บทที่ 7
การดำเนินการทวิภาค
(Binary Operations)

7.1 การดำเนินการทวิภาค

F_1

ให้ S เป็นเซต ๆ หนึ่ง $*$ **เป็นการดำเนินการทวิภาคบน** S ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นฟังก์ชัน จาก $S \times S$ ไปยัง S

ให้ $a * b$ แทนภาพ (image) ของ (a, b) ภายใต้ $*$

สำหรับกรอบข้างล่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการดำเนินการทวิภาค

F_2

ตัวอย่าง 7.1.1

ให้ $S = \{0, 1, 2\}$

$$* = \{((0, 0), 0), ((0, 1), 1), ((0, 2), 2), ((1, 0), 1), ((1,1), 2), ((1, 2), 0), ((2, 0), 2), ((2, 1), 0), ((2, 2), 1)\}$$

จะเห็นว่า $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $S \times S$ ไปยัง S

นั่นคือ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต S

ข้อสังเกต

$0 * 0 = 0, 0 * 1 = 1,$

$0 * 2 = 2, 1 * 0 = 1,$

$1 * 1 = 2, 1 * 2 = 0,$ เรื่อย ๆ ไป

F_3

ตัวอย่าง 7.1.2

1. การคูณ ($\cdot$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต R ของจำนวนจริงทั้งหมด

2. การบวก (+) เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R

3. การลบ (-) เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R

4. การหาร ($\div$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $R-\{0\}$

5. กำหนด $*$ จาก $R \times R$ ไป R โดย $x * y = (x + y)-(x \cdot y)$ แล้ว $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R

F_4

ตัวอย่าง 7.1.3

1. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว ให้ $x \vee y$ แทนค่าสูงสุด ของ x และ y

นั่นคือ $x \vee y = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant y \\ y & \text{ถ้า } y \geqslant x \end{cases}$

แล้ว $\vee$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R เช่น $2 \vee \pi = \pi, 2 \vee 2 = 2$ และ $2 \vee 1 = 2$ เป็นต้น

(หมายเหตุ : $\vee$ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้ในสองความหมาย)

2. กำหนด $*$ จาก $N \times N$ ไปยัง N โดย $m * n = m^n$ ดังเช่น : $2^1 = 2 * 1, 3^2 = 3 * 2 = 9, 2 * 3 = 2^3 = 8$ เรื่อย ๆ ไป

ดังนั้น $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต N ของจำนวนนับ

F_5

ตัวอย่าง 7.1.4

1. ให้ $\underline{X}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง แล้วผลผนวก ($\cup$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $P(\underline{X})$ ของเซตย่อยทั้งหมดของ $\underline{X}$

2. ผลตัด ($\cap$) เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $P(\underline{X})$

3. ส่วนเติมเต็ม (Relative Complement) หรือ - เป็นการดำเนินการทวิภาค บน P ($\underline{X}$) อย่าลืมว่า $A-B = \{ x \in \underline{X} : x \in A \wedge x \notin B \}$

4. ความแตกต่างสมมาตร (symmetric difference) Δ เป็นการดำเนินการทวิภาค บน P ($\underline{X}$)

F_6

ตัวอย่าง 7.1.5

1. ให้ $\underline{X}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง $\mathcal{F}$ แทนเซตของฟังก์ชันทั้งหมด จาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$ ดังนั้น $\mathcal{F} = \{ f \mid f : \underline{X} \to \underline{X} \}$ ผลประกอบ (composition) $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathcal{F}$

2. ให้ X เป็นเซต ๆ หนึ่ง δ แทนเซตของฟังก์ชัน f ทั้งหมดจาก $\underline{X}$ ไปยัง $\underline{X}$ ซึ่ง f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ f ไปทั่วถึง $\underline{X}$ ฟังก์ชันประกอบ $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน δ

3. ให้ $\underline{X}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง R แทนเซตของฟังก์ชันค่าจริงทั้งหมดบน $\underline{X}$

ดังนั้น $R = \{ f \mid f : \underline{X} \to R \}$

ให้ $h \in R$ และ $g \in R$

กำหนด $h + g : \underline{X} \to R$ โดย $(h + g)(x) = h(x) + g(x)$

กำหนด $h \cdot g : \underline{X} \to R$ โดย $(h \cdot g)(x) = [h(x)] \cdot [g(x)]$

กำหนด $h \vee g : \underline{X} \to R$ โดย $(h \vee g)(x) = h(x) \vee g(x)$

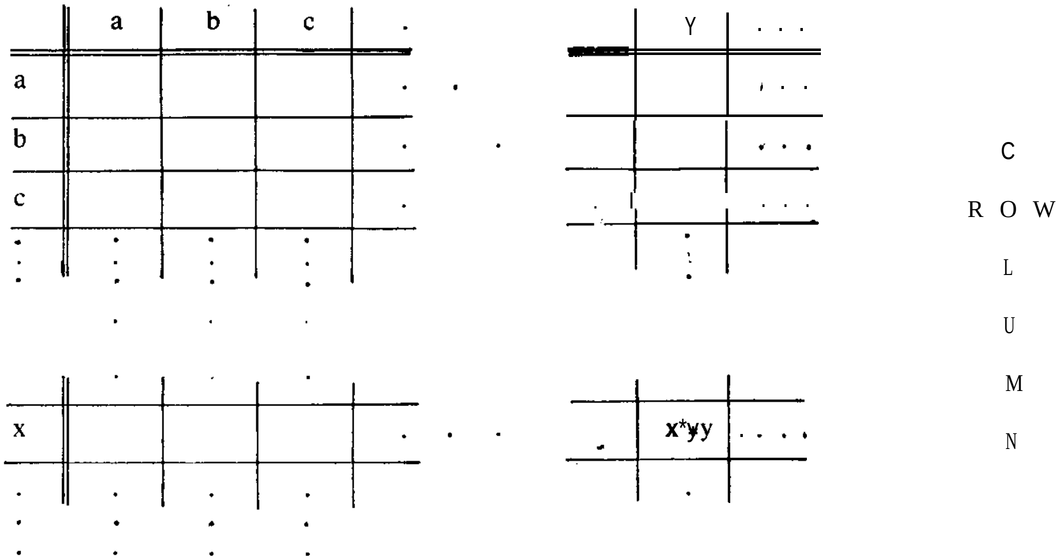
แล้ว $+$, $\cdot$, และ $\vee$ ทั้งหมดนี้เป็นการดำเนินการทวิภาค บน R

F_7

ตัวอย่าง 7.1.6

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product) x เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเวกเตอร์ปริภูมิ 3 มิติ (Three dimensional vector space)

ให้ S = { a, b, c, . . . } เป็นเซตจำกัด พิจารณาตารางต่อไปนี้



ข้อสังเกต

สามารถหาฟังก์ชัน $*$ จาก $S \times S$ ไปยัง S โดยเติมแต่ละช่องในตารางด้วยสมาชิกของ S เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ค่าของ $x * y$ จะอยู่ในช่อง ซึ่งอยู่ในแถวที่ x และหลักที่ y

นั่นคือ สมาชิกที่ปรากฏในแถวที่ b และหลักที่ c คือ $b * c = a$

ดังเช่น ให้ S = { 0, 1, 2 } แล้วแต่ละตารางซึ่งกำหนดโดยการดำเนินการทวิภาคบน S คือ :

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

#	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*	0	1	2
0	1	0	0
1	2	2	1
2	1	2	0

จะเห็นว่า 1 ☆ 1 = 2, 1 ☆ 0 = 1

2 ☆ 1 = 0, 1 # 1 = 1

1 # 2 = 2, 2 * 1 = 2

1 * 2 = 1 เป็นต้น

ดังนั้น ☆ เป็นการดำเนินการทวิภาคเช่นเดียวกับตัวอย่าง 7.1.1

F_8

ตัวอย่าง 7.1.7

ให้ S = { a, b, c, d, e, f } กำหนด ☆ จาก S × S ไป S โดยตารางต่อไปนี้

☆	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	f*	e	d	c
c	c	e*	a	f	b	d
d	d	f	e	a	c	b
e	e	c	d	b	f	a
f	f	d	b	c	a	e

แล้ว ☆ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

ในที่นี้ b ☆ c = f, c ☆ b = e เป็นต้น

F_9

ตัวอย่าง 7.1.8

ให้ S = { a, b, c, d, e, f } กำหนด # จาก S × S ไป S ดังต่อไปนี้

#	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	d	e	f	a
c	c	d	e	f	a	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	a	b	c	d
f	f	a	b	c	d	e

แล้ว # เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

แบบฝึกหัด 7.1

1. ทำไมการหารจึงไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R ....

....

2. การบวกเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต N ซึ่งเป็นเซตของจำนวนนับหรือไม่ ....

....

ทำไมการลบไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N ....

....

การลบเป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต Z ซึ่งเป็นเซตของจำนวนเต็มหรือไม่ ....

.... ทำไม

เป็นหรือทำไมไม่เป็น...

3. นิยาม : **เซตเป็นเซตย่อยแท้ของ $\overline{X}$** ก็ต่อเมื่อ $A \subset \underline{X}$ และ $A \neq 0$, $A \neq \overline{X}$ จงให้ตัวอย่างเซตย่อยแท้ของ N ซึ่ง ทั้งการบวก และการคูณเป็นการดำเนินการทวิภาคบน S ....

....

4. พิจารณาการดำเนินการทวิภาคในตัวอย่าง 7.1.3 (F_4) ข้อ 2 ทำไมไม่กำหนดการดำเนินการทวิภาคอย่างง่ายบน z = { . . . , -2, -1, 0, 1, 2, . }

5. จงให้เหตุผลมา 2 ข้อว่าทำไมตารางข้างล่างนี้ไม่เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต { 0, 1 }

	0	1
0	1	0
1	0	2

5.1 ....

....

5.2 ....

....

6. ให้ * = { ((0, 0), 1), ((0, 1), 0), ((1, 1), 2), } จงให้เหตุผลว่า ทำไม * **ไม่** เป็นการดำเนินการทวิภาคบน { 0, 1 }

6.1 ....

6.2 ....

7. ให้ $\square$ $= \{((a,a),a),((a,b),b),((a,c),c),((b,a),b),((b,b),b),((b,c),c),((c,a),c),$
$((c,b),c),((c,c),c)\}$

7.1 $\boxed{X}$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน ....

7.2 a $\boxed{X}$ a = ...a $\square$ b = ...

a $\boxed{X}$ c = ...b $\square$ a = ...

7.3 จงให้การดำเนินการสำหรับ $\square$ ในตารางข้างล่างนี้

$\boxed{X}$	a	b	c
a			
b			
c			

8. ให้ $\overline{X} = \{0, 1\}$ แล้ว $P(\overline{X}) = \{\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ จงเขียนการดำเนินการในตารางของผลผนวก (union) ผลตัด (intersection) ส่วนเติมเต็ม (relative complement) และความแตกต่างสมมาตร (symetric difference)

$\cup$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\overline{X}$
$\varnothing$				
$\{0\}$				
$\{1\}$				
$\overline{X}$				

$\cap$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\overline{X}$
$\varnothing$				
$\{0\}$				
$\{1\}$				
$\overline{X}$				

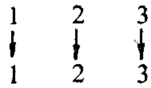
$-$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\overline{X}$
$\varnothing$				
$\{0\}$				
$\{1\}$				
$\overline{X}$				

Δ	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\overline{X}$
$\varnothing$				
$\{0\}$				
$\{1\}$				
$\overline{X}$				

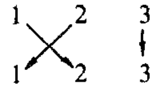
9. ถ้า S มี n สมาชิก แล้วมีจำนวนของการดำเนินการทวิภาคบน S ที่แตกต่างกันทั้งหมด
....จำนวน
(แนะ : พิจารณาทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดที่จะบรรจุลงในตารางดำเนินการได้)

10. ให้ $\underline{X} = \{1, 2, 3\}$ กำหนด $f_1, f_2, \ldots, f_6$ ดังต่อไปนี้

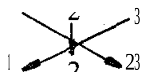
f_1 :



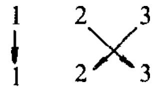
f_2 :



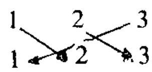
f_3 :



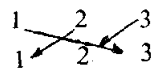
f_4 :



f_5 :



f_6 :



ให้ $\delta = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ แล้ว δ เป็นเซตของฟังก์ชันทั้งหมดจาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$ ซึ่งเป็นทั้งหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง $\underline{X}$ ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน δ ทำไม..

....

จงเติมตารางการดำเนินการสำหรับ $\circ$:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2				
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5				
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3				
f_6	f_6	f_4				

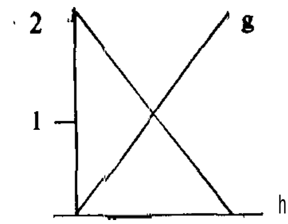
ให้ $\underline{X} = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

ให้ $R = \{f \mid f : \underline{X} \to R\}$ แล้ว g และ h ข้างล่างนี้เป็นกราฟ ที่เป็นสมาชิกของ R

11.1 จงเขียนกราฟของ $g+h$

11.2 จงเขียนกราฟของ $g \circ h$

11.3 จงเขียนกราฟของ $g \vee h$



7.2 การปิด (Closure)

F_1

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S ให้ $A \subset S$, A **ถูกปิดภายใต้** $*$ ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in A$, $\forall b \in A$, $a * b \in A$

นั่นคือ A **ไม่**ถูกปิด (not closed) ภายใต้ $*$ ก็ต่อเมื่อ $\exists a \in A$, $\exists b \in B$, $a * b \notin A$

จะเห็นว่า ถ้า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S แล้ว S ถูกปิดภายใต้ $*$

F_2

การลบ (-) เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต R ของจำนวนจริงทั้งหมด จำนวนเต็ม Z เป็นเซตย่อยของ R ถ้า $a \in Z$ และ $b \in Z$ แล้ว $a-b \in Z$ ดังนั้น Z ถูกปิดภายใต้การลบ แต่จำนวนนับ N **ไม่**ถูกปิดภายใต้การลบ เพราะว่า $\exists a \in N$ (คือ 1) และ $\exists b \in N$ (คือ 2) ซึ่ง $a - b \notin N$

แบบฝึกหัด 7.2

1. ให้ $\varnothing$ เป็นการดำเนินทวิภาคบนเซต $S = \{a, b, c, d\}$ ดังตาราง

$\varnothing$	a	b	c	d
a	b	a	a	b
b	a	b	b	a
c	b	c	c	d
d	a	a	d	d

จงเขียนเซตย่อยทั้งหมดของ S ซึ่งถูกปิด (closed) ภายใต้

0 : ....

....

....

2. ให้ $A = \{0, 1\}$ แล้ว A เป็นเซตย่อยของ R

2.1 A ถูกปิดภายใต้การคูณหรือไม่...

2.2 A ถูกปิดภายใต้การบวกหรือไม่...

2.3 A ถูกปิดภายใต้การลบหรือไม่...

2.4 A ถูกปิดภายใต้ * ที่กำหนดในตัวอย่าง 7.1.2 ข้อ 5 หรือไม่..............................

2.5 A ถูกปิดภายใต้ค่าสูงสุด v หรือไม่ (ได้กำหนดในตัวอย่าง 7.1.3 ข้อ 1) ....

....

3. อะไรคือเซตย่อย S ที่เล็กที่สุดของ R ซึ่งถูกปิดภายใต้การบวก และ S ประกอบด้วย $\{-1, 1\}$ ....

4. จงให้เซตย่อยแท้ของ z มา 3 อย่าง ซึ่งแต่ละอย่างถูกปิดภายใต้การดำเนินการทั้ง 5 ในข้อ 2

4.1 ....

4.2 ....

4.3 ....

5. พิสูจน์หรือพิสูจน์ว่าเท็จ : ทุก ๆ เซตย่อยของ R ถูกปิดภายใต้การดำเนินการค่ามากที่สุด

6. ให้ $\Theta = \{2n - 1 : n \in N\}$ แล้ว $\Theta = \{1, 3, 5, \ldots\}$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนนับคี่ทั้งหมด พิสูจน์ได้หรือไม่ได้ว่า Θ ถูกปิดภายใต้เลขชี้กำลัง (ได้กำหนดไว้ในตัวอย่าง 7.1.3 ข้อ 2)

7. ให้ $*$ เป็นการดำเนินทวิภาคบนเซต S, $A \subset S$ และ $B \subset S$ ให้ A ถูกปิดภายใต้ $*$ และ B ถูกปิดภายใต้ $*$ ด้วย พิสูจน์ได้หรือไม่ได้ว่า :

7.1 $A \cup B$ ถูกปิดภายใต้ $*$

7.2 $A \cap B$ ถูกปิดภายใต้ $\star$

8. ให้ $\underline{X}$ เป็นเซตใด ๆ $x_0 \in \underline{X}$ และให้ $a = \{A : A \subset \underline{X}$ และ $x_0 \in A\}$ แล้ว a เป็นเซต

ย่อยของ $P(\underline{X})$ ต่อไปนี้ จริงหรือเท็จ

.... 8.1 a ถูกปิดภายใต้ผลตัด (intersection)

.....................8.2 a ถูกปิดภายใต้ผลผนวก (union)

....................8.3 a ถูกปิดภายใต้ส่วนเติมเต็ม (Relative complement)

......................8.4 a ถูกปิดภายใต้ผลต่างสมมาตร

9. ให้ $\underline{X}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง ฟังก์ชันประกอบ $\circ$ เป็นการดำเนินการบนเซต $\mathcal{F}$ ของฟังก์ชันทั้งหมดจาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$

ให้ ε แทนเซตของฟังก์ชันทั้งหมดจาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$ ซึ่งไปทั่วถึง (onto) $\underline{X}$

ให้ m เป็นเซตของฟังก์ชันทั้งหมด จาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$ ซึ่งเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว ε และ m เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{F}$

9.1 ε ถูกปิดภายใต้ $\circ$ หรือไม่..

ทำไมจึงเป็น หรือทำไมไม่เป็น..

....

9.2 m ถูกปิดภายใต้ $\circ$ หรือไม่..

ทำไมเป็นหรือทำไมไม่เป็น..

....

9.3 $\varepsilon \cap m$ ถูกปิดภายใต้ $\circ$ หรือไม่..

ทำไมเป็น หรือ ทำไมไม่เป็น ....

....

9.4 เซต C ของฟังก์ชันคงที่ทั้งหมดจาก $\underline{X}$ ไป $\underline{X}$ ถูกปิดภายใต้ $\circ$ หรือไม่

7.3 การเปลี่ยนกลุ่ม

(Associativity)

F_1

ให้ $*$ เป็นการดำเนิน บน S,$*$ **เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม** (associative) ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S, a * (b * c) = (a * b) * c$

นั่นคือ $*$ ไม่เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม ก็ต่อเมื่อ $\exists a \in S, \exists b \in S, \exists c \in S, a * (b * c) \neq (a * b) * c$

F_2

ในบางครั้ง เป็นการยากที่จะพิสูจน์ว่า การดำเนินการเป็นการเปลี่ยนกลุ่ม ถ้า S เป็นเซตจำกัด มีจำนวนสมาชิกที่แน่นอน n สมาชิก แล้ว จะมีสมการ 3 แบบที่แตกต่างกัน อยู่ในรูป $a * (b * c) = (a * b) * c$ เมื่อ a, b และ c เป็นสมาชิกของ S

ถ้า n เป็นค่าเล็ก แล้วสามารถทดสอบการเปลี่ยนกลุ่มได้โดยทดสอบความสมเหตุสมผลของแต่ละสมการใน 3 แบบดังกล่าวแล้ว

ถ้า n เป็นค่าใหญ่ ก็พิสูจน์ได้โดยง่ายว่าการดำเนินการทวิภาค**ไม่**เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม โดยใช้ตัวอย่างค้าน (counter example)

F_3

ตัวอย่าง 7.3.1

1. การคูณและการบวกบน R. เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม (จะไม่พิสูจน์)

2. ใช้ตัวอย่างค้าน (counter example) พิสูจน์ว่าการหารบนเซต R - {0} **ไม่**เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม คือ ....(1)..........

3. ตัวอย่างค้านที่แสดงว่าการลบ บน R ไม่เป็นการเปลียนกลุ่ม คือ.....(2).....

....

(1) $(12 \div 2) \div 3 = 6 \div 3 = 2$

แต่ $12 \div (2 \div 3) = 18$

เพราะฉะนั้น $(12 \div 2) \div 3 \neq 12 \div (2 \div 3)$

(2) $(16\ 7\ )\ 2 \neq 16\ (7\ 2)$

F 4

ตัวอย่าง 7.3.2

กำหนด * จาก R x R ไป R โดย $x * y = (x + y) - (x \cdot y)$ แล้ว * เป็นการเปลี่ยนกลุ่มบน R

พิสูจน์

ให้ x, y และ z เป็นสมาชิกของ R จะต้องแสดงให้ได้ว่า $x * (y * z)$ เท่ากับ $(x * y) * z$:

$x * (y * z) = x * (y + z - yz)$ (นิยามของ *)

$= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz)$ (นิยามของ *)

$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz$

$(x * y) * z$ = ...*... ....

= ....

= ....

F_5

ตัวอย่าง 7.3.4

ค่าสูงสุดเฉพาะกลุ่ม v บน R เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

พิสูจน์

ให้ x, y, z เป็นสมาชิกของ R

จะมีทั้งหมด 6 กรณี :

1) $x \leqslant y \leqslant z$

2) Y 6 x $\leqslant$ Z

3) Z $\leqslant$ X $\leqslant$ Y

4) $x \leqslant z \leqslant y$

5) Y $\leqslant$ Z $\leqslant$ X

6) Z 6 Y 4 X

ตรวจสอบการเปลี่ยนกลุ่มในแต่ละกรณี :

กรณีที่ 1) : $(x \vee y) \vee z$ = y v z (เพราะ...........................(1)...........................)

= z (เพราะ ..*.................... (2) ....)

$x \vee (y \vee z) \quad = \quad x \vee z$ (เพราะ..........(3)..........)

z (เพราะ..........(4)..........)

นั่นคือ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

สำหรับอีก 5 กรณี ที่เหลือก็เช่นเดียวกัน

---

(1) $x \leqslant y$

(2) $y \leqslant z$

(3) $y \leqslant z$

(4) $x \leqslant z$

F_6

ตัวอย่าง 7.3.5

1. กำหนด $*$ จาก $N \times N$ ไป N โดย $m * n = m^n$ $*$ **ไม่**เป็นไปตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

2. ผลผนวก และผลตัด ต่างก็เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

3. ส่วนเติมเต็ม (Relative Complementation) **ไม่**จำเป็น เป็นไปตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

4. ความแตกต่างสมมาตร เป็นไปตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

5. ฟังก์ชันประกอบบนเซต $\mathcal{F}$ กำหนดโดย $\mathcal{F} = \{ f \mid f : \underline{X} \to \underline{X} \}$ 0 ซึ่งเป็นการดำเนินการเปลี่ยนกลุ่ม

พิสูจน์

ให้ f, g และ n เป็นสมาชิกของ $\mathcal{F}$ ให้ $x \in \underline{X}$ แล้ว

$$f\circ (g\circ h)(x) = f((g\circ h)(x))$$

$$= f(g(h(x)))$$

และ $(f\circ g)\circ h(x) = (f\circ g)(h(x))$

$$= f(g(h(x)))$$

นั่นคือ $\forall x \in \underline{X}\ [f\circ (g\circ h)](x)$

$$= [(f\circ g)\circ h](x)$$

เพราะฉะนั้น $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

F_7

ตัวอย่าง 7.3.6

1. การประกอบบน δ ซึ่งเป็นเซตของฟังก์ชัน f จาก $\underline{\overline{X}}$ ไป $\underline{\overline{X}}$ ซึ่ง f เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง $\underline{\overline{X}}$ ฟังก์ชันประกอบ $\underline{0}$ เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

2. การดำเนินการทวิภาคทั้งหมดบน R ซึ่ง R เป็นฟังก์ชันค่าจริงทั้งหมดบน $\underline{\overline{X}}$ โดยที่ $R = \{ f \mid f : \underline{\overline{X}} \to R \}$ ให้ $h \in R$ และ $g \in R$ กำหนด

$h + g : \underline{\overline{X}} \to R$ โดย $(h + g)(x) = h(x) + g(x)$

$h \cdot g : \underline{\overline{X}} \to R$ โดย $(h \cdot g)(x) = \{ h(x) \} . \{ g(x) \}$

$h \vee g : \underline{\overline{X}} \to R$ โดย $(h \vee g)(x) = h(x) \vee g(x)$

แล้ว + เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม บน R

พิสูจน์

ให้ f, g และ h เป็นสมาชิกของ R

$x \in \underline{\overline{X}}$

แล้ว $[(f + g) + h](x) = (f + g)(x) + h(x)$

$= [(f(x) + g(x)] + h(x)$

$= f(x) + [g(x) + h(x)]$

$= f(x) + (g + h)(x)$

$= [f + (g + h)](x)$

นั่นคือ $\forall x \in \underline{\overline{X}}, [(f + g) + h](x) = [f + (g + h)](x)$

เพราะฉะนั้น $(f + g) + h = f + (g + h)$

F_8

ตัวอย่าง 7.3.7

1. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product) ในเวกเตอร์ 3 มิติ **ไม่**เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

2. ตัวอย่าง ในตัวอย่าง 7.1.7 และตัวอย่าง 7.1.8 ต่างก็เป็นไปตามคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

7.4 **เอกลักษณ์** (Identities)

F_1

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต X, $e \in S$, e **เป็นเอกลักษณ์ มุ่งต่อ** $*$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in S, e * x = x$ และ $x * e = x$ ดังเช่น 0 (ศูนย์) เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อการบวก บน R และ 1 เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อการคูณ บน R

F_2

ทฤษฎี 7.4.1 (Uniqueness of the Identity)

ถ้า e_1 และ e_2 ต่างก็เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อ $*$ บนเซต S แล้ว $e_2 = e_2$

พิสูจน์

$\forall x \in S, e_1 * x = x$

และ $e_2 \in S$ **ดังนั้น** $e_1 * e_2 = e_2$

$\forall y \in S, y = y * e_2$

และ $e_1 \in S$ **ดังนั้น** $e_1 = e_1 * e_2$

เพราะฉะนั้น $e_1 = e_2$

แบบฝึกหัด 7.4

1.

1.1 จงพิสูจน์ว่า 0 ไม่เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อการลบบน R

1.2 จงพิสูจน์ว่า 1 ไม่เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อ (with respect to) การหารบน R

2. สมาชิกใดของ R เป็นเอกลักษณ์ มุ่งต่อ * ที่กำหนดในตัวอย่าง 7.1.2 ข้อ 5................ ....จงพิสูจน์

3. จงพิสูจน์ว่า ไม่มีเอกลักษณ์ e ใน R มุ่งต่อค่ามากที่สุด $\vee$ จงพยายามพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง : สมมติ $\exists e \in R, \forall y \in R, \ell \vee y = y$ แล้ว $\forall y \in R, e \leqslant y$

ในแต่ละปัญหาต่อไปนี้ ถ้ามีเอกลักษณ์แล้ว มันคืออะไร

4. เอกลักษณ์มุ่งต่อเลขชี้กำลังบน N คือ...

5. เอกลักษณ์มุ่งต่อผลผนวกบน P $(\underline{\overline{X}})$ คือ...

6. เอกลักษณ์มุ่งต่อผลตัดบน P $(\underline{\overline{X}})$ คือ...

7. เอกลักษณ์มุ่งต่อส่วนเติมเต็มบน P $(\underline{\overline{X}})$ คือ...

6. เอกลักษณ์มุ่งต่อความแตกต่างสมมาตรบน P $(\underline{\overline{X}})$ คือ....................................... ....

9. เอกลักษณ์มุ่งต่อการประกอบ (composition) บน $\mathscr{F}$ กำหนดดังตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ 1 คือ ....

10. เอกลักษณ์มุ่งต่อ + บน R กำหนดดังตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ 3 คือ ....

11. เอกลักษณ์มุ่งต่อการคูณบน R กำหนดดังตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ 3 คือ ....

12. เอกลักษณ์มุ่งต่อ $\vee$ บน R ดังกำหนดไว้ในตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ 3 คือ ....

ให้ $S = \{a, b, c, d\}$ กำหนด ⊙ และ Δ บน S โดย

⊙	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	c	c
d	b	d	c	d

Δ	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	c
c	a	c	c	c
d	a	d	c	d

13. เอกลักษณ์มุ่งต่อ ⊙ บน S คือ ....

14. เอกลักษณ์มุ่งต่อ Δ บน S คือ ....

7.5 ตัวผกผัน (Inverse)

F_1

สมมติว่า e เป็นเอกลักษณ์ มุ่งต่อการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต S ให้ $x \in S$ กล่าวได้ว่า y **เป็นตัวผกผันของ** x (มุ่งต่อ $*$) ก็ต่อเมื่อ $x * y = e$ และ $y * x = e$

ถ้าสมาชิก x มีตัวผกผัน ให้ $\bar{x}$ แทนตัวผกผันของ x

ดังนั้น $\bar{x} * x = e = x * \bar{x}$

F_2

นิยาม

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค โดยสอดคล้องกับคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มบนเซต $\underline{X}$; $a \in \underline{X}$, $\forall n \in N$ และ

1) $a^1 = a$

และ 2) $a^{n+1} = a * a^n$

จะเห็นว่า $a^1 = a, a^2 = a * a^1 = a * a,$

$a^3 = a * a^2$

$= a * (a * a)$

$= a * a * a$

$a^4 = a * a'$

$= a * (a * a * a)$

$= a * a * a * a$ เรื่อย ๆ ไป

นั่นคือ a^n มีความหมายที่แน่นอนสำหรับทุก ๆ $n \in N$

F_3

ทฤษฎีบท 7.6.1 (Uniqueness of Inverse for Associative Operations)

ให้ S เป็นเซต 9 หนึ่ง $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค **เปลี่ยนกลุ่ม** บน S, e เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อ $*$ ถ้า y_1 และ y_2 ต่างก็เป็นตัวผกผันของ x แล้ว $y_1 = y_2$

พิสูจน์

$x * y_1 = e$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $y_2 * (x * y_1) = y_2 * e$

นั่นคือ $y_2 * (x * y_1) = y_2$ .... ①

$y_2 * x = e$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $(y_2 * x) * y_1 = e t y$

นั่นคือ $(y_2 * x) * y_1 = y_1$ .... ②

แต่ $y_2 * (x * y_1) = (y_2 * x) * y_1$ (เพราะว่า $*$ เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม)

เพราะฉะนั้น $y_2 = y_1$ (โดย ① และ ②)

แบบฝึกหัด 7.5

1. สมมติว่า □ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต $\underline{X}$ ที่มีเอกลักษณ์ e มุ่งต่อ □ ถ้ามีบาง $x \in \underline{X}$ ซึ่ง x มีตัวผกผัน 2 ตัวที่แตกต่างกันมุ่งต่อ □ แล้วสรุปเกี่ยวกับ □ ได้อย่างไร

....

....

2. แต่ละสมาชิกของ N มีตัวผกผันมุ่งต่อการบวกหรือไม่ ....

....

3. จงให้สมาชิกของ z ซึ่งมีตัวผกผันของการคูณ ....

....

4. แต่ละสมาชิกของเซต a ของจำนวนตรรกยะมีตัวผกผันมุ่งต่อการคูณหรือไม่ ....

....

5. สมมติ e เป็นเอกลักษณ์ มุ่งต่อการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต $\underline{X}$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{X}$ มีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิก y ซึ่งมีตัวผกผัน

6. ถ้า T เป็นเซต ๆ หนึ่ง แล้ว จงแจกแจงสมาชิกทั้งหมดของ $\underline{P}$(T) ซึ่งมีตัวผกผันมุ่งต่อ

w-man.. ....

มุ่งต่อผลตัด..

7. ถ้า $A \in P(\underline{X})$ แล้วตัวผกผันของ A มุ่งต่อความแตกต่างสมมาตร คือ ....

8. ถ้า $f \in \mathscr{F}$ กำหนดดังตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ l แล้วตัวผกผันของ f มุ่งต่อ $\circ$ คือ ....

....

9. ถ้า $f \in R$ กำหนดดังตัวอย่าง 7.1.5 ข้อ 3 แล้วตัวผกผันของ f มุ่งต่อ + คือ ....

10. พิจารณาตัวอย่าง 7.1.8 อะไรคือเอกลักษณ์มุ่งต่อ

\# .... จงหาตัวผกผันของแต่ละสมาชิก :

$\bar{a}$ = ... $\bar{d}$ = ...

$\bar{b}$ = ... $\bar{e}$ = ...

$\bar{c}$ = ... $\bar{f}$ = ...

7.6 **การสลับที่** (Commutativity)

F_1

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S, $*$ เป็นการสลับที่ ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in S, \forall b \in S$, $a * b = b * a$ นั่นคือ $*$ **ไม่**เป็นการสลับที่ ก็ต่อเมื่อ $\exists a \in S, \exists b \in S, a * b \neq b * a$

ส่วนใหญ่การดำเนินการทวิภาคบนเซตไม่เป็นไปตามคุณสมบัติสลับที่ ตัวอย่างต่าง ๆ ของเรื่องการดำเนินการทวิภาค และการเปลี่ยนกลุ่ม สามารถหาได้อย่างน้อย 9 ตัวอย่าง (ข้อ)ที่การดำเนินการ **ไม่**เป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่

F_2

พิจารณาทฤษฎีที่คุ้นเคยอยู่แล้ว : ถ้า b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $n \in N$ แล้ว $(bc)^n = b^n c^n$ ทฤษฎีนี้ไม่สมเหตุสมผล หรือไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม จากตัวอย่าง 7.1.7 :

$(b \star c)^2 = (f)^2 = f \star f = e$

$b^2 \star c^2 = (b \star b) \star (c \star c) = a \star a = a$

นั่นคือ $(b \star c)^2 \neq b^2 \star c^2$

F_3

ทฤษฎีบท 7.6.1

ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคเปลี่ยนกลุ่มบนเซต $\underline{X}$ ถ้า $*$ เป็นการสลับที่แล้ว แต่ละจำนวนนับ n :

(1) $(a * b)^n = a^n * b^n$

พิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (math induction)

จะได้ว่า $(a * b)^1 = a * b$ (นิยามของ a)

$= a^1 * b^1$ (นิยามของ a^1 และ b^1)

เพราะฉะนั้น สมการ (1) สอดคล้องกับกรณีที่ $n = 1$

ต่อไปสมมติว่าสมการ (1) สอดคล้องกับจำนวนนับ k :

นั่นคือ สมมติ $\exists k \in N, (a * b)^k = a^k * b^k$ ....(2)..........

และได้ว่า $(a * b)^{k+1} = (a * b) * (a * b)^k$ (นิยามของ $(a+b)^{k+1}$)

$= (a * b) * (a^k * b^k)$ (โดย (2))

$= a * (b * a^k) * b^k$ (การเปลี่ยนกลุ่ม)

$= a *(a^k * b) * b^k$ (การสลับที่ของ $*$)

$= (a * a^k) * (b * b^k)$ (การเปลี่ยนกลุ่มของ $*$)

นั่นคือ $(a * b)^{k+1} = a^{k+1} * b^{k+1}$ (นิยามของ a^{k+1} และ b^{k+1})

ดังนั้นสมการ (1) สอดคล้องกับจำนวนนับ $k + 1$

แสดงว่าถ้ามีจำนวนนับ k ซึ่งสอดคล้องกับ (1) แล้ว

สมการ (1) สอดคล้องกับจำนวนนับถัดไปคือ $k + 1$ ด้วย

นอกจากนี้ ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สมการ (1) สอดคล้อง (valid) กับจำนวนนับตัวแรกด้วย คือ 1

จึงสรุป โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่าสมการ (1) เป็นจริงสำหรับจำนวนนับทุกจำนวน

แบบฝึกหัด 7.6

1. ถ้า S มี n สมาชิก แล้วมีเพียง..
   การดำเนินการทวิภาคบน S ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่

2. พิจารณาแต่ละการดำเนินการทวิภาคที่กำหนดในตัวอย่างของหัวข้อ 7.1 จงระบุว่าอันใดเป็นการสลับที่และอันใดไม่เป็นการสลับที่ จงให้ตัวอย่างค้านในแต่ละกรณีที่ไม่เป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่

3. สมมติ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค ที่สอดคล้องกับการจัดหมู่บน G ให้ $m \in N, n \in N$, $a \in G$ และ $b \in G$ แล้ว**จริงหรือเท็จ** (ถ้าจริง จงแสดงการพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จ จงให้ตัวอย่างค้าน)

   3.1 $(a * b)^n = a * (b * a)^{n-1} * b$

   3.2 (a”)” = a^{m-n}

   3.3 $(a * b) * (a * b)$” = $a^{n+1} * b^{n+1}$

   3.4 $a^m * a$” = a^{m+n}

7.7 **การแจกแจง** (Distributivity)

F_1

ให้ $*$ และ $\star$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต S กล่าวว่า $*$ **เป็นการแจกแจงทางซ้าย** (left-distributive) บน $\star$ ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S, a * (b \star c) = (a * b) \star (a * c)$

กล่าวได้ว่า $*$ **เป็นการแจกแจงทางขวา** (right-distributive) บน $\star$ ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in S, \forall b \in S, \forall c \in S, (a \star b) * c = (a * c) \star (b * c)$

กล่าวได้ว่า $*$ **เป็นการกระจาย** (distributive) บน $\star$ ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นทั้งการกระจายทางซ้าย และการกระจายทางขวาบน $\star$ จะเห็นว่า ถ้า $*$ เป็นการสลับที่แล้ว $*$ เป็นการกระจายทางขวา ก็ต่อเมื่อ $*$ กระจายทางซ้าย

F_2

พิจารณาการหาร ($\div$) และการบวก ($+$) บนเซตจำนวนจริง ยกเว้น ศูนย์ การหารเป็นการกระจายทางขวาบน (over) การบวก

$(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

แต่การหาร **ไม่**เป็นการกระจายทางซ้ายบนการบวก เพราะว่า

$c \div (a + b) \neq (c \div a) + (c \div b)$

สรุปได้ว่า การหาร **ไม่**เป็นการกระจายบนการบวก

แบบฝึกหัด 7.7

จากตัวอย่างต่าง ๆ ในหัวข้อ 7.1 จงตรวจสอบคุณสมบัติการกระจายของการดำเนินการแต่ละคู่ ซึ่งกำหนดอยู่ในเซตเดียวกัน เช่น พิจารณาทั้ง + และ $\vee$ ที่กำหนดบน R มีการดำเนินการหนึ่งอย่างในการดำเนินการเหล่านี้ที่เป็นกฎการกระจายทางซ้าย

7.8 ระบบเชิงพีชคณิต

(Algebraic system)

F_1

[S, *] เรียกว่าระบบเชิงพีชคณิต ก็ต่อเมื่อ

1) S เป็นเซต

2) * เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

F_2

[S, *] เรียกว่า **กึ่งกลุ่ม** (semigroup) ก็ต่อเมื่อ

1) S เป็นเซต

2) * เป็นการดำเนินการบน S

3) * เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

นั่นคือ กึ่งกลุ่ม เป็นระบบเชิงพีชคณิต ซึ่งมีคุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

F_3

[S, *] เรียกว่า **โมนอยด์** (monoid) ก็ต่อเมื่อ

1) S เป็นเซต

2) * เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

3) * เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

4) $\exists e \in S$, e เป็นเอกลักษณ์มุ่งต่อ *

นั่นคือ โมนอยด์ เป็น กึ่งกลุ่ม ที่มีเอกลักษณ์

F_4

[S, *] เรียกว่า **กลุ่ม** (group) ก็ต่อเมื่อ

1) S เป็นเซต

2) * เป็นการดำเนินการทวิภาคบน S

3) * เป็นการเปลี่ยนกลุ่ม

4) $\exists e \in S$, e เป็นเอกลักษณ์ มุ่งต่อ *

5) $\forall a \in S$, $\exists \bar{a} \in S$, $\bar{a}$ เป็นตัวผกผันของ a มุ่งต่อ *

นั่นคือ กลุ่ม เป็นโมนอยด์ (monoid) ซึ่งทุก ๆ สมาชิกมีตัวผกผัน (inverse)

F_5

[S, $*$, ★] **เรียกว่า วง** (ring) **ก็ต่อเมื่อ**

1) [S, $*$] **เป็นกลุ่ม (group)**

2) $*$ **เป็นการสลับที่**

3) [S, ★] **เป็น โมนอยด์ (monoid)**

4) ★ **กระจายบน** (distributes over) $*$

F_6

ตัวอย่างในหัวข้อ 7.1 แสดงถึงระบบเชิงพีชคณิตคู่ [N, $*$] เมื่อ $*$ เป็นเลขชี้กำลัง คือระบบเชิงพีชคณิต ซึ่งไม่เป็นกึ่งกลุ่ม (semi group)

[N, +] **เป็นกึ่งกลุ่ม ที่ไม่เป็นโมนอยด์**

[N, ·] **(เมื่อ · แทนการคูณ) เป็นโมนอยด์ที่ไม่เป็นกลุ่ม**

[Z, +] **เป็นกลุ่ม (group)**

[R, +, ·] **เป็นวง (ring)**

[Z, +, ·] **เป็นวงด้วย**

แบบฝึกหัด 7.8

จากตัวอย่างต่าง ๆ ในหัวข้อ 7.1 จงพิจารณาแต่ละกรณี ตัดสินได้หรือไม่ได้ว่าเซตที่กำหนดให้ และการดำเนินการทวิภาคที่กำหนดให้ อยู่ในรูป :

1) ระบบเชิงพีชคณิต (an algebraic system)

2) กึ่งกลุ่ม (a semigroup)

3) โมนอยด์ (a monoid)

4) กลุ่ม (a group)

7.9 ฟังก์ชันถอดแบบ (Isomorphism)

F_1

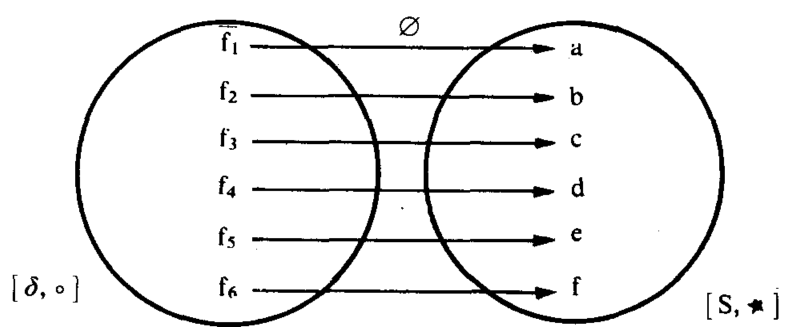
เปรียบเทียบกลุ่ม [δ, $\circ$] กับกลุ่ม [S, ★] ดังตารางข้างล่างนี้

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

★	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	f	e	d	c
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	e	a	c	b
e	e	c	d	b	f	a
f	f	d	b	c	a	e

ควรระวังในการตรวจสอบกลุ่มทั้งสองนี้ ซึ่งมีความคล้ายกัน

ให้ $\varnothing$ เป็นการสมนัยระหว่างสมาชิกของเซต δ และ S :



โดยการคำนวณ

$0\,(f_4 \circ f_5) = 0\,(f_3) = e$

$0\,(f_4) ★ 0\,(f_5) = d ★ e = e$

ดังนั้น $0\,(f_4 \circ f_5) = \varnothing\,(f_4) ★ \varnothing(f_5)$

จากการคำนวณกล่าวได้ว่า

$0\,(f_6 \circ f_2) = 0\,(f_4) = d$

$\varnothing\,(f_6) ★ 0\,(f_2) = f\ 4\ b = d$

ดังนั้น $0\,(f_6 \circ f_2) = \varnothing\,(f_6) ★ \varnothing\,(f_2)$

ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป

F_2

จากการคำนวณใน F_1 จะพบว่า

1) $\forall f_1 \in \delta, \forall f_j \in \delta, \varnothing (f_i \circ f_j) = \varnothing (f_i) \bigstar \varnothing (f_j)$

2) ถ้า $x = \varnothing (f_i)$ และ ถ้า $y = \varnothing (f_j)$ แล้ว $x \bigstar y = \varnothing (f_i \circ f_j)$

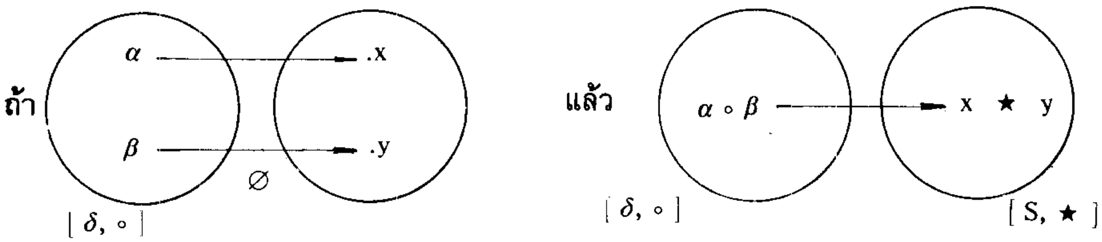
3) ถ้า $(f_i, x) \in \varnothing$ และถ้า $(f_j, y) \in \varnothing$ แล้ว $(f_i \circ f_j, x \bigstar y) \in \varnothing$

ตรวจสอบได้ ดังเช่น

$(f_1, a) \in \varnothing$ และ $(f_2, b) \in \varnothing$ แล้ว $(f_1 \circ f_2, a \bigstar b) \in \varnothing$

คุณสมบัติข้อ 3) นี้ บอกได้ว่า $\varnothing$ เป็นการสมนัยระหว่าง δ และ S ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า f_2 สมนัยกับ x และ f_j สมนัยกับ y แล้ว

$f_i \circ f_j$ สมนัยกับ $x \bigstar y$ แสดงโดยรูปได้ดังนี้ :



F_3

นิยาม 7.9.1

ให้ $[\overline{X}, *]$ และ $[\overline{Y}, \square]$ เป็นระบบเชิงพีชคณิต f เป็น**ฟังก์ชันถอดแบบของ** $[\overline{X}, *]$ **ไปทั่วถึง** (onto) $[\overline{Y}, \square]$ **ก็ต่อเมื่อ**

1) $f : \overline{X} \to \overline{Y}$

2) f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

3) f ไปทั่วถึง (onto) $\overline{Y}$

4) $\forall a \in \overline{X}, \forall b \in \overline{X}, f(a * b) = f(a) \square f(b)$ กล่าวได้ว่า $[\overline{X}, *]$ **เป็นฟังก์ชันถอดแบบไปยัง** $[\overline{Y}, \square]$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันถอดแบบอย่างน้อย หนึ่งฟังก์ชันของ $[\overline{X}, *]$ ไปทั่วถึง $[\overline{Y}, \square]$