# บทที่ 1

# บทนำ
## PRELIMINARIES

### 1.1 สัญลักษณ์สำหรับการบวกและการคูณ

สัญลักษณ์ของการบวกใช้ดังนี้คือ

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \ldots.. + a_n \text{ สำหรับ } k \leqslant n$$

เราเรียก n ว่าลิมิตบน (upper limit) เรียก k ว่าลิมิตล่าง (lower limit) ของการบวก และเรียก i ว่าอินเดกซ์ (index) ของการบวก

**ตัวอย่าง** 1.1 $\sum_{i=0}^{5} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{a=1}^{3} a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

โดยทั่วไปแล้วนิยมใช้ลิมิตล่างเป็น 1 และลิมิตบนเป็น n เราลองมาพิจารณาผลบวกต่อไปนี้

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

2) ถ้า $b_i = k$ (ค่าคงที่) สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} k a_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

นั่นคือเราสามารถนำค่าคงที่ออกมาคูณข้างหน้าของการบวกทั้งหมดได้

3) ถ้า $a_i = 1$ และ $b_i = k$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} k = nk$$

ดังนั้นการบวกค่าคงที่จะมีค่าเท่ากับค่าคงที่คูณกับจำนวนของอินเดกซ์

**ตัวอย่าง** 1.2 $\sum_{i=3}^{10} 5 = 8 \cdot 5 = 40$

$$\sum_{j=0}^{5} 3a = 6 \cdot 3a = 18a$$

ในบางครั้งเราต้องใช้การบวกของผลคูณของสองจำนวน

4) $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$

สูตรสำหรับการบวกอีกสูตรหนึ่งคือ

5) $$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+ \dots +(a_n+b_n)$$
$$= (a_1+a_2+ \dots +a_n) + (b_1+b_2+ \dots +b_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

สัญลักษณ์ของการคูณใช้ดังนี้คือ

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = (a_k)(a_{k+1}) \dots (a_n) \text{ สำหรับ } k < n$$

**ตัวอย่าง 1.3** $$\prod_{i=1}^{5} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$$
$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = n!$$

การคูณนี้ก็มีลิมิตบนและลิมิตล่างเช่นเดียวกับการบวกที่กล่าวแล้วข้างต้น คือเรานิยมใช้ 1 เป็นลิมิตล่าง และ n เป็นลิมิตบน และสรุปเป็นสูตรซึ่งคล้ายคลึงกับการบวกได้ดังนี้

1) $$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1b_1)(a_2b_2) \dots (a_nb_n)$$
$$= (a_1a_2 \dots a_n)(b_1b_2 \dots b_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

2) ถ้า $b_i = k, \ i = 1, 2, \dots, n$
$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

3) ถ้า $a_i = 1$ และ $b_i = k$ แล้ว
$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} k = k^n$$

ถ้า $a_i = b_i$ เราจะได้ว่า
$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i^2 = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

4) $$\prod_{i=1}^{n} a_i^k = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^k$$

# แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$\sum_{i=1}^{4} 2^i$ ; $\sum_{k=5}^{10} 5$, $\sum_{i=3}^{3} \frac{3}{i}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ของการบวก

1) $3+6+9+12+15+18$

2) $1+4+9+16+25+36$

3) $n+(n+2)+(n+4)+ \ldots +(n+2k)$

3. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$\prod_{i=1}^{3} i^2$ ; $\prod_{i=1}^{3} (3i-2)$ ; $\prod_{n=0}^{10} \frac{n}{n+1}$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ของการคูณ

1) $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18$

2) $3(3+1)(3+2) \ldots (3+n)$

3) $2^n \cdot n!$

5. จงหาค่าของ $\prod_{i=1}^{n} a^i$

## 1.2 แบบของการพิสูจน์ (Methods of Proof)

ในคณิตศาสตร์สิ่งที่สำคัญอันหนึ่งก็คือประพจน์ (คือข้อความซึ่งยอมรับหรือพิสูจน์ว่าจริงหรือเท็จ) ประพจน์ต่าง ๆ เหล่านี้แบ่งออกเป็นสัจพจน์ ทฤษฎีบทประกอบ (lemma) ทฤษฎีบทหรือประพจน์ที่จะต้องพิสูจน์

สำหรับสัจพจน์เป็นข้อความที่ยอมรับว่าเป็นจริง ซึ่งมักจะมองเห็นชัดเจนจากตัวของมันเอง ในทุก ๆ สาขาของคณิตศาสตร์จะเริ่มด้วยอนิยาม (undefined term) และสัจพจน์ส่วนประพจน์อื่น ๆ ทั้งหมดนอกนั้นจะต้องพิสูจน์ให้เห็นจริง

ทฤษฎีบทประกอบเป็นข้อความซึ่งใช้สำหรับพิสูจน์ข้อความอื่น (ทฤษฎีบท) แต่โดยตัวของมันเองก็มีสิ่งที่น่าสนใจบ้างเล็กน้อย และทฤษฎีบทเป็นปัญหาหลัก ในความจริงแล้วทฤษฎีบทประกอบอาจเป็นทฤษฎีบทได้ในกรณีที่ทฤษฎีบทประกอบนี้ได้นำมาใช้อย่างกว้างขวาง

งานหนักอันหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ก็คือการพิสูจน์หรือการหาข้อหักล้างคอนเจคเตอร์ (conjectures) ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้โดยหาหลักฐานมาสนับสนุนหรืออ้างอิงแล้วจึงสรุปได้และหลักฐานต่าง ๆ เหล่านี้ก็อาจจะได้มาจากนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์ไว้แล้ว หมายความว่าถ้าเรามี $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ เป็นหลักฐาน และ Q เป็นข้อสรุป แล้วเราจะเขียนข้อความนี้รวมกันได้เป็น

$$(P_1, \text{ และ } P_2 \text{ และ} \ldots\ldots\text{และ } P_n) \Rightarrow Q$$

จะเป็นจริงเสมอ

**กฎเบื้องต้นของข้อวินิจฉัยประพจน์ต่าง ๆ**

1. การให้เหตุผลแบบเรียงลำดับขั้น
   ถ้ามีข้อความ P แล้วสรุปว่า Q
   เริ่ม P แล้วหาเหตุผลจนสรุปได้ Q
2. กฎลูกโซ่
   ถ้ามี P แล้ว Q ถ้ามี Q แล้ว R
   สรุปว่าถ้า P แล้ว R
3. การให้เหตุผลแบบข้อความขัดแย้งสลับที่ (contraposition)
   ถ้ามีข้อความ P แล้วต้องการสรุปว่า Q
   เริ่มโดยสมมุติ Q ไม่จริง แล้วหาหลักฐานมาอ้างอิงจนสรุปได้ว่า P ไม่จริง
   จึงสรุปได้ว่าถ้ามี P แล้วได้ Q เป็นจริง

4. การพิสูจน์แบบแยกกัน

P หรือ Q จริง

เริ่มโดยสมมุติ P ไม่จริง แล้วหาหลักฐานมาเป็นเหตุผลอ้างอิงจนสรุปได้ว่า Q เป็นจริง

**ตัวอย่าง 1.4** ให้ $x$ และ $y$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $y$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $xy$ จะเป็นจำนวนเต็มคู่

**พิสูจน์** ให้ $x$ เป็นจำนวนเต็มคู่และ $y$ เป็นจำนวนเต็มคี่

$\therefore$ จะต้องมีจำนวนเต็ม $a$ และ $b$ ซึ่งทำให้

$x = 2a$ และ $y = 2b + 1$

$\therefore$ $(x - 2a)$ และ $(y = 2b + 1)$ $\Rightarrow$ $(xy = 2a(2b + 1))$

$\Rightarrow$ $(xy = 2(2ab + a))$

$\Rightarrow$ $(xy = 2c$ เมื่อ $c = (2ab + a) \in Z)$

$\Rightarrow$ ($xy$ เป็นจำนวนเต็มคู่)

แสดงว่า $xy$ เป็นจำนวนเต็มคู่

โดยทั่วไปแล้วประพจน์ที่เราจะพิสูจน์ส่วนมากมักจะอยู่ในรูป $P \Rightarrow Q$ ซึ่งเรามีวิธีพิสูจน์ข้อความลักษณะนี้ได้สองแบบคือ **โดยตรง** และ **โดยทางอ้อม**

ในการพิสูจน์โดยตรงคือ เราจะสมมุติว่าข้อความ P เป็นจริงแล้วพยายามแสดงว่าข้อความ Q เป็นจริง ในกรณีที่เราไม่ทราบว่าจะเริ่มการพิสูจน์โดยตรงได้อย่างไร เราควรจะพยายามศึกษาจากตัวอย่างและทำย้อนกลับจากสิ่งที่เราต้องการหรือมองหาทฤษฎีและสัจพจน์ซึ่งมี P อยู่ในสมมุติฐาน หรือ Q อยู่ในข้อสรุปเป็นแบบในการพิสูจน์

ในการพิสูจน์โดยทางอ้อมมี 2 วิธีคือ **การใช้ข้อความขัดแย้งสลับที่** (contraposition) และ**การหาข้อขัดแย้ง** (contradiction) ประพจน์ $P \Rightarrow Q$ บางประพจน์จะพิสูจน์โดยตรงได้ยาก จึงต้องใช้ข้อความขัดแย้งสลับที่คือ Q ไม่จริง แล้ว P ไม่จริงแทน ซึ่งจะทำให้การพิสูจน์ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.5** ให้ $x$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

**พิสูจน์** ประพจน์นี้อยู่ในรูป $P \Rightarrow Q$

$P = x^2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

$Q = x$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้นข้อความขัดแย้งสลับที่ not Q $\Rightarrow$ not P คือ

ถ้า $x$ เป็นจำนวนเต็มคี่ (ไม่ใช่จำนวนคู่) แล้ว $x^2$ เป็นจำนวนคี่ (ไม่ใช่จำนวนคู่)

สมมุติว่า $x$ เป็นจำนวนคี่

$\therefore$ จะมีจำนวนเต็ม $a$ ซึ่งทำให้ $x = 2a + 1$

$$(x = 2a + 1) \Rightarrow (x^2 = (2a+1)(2a+1)$$

$$\Rightarrow (x^2 = 4a^2 + 4a + 1)$$

$$\Rightarrow (x^2 = 2(2a^2 + 2a) + 1)$$

$$\Rightarrow (x^2 = 2b + 1 \text{ เมื่อ } b = 2a^2 + 2a \in Z)$$

นั่นคือ $x^2$ เป็นจำนวนคี่ แสดงว่า not Q $\Rightarrow$ not P เป็นจริง

ดังนั้น $P \Rightarrow Q$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือถ้า $x^2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว $x$ เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์โดยทางอ้อมอีกแบบหนึ่งคือโดยการหาข้อขัดแย้งซึ่งเป็นที่นิยมมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ข้อความนั้นมีโอกาสจะเป็นไปได้ 2 หรือ 3 แบบเท่านั้น และเราต้องตัดทางที่จะเป็นไปได้ทางอื่นออกหมดเหลือเพียงอย่างเดียว เช่น จำนวนเต็มใด ๆ ถ้าไม่เป็นจำนวนบวกต้องเป็นจำนวนลบ หรือศูนย์ ไม่มีทางเป็นอย่างอื่นได้อีกแล้ว ดังนั้น ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่าจำนวนเต็ม $x$ เป็นจำนวนบวก เราอาจสมมุติว่า $x \le 0$ คือเป็นจำนวนลบหรือศูนย์ และดำเนินการพิสูจน์ต่อไปจนพบข้อขัดแย้งกับข้อความข้างต้น เราก็สรุปได้ว่า $x > 0$ หรือ $x$ เป็นจำนวนบวก

**ตัวอย่าง** 1.6 จงแสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

**พิสูจน์** สมมุติว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้นจะต้องมีจำนวนเต็ม $a$ และ $b$ ซึ่งทำให้

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ และ $a$ กับ $b$ ไม่มีตัวประกอบร่วม

$$(\sqrt{2} = \frac{a}{b}) \Rightarrow (2 = \frac{a^2}{b^2})$$

$$\Rightarrow (a^2 = 2b^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 \text{ เป็นจำนวนคู่})$$

$$\Rightarrow (a \text{ เป็นจำนวนคู่}) \text{ ตามที่พิสูจน์แล้ว}$$

$$\Rightarrow (a = 2c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นจำนวนเต็ม})$$

$$\Rightarrow (2b^2 = a^2 = 4c^2)$$

$$\Rightarrow (b^2 = 2c^2)$$

$$\Rightarrow (b \text{ เป็นจำนวนคู่})$$

$$\Rightarrow (b = 2d \text{ สำหรับ } d \text{ เป็นจำนวนเต็ม})$$

$$\Rightarrow (a \text{ และ } b \text{ มี } 2 \text{ เป็นตัวประกอบร่วม})$$

ข้อความบรรทัดสุดท้ายขัดแย้งกับที่เราสมมุติ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่มีตัวประกอบร่วม

ดังนั้น ข้อสมมุติที่ว่า $\sqrt{2}$ เป็นตรรกยะไม่จริง

แสดงว่า $\sqrt{2}$ ต้องเป็นอตรรกยะ (เพราะจำนวนจริงใด ๆ ถ้าไม่เป็นตรรกยะก็ต้องเป็นอตรรกยะเพียงอย่างหนึ่งอย่างใดนี้เท่านั้น)

**ตัวอย่าง 1.7** ให้ $x$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $x^2 \geq 0$

**พิสูจน์** เราทราบว่าจำนวนจริงแยกได้ 3 กรณีคือจำนวนบวก จำนวนลบ และศูนย์ ดังนั้น ในการพิสูจน์เราจะต้องแยกทีละกรณี

**ให้** $x \in \mathbb{R}$

| | | |
|---|---|---|
| ($x$ เป็นจำนวนบวก) | $\Rightarrow$ | ($x \cdot x = x^2$ เป็นจำนวนบวก) |
| | $\Rightarrow$ | ($x^2 > 0$) |
| ($x$ เป็นจำนวนลบ) | $\Rightarrow$ | ($-x$ เป็นจำนวนบวก) |
| | $\Rightarrow$ | ($x^2 = (-x)(-x)$ เป็นจำนวนบวก) |
| | $\Rightarrow$ | ($x^2 > 0$) |
| ($x = 0$) | $\Rightarrow$ | ($x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$) |

นั่นคือ $x^2 \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ในการพิสูจน์ข้อความที่ว่า **จะต้องมี** $x \in X$ ซึ่งทำให้ $P(x)$ เป็นจริง ส่วนมากแล้วเรามักจะพบการพิสูจน์แบบนี้ เมื่อเราต้องการแก้สมการหรืออสมการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.8** ให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq 0$ แล้วจะต้องมีจำนวนจริง $x$ ซึ่งทำให้ $ax + b = 0$

**พิสูจน์** ในกรณีเช่นนี้การทำย้อนกลับเป็นสิ่งจำเป็น

สมมุติว่ามีจำนวนจริง $x$

$$(ax + b = 0) \Rightarrow (ax = -b)$$
$$\Rightarrow \left(x = -\frac{b}{a}\right)$$

เมื่อ $a \neq 0$ ดังนั้น $-\frac{b}{a}$ เป็นจำนวนจริง

ให้ $x = -\frac{b}{a}$

$$\left(x = -\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \left(ax + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0\right)$$

**นั่นคือจำนวนจริง** $\left(-\frac{b}{a}\right)$ **เป็นจำนวนที่ต้องการคือ ทำให้สมการ** $ax + b = 0$ **เป็นจริง**

ในการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปที่ว่าจะต้องมี $x \in X$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งทำให้ $P(x)$ เป็นจริง เริ่มแรกเราต้องพิสูจน์ว่า มี $x \in X$ ซึ่งทำให้ $P(x)$ เป็นจริงเสียก่อน แล้วจึงพิสูจน์ว่ามี $x \in X$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $P(x)$ จริง ซึ่งโดยทั่วไปแล้วเรานิยมการพิสูจน์แบบสมมุติให้มี $x_1$, $x_2$ ใน $X$ ซึ่งทำให้ $P(x_1)$ และ $P(x_2)$ จริง แล้วพิสูจน์ว่า $x_1 = x_2$

**ตัวอย่าง 1.9** ให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง $x$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $ax + b = 0$

**พิสูจน์** ในตัวอย่างที่แล้วเราได้แสดงแล้วว่ามีจำนวนจริง $x$ ซึ่งทำให้

$$ax + b. = 0$$

สมมุติว่ามีจำนวนจริงดังกล่าว 2 ตัวคือ $x_1$ และ $x_2$ ซึ่งทำให้

$$ax_1 + b = 0 \text{ และ } ax_2 + b = 0$$

$[(ax_1 + b = 0)$ และ $(ax_2 + b = 0)]$

$\Rightarrow$ $(ax_1 + b = ax_2 + b)$

$\Rightarrow$ $(ax_1 = ax_2)$ ตามกฎการตัดออกสำหรับการบวก

$\Rightarrow$ $(x_1 = x_2)$ ตามกฎการตัดออกสำหรับการคูณ

แสดงว่ามีจำนวนจริง $x$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $ax + b = 0$

**การสรุปจากประสบการณ์** (induction)

ในทางคณิตศาสตร์เรามักจะสังเกตพบปัญหาอยู่เสมอ ซึ่งปัญหานั้นสามารถแสดงได้ว่าเป็นจริง เช่น ผลบวกของจำนวนเต็มคี่ 3 ตัวแรก หรือสี่ตัวแรกเป็นจำนวนกำลังสองคือ

$1 + 3 + 5 - 9$ และ $1 + 3 + 5 + 7 - 16$

จากประพจน์นี้ทำให้ได้ข้อสังเกตเป็นปัญหาต่อไปว่าผลบวกของจำนวนเต็มคี่ $n$ จำนวนจะเป็นเท่าไร เขียนในรูปสูตรทั่วไปได้หรือไม่

จากการทดลองบวกก็ทำให้เขียนเป็นสูตรได้ว่า

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$

ซึ่งเราจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าข้อความนี้เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ $n$

**การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)**

ปัญหาต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจเรื่องนี้ได้ดีขึ้น

**ปัญหา :** ถ้าเรามีเหรียญจำนวนมากนับไม่ถ้วน (infinite) วางเรียงกันโดยมีเงื่อนไขสองข้อคือ

1) เหรียญอันที่หนึ่งเป็นเหรียญจริง

2) ถ้าเหรียญใดเหรียญหนึ่งเป็นเหรียญจริง เหรียญอันที่อยู่ถัดไปจะเป็นเหรียญจริงด้วย

**คำถาม :** มีเหรียญใดบ้างเป็นเหรียญจริง

**คำตอบ :** ทุกเหรียญเป็นเหรียญจริง

**เหตุผล :** จากเงื่อนไขข้อ 1 เหรียญอันแรกเป็นเหรียญจริง จากเงื่อนไขข้อที่ 2 เหรียญอันที่อยู่ถัดไปคืออันที่สองก็จะเป็นเหรียญจริงด้วย ในทำนองเดียวกันเมื่อเหรียญอันที่สองเป็นเหรียญจริง เหรียญอันที่สามจะเป็นเหรียญจริงด้วย ตามเงื่อนไขข้อ 2 เมื่อพิจารณาดังนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้ว่าเหรียญอันที่สี่ อันที่ห้าและเหรียญอื่น ๆ ถัดไปก็จะเป็นเหรียญจริง นั่นคือเหรียญทุกเหรียญเป็นเหรียญจริง

จากเงื่อนไขและเหตุผลดังกล่าวนี้ เราสามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์ประพจน์ทางคณิตศาสตร์ **(Mathematical Statement)** ได้ ซึ่งการพิสูจน์แบบนี้เรียกว่า **การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)**

**นิยาม :** ประพจน์ $P(n)$ สำหรับ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และมีคุณสมบัติ 2 ข้อต่อไปนี้

1) ประพจน์เป็นจริงสำหรับ $n = 1$ หรือ $P(1)$ เป็นจริง และ

2) สำหรับ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าประพจน์เป็นจริง สำหรับ $k$ แล้วทำให้ประพจน์เป็นจริงสำหรับ $k+1$ ด้วย

ดังนั้นประพจน์ $P(n)$ จะเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกทุกจำนวน

**ตัวอย่าง** 1.10 จงพิสูจน์ว่าข้อความ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงเมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

**พิสูจน์** เราจะต้องแสดงว่าข้อความนี้มีคุณสมบัติ 2 ข้อดังกล่าวข้างต้น

1) ถ้า $n = 1$ จะได้ $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$

$$1 = \frac{2}{2}$$

แสดงว่า ถ้า $n = 1$ จะทำให้ข้อความ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริง

2) ถ้าข้อความ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงเมื่อ $n = k$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

แสดงว่าข้อความ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับ $n = k+1$

ดังนั้นข้อความ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกทุกจำนวน $n$ ตามการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

# แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{r=1}^{n} r^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

3. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{r=1}^{n} r^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

4. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4r^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

## 1.3 Well-Ordering Principle

ทุกสับเซ็ต S ที่ไม่ใช่เซ็ตว่างของจำนวนเต็มบวก จะต้องมีสมาชิกซึ่งมีค่าน้อยที่สุดอยู่ในสับเซ็ต S ด้วย

นั่นคือ จะต้องมีจำนวนเต็ม a ที่เป็นสมาชิกของ S และ $a \leqslant b$ สำหรับ b ซึ่งเป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

**ทฤษฎี 1.1**

1. เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมีค่าน้อยที่สุดในเซ็ตของจำนวนเต็มบวก

**พิสูจน์** ให้ S เป็นสับเซ็ตของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$S = \{a \in \mathbb{Z}^+ | 0 < a < 1\}$

ถ้า $S = \phi$ การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ก็เสร็จสิ้น

ถ้า $S \neq \phi$

ดังนั้นจาก Well-Ordering Principle จะต้องมี b อยู่ใน S ซึ่ง b มีค่าน้อยที่สุดในเซ็ต S

แสดงว่า $0 < b < 1$

คูณตลอดด้วย b จะได้ $0 < b^2 < b$

หรือ $0 < b^2 < b < 1$

แสดงว่า $b^2$ เป็นสมาชิกของ S ซึ่งมีค่าน้อยกว่า b เป็นการขัดแย้งกับที่สมมุติไว้ว่า b มีค่าน้อยที่สุดใน S

นั่นคือ $S \neq \phi$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น S ต้องเป็นเซ็ตว่าง

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆