเขียนในรูป $x+iy$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง และเรียก $x-iy$ ว่าสังยุค (conjugate) ของ $x+iy$ และ $x+iy$ เป็นสังยุคของ $x-iy$ นั่นคือ $x-iy$ และ $x+iy$ ต่างเป็นสังยุคซึ่งกันและกัน จากหัวข้อ 1.1 ได้เคยกล่าวไว้แล้วว่าเมตริกซ์อาจมีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ ดังนั้น ถ้าสมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์ A แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของมัน เมตริกซ์ผลลัพธ์นี้เรียกว่าสังยุคของ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{A}$

นิยาม 1.4.4 ถ้า $A = [a_{ij}]$ สังยุคของ A คือ $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ ในเมื่อ $\bar{a}_{ij}$ คือสังยุคของ a_{ij}

ตัวอย่างที่ 1.4.4 จงหาสังยุคของ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i \\ 3-i & 4+2i \end{bmatrix}$

วิธีทำ เปลี่ยนเครื่องหมายหน้า i เป็นตรงกันข้ามทุกตัว จะได้สังยุคของ A คือ

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3+i & 4-2i \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.4.5 จงหาสังยุคของ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นเมตริกซ์จริง (สมาชิกทุกตัวใน A เป็นจำนวนจริง) ดังนั้น

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} = A$$

จากตัวอย่างนี้ทำให้เกิดทฤษฎีบทที่น่าสนใจ

ทฤษฎีบท 1.4.3 A เป็นเมตริกซ์จริงก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$

พิสูจน์ ให้สมาชิกรูปทั่วไปของ A คือ $a_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}$ เมื่อ α_{jk} และ β_{jk} เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$\bar{a}_{jk} = \alpha_{jk} - i\beta_{jk}$$

คือสมาชิกที่สมนัยของ $\bar{A}$

ถ้า $A = \bar{A}$ จะได้ $\beta_{jk} = 0$

นั่นคือ $\bar{a}_{jk} = \alpha_{jk} = a_{jk}$

ดังนั้น แต่ละตัว a_{jk} เป็นจำนวนจริง กล่าวได้ว่า A เป็นเมตริกซ์จริง

ถ้า A เป็นเมตริกซ์จริง จะได้ว่า

$$\beta_{jk} = 0$$

นั่นคือ $a_{jk} = \bar{a}_{jk}$

ดังนั้น $A = \bar{A}$ #

ถ้าเราสลับเปลี่ยนสังยุคของ A จะได้เมตริกซ์ใหม่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(\bar{A})^T = A^*$ และเรียกเมตริกซ์นี้ว่า "เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยน (transposed conjugate matrix)

ตัวอย่างที่ 1.4.6 ใช้โจทย์ตัวอย่างที่ 1.4.4 จงหา A^*

วิธีทำ เพราะว่า $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3+i & 4-2i \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(\bar{A})^T = A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3+i \\ 2+3i & 4-2i \end{bmatrix}$

นิยาม 1.4.5 ถ้า $A = A^*$ **ดังนั้น** เราเรียก A ว่า “**เมตริกซ์เฮอมิแทน** (Hermitian matrix)”

ตัวอย่างที่ 1.4.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า A เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน

วิธีทำ เพราะว่า $\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & \sqrt{2} \end{bmatrix} = A$$

เพราะฉะนั้น A เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน

ข้อสังเกต เกี่ยวกับเมตริกซ์เฮอมิแทน คือ

1. ต้องเป็นเมตริกซ์จัตุรัส
2. แนวทแยงหลัก (main diagonal) ต้องเป็นจำนวนจริง
3. เมตริกซ์สมมาตรซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนจริงเป็นเมตริกซ์เฮอมิแทนด้วย

นิยาม 1.4.6 ถ้า $A = -A^*$ **ดังนั้น** เราเรียก A ว่า “**เมตริกซ์เสมือนเฮอมิแทน** (skew-Hermitian matrix)”

นิยาม 1.4.7 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและสอดคล้องตามสมการ $A = A^2$ ดังนั้น เราเรียก A ว่า “idempotent matrix”

ตัวอย่างที่ 1.4.8 **จงแสดงว่า** A **เป็น** idempotent matrix **เมื่อ** $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เพราะว่า $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = A$$

ดังนั้น A เป็น idempotent matrix

ข้อสังเกต เมตริกซ์ศูนย์และเมตริกซ์เอกลักษณ์เป็น idempotent matrix

ทฤษฎีบท 1.4.4 ถ้า A เป็น idempotent matrix **ดังนั้น** $A^{n} = A$ **สำหรับทุกค่าจำนวนเต็มบวก** n

นิยาม 1.4.8 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและสอดคล้องตามสมการ

$$A^{r} = 0$$

สำหรับบางค่าของจำนวนเต็มบวก r เราเรียก A ว่า "nilpotent matrix" ค่า r ที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้ $A^{r} = 0$ เรียกว่า **ดรรชนีของ A**

ตัวอย่างที่ 1.4.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า A เป็น nilpotent matrix พร้อมทั้งหาดรรชนีของ A ด้วย

วิธีทำ เพราะว่า

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ดังนั้น A เป็น nilpotent matrix ดรรชนี 2

นิยาม 1.4.9 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$ เราเรียก A ว่า "เมตริกซ์เฉียง (diagonal matrix)"

หรืออาจกล่าวได้ว่า ถ้าสมาชิกทุกจำนวนในเมตริกซ์จัตุรัสยกเว้นสมาชิกตามแนวทแยงหลักมีค่าเป็นศูนย์ เราเรียกเมตริกซ์ลักษณะนี้ว่า "เมตริกซ์เฉียง"

ตัวอย่างที่ 1.4.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A และ B เป็นตัวอย่างของเมตริกซ์เฉียง

รูปทั่ว ๆ ไปของเมตริกซ์เฉียงขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต สมาชิกตามแนวทแยงหลักอาจมีค่าเป็นศูนย์หรือไม่เป็นศูนย์ก็ได้

นิยาม 1.4.10 ถ้าสมาชิกทุกตัวตามแนวทแยงหลักของเมตริกซ์เฉียงเป็นสเกลาร์เท่ากัน ดังนั้น เราเรียกเมตริกซ์นี้ว่า "เมตริกซ์สเกลาร์ (scalar matrix)"

รูปทั่วไปของเมตริกซ์สเกลาร์ขนาด $n \times n$ คือ

$$S = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.4.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

A และ B เป็นตัวอย่างของเมตริกซ์สเกลาร์

นิยาม 1.4.11 เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity or unit matrix) คือเมตริกซ์สเกลาร์เมื่อ $c = 1$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_n หรือ I

รูปทั่ว ๆ ไปของเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ คือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.4.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จากนิยาม 1.4.11 จะได้ว่า

A เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ แต่

B ไม่เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ เพราะว่าสมาชิกที่ตำแหน่ง b_{11} ไม่เท่ากับ 1 (เป็นศูนย์)

ข้อสังเกต ถ้าเมตริกซ์เอกลักษณ์คูณกับเมตริกซ์ใด ๆ ได้ ดังนั้น ค่าของเมตริกซ์นั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงไป นั่นคือ

$$AI_n = A$$

หรือ $$I_nA = A$$

ตัวอย่างที่ 1.4.13 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = A$$

และ

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = A$$

นิยาม 1.4.12 ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและสอดคล้องตามสมการ

$$A^2 = I$$

ดังนั้น เราเรียก A ว่า "involutoric matrix"

ตัวอย่าง 1.4.14 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ดังนั้น A เป็น involutoric matrix

นิยาม 1.4.13 ถ้าเมตริกซ์ A ใด ๆ สอดคล้องตามสมการ

$$AA^T = I$$

ดังนั้น เราเรียก A ว่า "เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix)"

ตัวอย่างที่ 1.4.16 **ให้**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

วิธีทำ จากนิยามการสลับเปลี่ยนเมตริกซ์

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์เชิงตั้งฉาก

นิยาม 1.4.14 เมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ เรียกว่า "เมตริกซ์สามเหลี่ยม (triangular matrix)" เมื่อสมาชิกทุกตัวที่อยู่ข้างบนหรือใต้แนวทแยงหลักมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ ถ้าให้

$$A = [a_{ij}]$$

ในเมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับทุกค่าของ $i > j$ (หรือ $j > i$) ดังนั้น จะเรียก A ว่าเมตริกซ์สามเหลี่ยม

ตัวอย่างที่ 1.4.16

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นตัวอย่างของเมตริกซ์สามเหลี่ยม

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้ เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์สมมาตร ถ้ามีเมตริกซ์ใดไม่เป็นเมตริกซ์สมมาตร จงอธิบายว่าทำไมถึงไม่เป็น

$$(ก)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix},\quad (ข)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad (ค)\ \begin{bmatrix} 221 & -1\ 22\ 1 & -2\text{-}12 \\ 221 & -1\ 22\ 1 & -2\text{-}12 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดให้เมตริกซ์ A ขนาด 3×3 มี $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$ และ $a_{13} = a_{31}$ ถามว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรหรือไม่ และทำไม
3. จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด 2×2 ดังนั้น ผลบวกของเมตริกซ์ทั้งสอง $A+B$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรด้วย
4. ผลคูณของเมตริกซ์ AB ในข้อ 3 เป็นเมตริกซ์สมมาตรหรือไม่
5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น A^2 เป็นเมตริกซ์สมมาตร
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์สมมาตร และถ้า $AB = BA$ ดังนั้น AB เป็นเมตริกซ์สมมาตร
7. จงหาว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้ เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร สำหรับเมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งไม่เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร จงอธิบายว่าทำไมจึงไม่เป็น

$$(ก)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ข)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(ค)\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (ง)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. จงพิสูจน์ว่า สมาชิกแต่ละตัวตามแนวทแยงหลักของเมตริกซ์เสมือนสมมาตร จะมีค่าเป็นศูนย์
9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร ดังนั้น $AA^T = A^TA$
10. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร ดังนั้น A^2 เป็นเมตริกซ์สมมาตร

11. จงแสดงเมตริกซ์ต่อไปนี้ในรูปผลบวกของเมตริกซ์สมมาตรและเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

(ก) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

12. จงหาสมาชิกตามแนวทแยงหลักของ AA^T เมื่อ A เป็นเมตริกซ์จริงเสมือนสมมาตร

13. จงหาเมตริกซ์สังยุคและเมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{bmatrix} i & 2-i & 2 \\ 0 & 3i & 4 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 2 & 2\text{[illegible]}i \\ i & 2\text{[illegible]} \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} 0 & 3+i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{bmatrix}$

(จ) $\begin{bmatrix} 0 & i & 2i \\ i & 0 & -4 \\ 2i & 4 & 0 \end{bmatrix}$

สังเกตว่า $\bar{A}$ และ A^* ยังคงมีความหมาย ถึงแม้ว่า A ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัส

14. เมตริกซ์ใดในข้อ 13 (ถ้ามี) เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน และเมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์เสมือนเฮอมิแทน

15. จงพิสูจน์ว่า $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$

ในเมื่อ A คือเมตริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน

16. จงพิสูจน์ว่า $A = \bar{\bar{A}}$

ในเมื่อ $\bar{\bar{A}} = \overline{(\bar{A})}$

17. ให้ x และ y เป็นจำนวนเชิงซ้อน

(ก) จงพิสูจน์ว่า $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

(ข) จงพิสูจน์ว่า $\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y}$

18. กำหนดว่าเมตริกซ์สามารถคูณและบวกกันได้ จงพิสูจน์ว่า

(ก) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

(ข) $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$

(ค) $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$ ในเมื่อ c เป็นสเกลาร์

19. ทฤษฎีบทต่อไปนี้ คล้ายคลึงกับทฤษฎีบทในหัวข้อ 1.4

1. $(A^*)^* = A$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(AB)^* = B^*A^*$
4. $(cA)^* = \bar{c}A^*$
5. $AA^* = A^*A$ เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน

จงแสดงว่า ทฤษฎีบทเหล่านี้เป็นจริง เมื่อเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

และสเกลาร์ $c = 1+i$

20. จงพิสูจน์ว่าถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน ซึ่งมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น $A+B$ เป็นเมตริกซ์เฮอมิแทน

1.5 เมตริกซ์ย่อยและการแบ่งเมตริกซ์ (Submatrices and partitioned matrix)

นิยาม 1.5.1 เมตริกซ์ย่อยของ A คือ การจัดเรียงสี่เหลี่ยมมุมฉากของสมาชิกที่เหลือ เมื่อขีดฆ่าแถวหรือสดมภ์แน่นอนของ A ออก

ตัวอย่างที่ 1.5.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

จงหาเมตริกซ์ย่อยของ A มาหลาย ๆ เมตริกซ์ย่อย

วิธีทำ เนื่องจากการขีดฆ่าแถวหรือสดมภ์ หรือทั้งแถวและสดมภ์ของ A สามารถขีดฆ่าได้หลายแบบ ดังนั้น เมตริกซ์ย่อยของ A จึงมีหลายเมตริกซ์ด้วย ตัวอย่างเช่น

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 และ A_4 เป็นเมตริกซ์ย่อยของ A

ในการแบ่งเมตริกซ์ออกเป็นเมตริกซ์ย่อย จะใช้เส้นประแบ่งตามแนวนอนและแนวดิ่ง จากตัวอย่างที่ 1.5.1 เราสามารถเขียน

$$A = [A_{11} \mid A_{12} \mid A_{13}] = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

กล่าวได้ว่า A ถูกแบ่งออกเป็นเมตริกซ์ย่อย จึงเรียก A ว่าเมตริกซ์ถูกแบ่ง และเรียก A_{11}, A_{12} และ A_{13} ว่า เมตริกซ์ย่อยของ A

และเราสามารถแบ่งเมตริกซ์ D เป็น

$$D = \left[\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ในเมื่อ

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

และเรียก D_{11}, D_{12}, D_{21} และ D_{22} ว่า เมตริกซ์ย่อยของ D และเรียก D ว่า การแบ่งเมตริกซ์

ข้อสังเกต การแบ่งเมตริกซ์ออกเป็นเมตริกซ์ย่อยในบางลักษณะ เส้นแบ่ง (เส้นประ) มิได้อยู่ในแนวนอนหรือแนวตั้งโดยตลอด เมตริกซ์ในลักษณะนี้เราไม่เรียกว่าการแบ่งเมตริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.5.2 ให้

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline [4] & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

เนื่องจากเส้นแบ่งในแนวนอนไม่ได้อยู่ในแนวเดียวกันโดยตลอด ดังนั้น A ไม่เป็นการแบ่งเมตริกซ์

หลังจากแบ่งเมตริกซ์ D ออกเป็นเมตริกซ์ย่อยจะได้

$$D = \left[\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

ดังนั้น ถ้าคูณข้างหลัง D ด้วย $E = \left[\begin{array}{c|c} E_{11} & E_{12} \\ \hline E_{21} & E_{22} \end{array}\right]$ จะได้ผลคูณ DE ในลักษณะดังนี้

$$DE = \left[\begin{array}{c|c} D_{11}E_{11} + D_{12}E_{21} & D_{11}E_{12} + D_{12}E_{22} \\ \hline D_{21}E_{11} + D_{22}E_{21} & D_{21}E_{12} + D_{22}E_{22} \end{array}\right]$$

สามารถแสดงว่าถูกต้อง กำหนดว่าเมตริกซ์ย่อยเหล่านี้มีขนาดพอเหมาะกัน นั่นคือ เมตริกซ์ย่อยเหล่านี้สามารถคูณกันได้ เนื่องจาก D_{11} เป็นเมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ดังนั้น E จะถูกแบ่ง เพื่อว่า E_{11} เป็นเมตริกซ์ย่อยขนาด $2\times p$ (D_{11} และ E_{11} สามารถคูณกันได้) สำหรับผลคูณของเมตริกซ์ย่อยคู่อื่น ๆ ก็พิจารณาในลักษณะเดียวกันนี้

ข้อสังเกต E_{11} ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากับ D_{11}

ตัวอย่างที่ 1.5.8 ให้

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาผลคูณ DE

วิธีทำ การหาผลคูณ DE โดยการแบ่งเมตริกซ์ D และ E ออกเป็นเมตริกซ์ย่อย นั่นคือ

$$\text{ให้} \quad D = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{และ} \quad E = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$$

ดังนั้น

$$DE = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1] & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[2] \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + [1]\,[1] & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1]\,[2] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline [7] + [1] & [3] + [2] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ 3 & 2 \\ \hline 8 & 5 \end{array}\right]$$

การแบ่งเมตริกซ์สามารถใช้ประโยชน์ได้ในกรณีที่เมตริกซ์มีขนาดใหญ่มาก ตัวอย่างเช่นผลคูณของสองเมตริกซ์ขนาด 100×100 สามารถหาค่าได้โดยพิจารณา 8 ผลคูณของเมตริกซ์ย่อยขนาด 50×50 ซึ่งเครื่องคอมพิวเตอร์สามารถหาค่าได้ นอกจากนี้การแบ่งเมตริกซ์ยังใช้ประโยชน์ในการหาเมตริกซ์ผกผัน นั่นคือกำหนดเมตริกซ์ A มาให้ จงหาเมตริกซ์ B ซึ่งสอดคล้องตามสมการ $AB = BA = I_n$ และตัวผกผันนี้จะเขียนแทนด้วย A^{-1} ซึ่งจะกล่าวต่อไปในบทที่ 3

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาผลคูณ AB (ถ้าเป็นไปได้) โดยใช้การแบ่งเมตริกซ์ที่กำหนดให้ แต่ถ้าเป็นไปไม่ได้ จงอธิบายว่าทำไมจึงเป็นไปไม่ได้

(ก) $A = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ \hdashline 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{array}\right]$

(ข) $A = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ \hdashline 4 & 0 & 2 \end{array}\right]$

(ค) $A = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 4 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c:c} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ \hdashline 4 & 0 \end{array}\right]$

2. จงเขียนเมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

3. จงเขียนเมตริกซ์ย่อยทั้งหมดของเมตริกซ์ในข้อ 2

4. จงเขียน 9 เมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

5. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ และ f เป็นสเกลาร์

(ก) จงสร้างเมตริกซ์ $\left[\begin{array}{c:c} A & R \end{array}\right]$

(ข) จงสร้างเมตริกซ์ $\left[\begin{array}{c:c} A & R \\ \hdashline C & f \end{array}\right]$

6. จงแบ่งเมตริกซ์ A โดยสมควร และจงหาผลคูณ AB โดยใช้วิธีในหัวข้อ 1.5

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. ใช้แบบการแบ่งเมตริกซ์ จงหาผลคูณ AB ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & I_1 & B_3 \end{bmatrix}$$

ในเมื่อ

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = [3], \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = [7], \quad I_1 = [1]$$

และเมตริกซ์ 0 มีขนาดเหมาะสม

1.6 เมตริกซ์สามเหลี่ยมและเมตริกซ์เป็นขั้น (Triangular and echelon matrices)

นิยาม 1.6.1 เมตริกซ์จัตุรัสเรียกว่า "เมตริกซ์สามเหลี่ยม" (triangular matrix)" ถ้าสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือหรือใต้แนวทแยงหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม

ดังที่กล่าวไว้ในตอนต้นว่า เมตริกซ์สามารถนำไปใช้หาคำตอบของระบบสมการได้ เมตริกซ์เป็นขั้นซึ่งจะนิยามต่อไปจะให้กฎในการใช้เมตริกซ์เพื่อหาคำตอบของระบบสมการในบทที่ 5

ตัวอย่างเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

มีคุณสมบัติร่วมกัน 2 ข้อ คือ

1. แต่ละแถวของ 3 แถวแรก ประกอบด้วยสมาชิกบางตัวที่ไม่เป็นศูนย์ และแถวที่เหลือ (ถ้ามี) ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ทั้งหมด

2. สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ใน 3 แถวแรก คือ 1 และ 1 ของแถวถัดไป จะปรากฏในสดมภ์ทางขวาของสดมภ์ของ 1 ของแถวที่เพิ่งผ่านมา

เมตริกซ์ใดใช้คุณสมบัติที่สำคัญ 2 ข้อนี้ เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น จะเรียกเมตริกซ์นี้ว่า "เมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix)"

นิยาม 1.6.2 เมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix) คือ เมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีคุณสมบัติ ดังนี้

(1) แต่ละแถวของ k แถวแรกมีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ และสมาชิกทุกตัวในแถวที่เหลือ (ถ้ามี) $m-k$ แถว มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ($1 \leqslant k \leqslant m$)

(2) สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละแถวของ k แถวแรกคือ 1

(3) ในแถวใด ๆ ของ k แถวแรก จำนวนศูนย์ก่อน สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ จะน้อยกว่าจำนวนศูนย์ในแถวถัดไป

ตัวอย่างที่ 1.6.1

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น (echelon matrix)

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น เพราะว่าแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมดไม่ได้อยู่แถวล่างสุด

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น เพราะว่าสมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ ในแถวที่สองคือ 3 (ไม่ใช่ 1)

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น เพราะว่าจำนวนศูนย์ก่อนสมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแถวที่สองเท่ากับจำนวนศูนย์ในแถวที่สาม

แต่ถ้าเมตริกซ์เป็นขั้นเพิ่มคุณสมบัติว่า สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละ k แถวแรก เป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ไม่เป็นศูนย์ในสดมภ์ของมัน (นั่นคือสมาชิกตัวอื่น ๆ ในสดมภ์นี้เป็นศูนย์ทั้งหมด)

ตัวอย่างที่ 1.6:2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ทั้ง A และ B ต่างก็เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น และ A เป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น (reduced echelon matrix) ด้วย เพราะว่าสดมภ์ที่ 2 และสดมภ์ที่ 4 ของ A คือ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ตามลำดับ ส่วน B ไม่เป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น เพราะว่าสดมภ์ที่ 2 และสดมภ์ที่ 3 คือ

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ไม่อยู่ในรูป} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 1.6

1. เมตริกซ์ต่อไปนี้ เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์เป็นขั้น และเมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น

(ก) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(จ) I_4 (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ช) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ซ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(ฌ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ญ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. ทุก ๆ เมตริกซ์เป็นขั้น เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมใช่หรือไม่ จงอธิบาย
3. การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์สามเหลี่ยมเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมด้วยใช่หรือไม่ อธิบาย
4. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จให้ยกตัวอย่าง
   (ก) การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์เฉียงยังเป็นเมตริกซ์เฉียง
   (ข) ทุก ๆ เมตริกซ์เฉียงเป็นเมตริกซ์สเกลาร์ด้วย
   (ค) ทุก ๆ เมตริกซ์สเกลาร์เป็นเมตริกซ์จัตุรัส
   (ง) ทุก ๆ เมตริกซ์สเกลาร์เป็นเฮอมิแทน

(จ) ทุก ๆ เมตริกซ์เฉียงเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม

(ฉ) ทุก ๆ เมตริกซ์สเกลาร์เป็นเมตริกซ์เป็นขั้น

(ช) ผลคูณของสองเมตริกซ์เฉียงซึ่งมีขนาดเท่ากันเป็นเมตริกซ์เฉียง

5. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาเมตริกซ์สเกลาร์ A ขนาด 3×3 ซึ่งสอดคล้องตามสมการเมตริกซ์ที่กำหนดให้

(ก) $A^2+3A+2I_3 = 0$

(ข) $A^2-4I_3 = 0$

(ค) $A^3+A^2+2A+2I_3 = 0$

(ง) $(A+2I_3)^2 = 0$

คำศัพท์ใหม่

row	แถว, แนวนอน	1.1
column	สดมภ์, แนวตั้ง	1.1
row subscript	ดรรชนีล่างแนวนอน	1.1
column subscript	ดรรชนีล่างแนวตั้ง	1.1
row matrix	เมตริกซ์แถว	1.1
column matrix	เมตริกซ์สดมภ์	1.1
square matrix	เมตริกซ์จัตุรัส	1.1
real matrix	เมตริกซ์จริง	1.1
complex matrix	เมตริกซ์เชิงซ้อน	1.1
equality of matrices	การเท่ากันของเมตริกซ์	1.1
zero matrix null matrix	เมตริกซ์ศูนย์	1.2
identity matrix	เมตริกซ์เอกลักษณ์	1.2
inverse matrix	เมตริกซ์ผกผัน	1.2
scalar	สเกลาร์	1.2
commutative law	กฎการสลับที่	1.2
transpose	สลับเปลี่ยน	
trace of a matrix spur of a matrix	ผลบวกเฉียงของเมตริกซ์	1.2
operation	การดำเนินการ	1.3
associative law	กฎการเปลี่ยนกลุ่ม	1.3
left-distributive property	คุณสมบัติการแจกแจงทางซ้าย	1.3
right-distributive property	คุณสมบัติการแจกแจงทางขวา	1.3
Symmetric matrix	เมตริกซ์สมมาตร	1.4
skew-symmetric matrix	เมตริกซ์เสมือนสมมาตร	1.4
transposed conjugate matrix	เมตริกซ์สังยุคสลับเปลี่ยน	1.4
Hermitian matrix	เมตริกซ์เฮอมิแทน	1.4

main diagonal	แนวทแยงหลัก	1.4
skew-Hermitian matrix	เมตริกซ์เสมือนสมมาตร	1.4
diagonal matrix	เมตริกซ์เฉียง	1.4
scalar matrix	เมตริกซ์สเกลาร์	1.4
unit matrix	เมตริกซ์เอกลักษณ์	1.4
orthogonal matrix	เมตริกซ์เชิงตั้งฉาก	1.4
triangular matrix	เมตริกซ์สามเหลี่ยม	1.4
submatrices	เมตริกซ์ย่อย	1.5
echelon matrix	เมตริกซ์เป็นขั้น	1.6
reduced echelon matrix	เมตริกซ์ลดรูปเป็นขั้น	1.6