บทที่ 6
เซตอนันต์
(Infinite sets)

6.1 **การแจงนับเท่ากัน** (Equinumerous sets)

F_1

นิยาม 6.1.1

A **เป็นการแจงนับเท่ากัน** (equinumerous) กับ R ก็ต่อเมื่อ $\exists f : A \rightarrow B$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ f ไปทั่วถึง B

ให้ $A \sim B$ แทน A เป็นการแจงนับเท่ากันกับ B

F_2

ทฤษฎีบท 6.1.1

การแจงนับเท่ากัน $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) บนกลุ่มของเซตใด ๆ

พิสูจน์

1) ให้ X เป็นเซต ๆ หนึ่ง

ให้ i เป็นฟังก์ชันจาก X ไป X

โดย $i(x) = x$

แล้ว i เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง X

นั่นคือฟังก์ชัน i แสดงได้ว่า $X \sim X$

ดังนั้น $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive)

---

2) สมมติ $X \sim X$

แล้ว $\exists f : X \to Y$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง Y

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จาก Y ไป X

และ f^{-1} เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง X

นั่นคือ f^{-1} แสดงได้ว่า $Y \sim X$

เพราะฉะนั้น $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมาตร

---

3) ให้ $X \sim Y$ และ $Y \sim Z$

แล้ว $\exists f : X \to Y$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ f ไปทั่วถึง Y

และ $\exists g : Y \to Z$, g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ g ไปทั่วถึง Z

แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน จาก X ไป Z

และ $g \circ f$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง Z

นั่นคือ $g \circ f$ แสดงได้ว่า $X \sim Z$

ดังนั้น $\sim$ เป็นไปตามคุณสมบัติถ่ายทอด

จากผลของ 1), 2) และ 3) แสดงว่า $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

F_3

ทฤษฎีบท 6.1.2

N เป็นการแจงนับเท่ากันกับ E เมื่อ $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$

พิสูจน์

กำหนด f เป็นฟังก์ชันจาก N ไป E โดย $f(n) = 2n$ แล้ว f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง (onto) E

ดังนั้น f แสดงได้ว่า $N \sim E$

ทฤษฎีบท 6.1.3

N เป็นการแจงนับเท่ากันกับ Z

พิสูจน์

$\forall n \in N$, ให้ $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ \frac{1-n}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

แสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{lllllll} N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots\ldots \\ g: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ Z = \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \ldots\ldots \end{array}$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันจาก N ไป Z

และ g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้ :

พิสูจน์

ถ้า $n \neq m$ จะมีถึง 4 กรณี :

1) n และ m ทั้งคู่เป็นเลขคู่ :

$n \neq m \Rightarrow \frac{n}{2} \neq \frac{m}{2} \Rightarrow g(n) \neq g(m)$

2) n และ m เป็นเลขคี่ทั้งคู่ :

$n \neq m \Rightarrow \frac{1-n}{2} \neq \frac{1-m}{2} \Rightarrow g(n) \neq g(m)$

3) n เป็นเลขคู่ และ m เป็นเลขคี่ :

แล้ว $\frac{n}{2} > 0$ และ $\frac{1-m}{2} \leqslant 0$

ดังนั้น $g(n) \neq g(m)$

4) n เป็นเลขคี่ และ m เป็นเลขคู่ :

แล้ว $\frac{1-m}{2} \leqslant 0$ และ $\frac{m}{2} > 0$

ดังนั้น $g(n) \neq g(m)$

จะเห็นว่าในทุก ๆ กรณี $g(n) \neq g(m)$

ดังนั้น g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

และ g ไปทั่วถึง Z :

พิสูจน์

ให้ $z \in Z$ **ดังนั้น** $z > 0$ **หรือ** $z \leqslant 0$

ถ้า $z > 0$ แล้ว $2z \in N$ และ $g(2z) = z$

ถ้า $z \leqslant 0$ แล้ว $1 - 2z \in N$ และ $g(1 - 2z) = z$

ดังนั้น g ไปทั่วถึง Z

นั่นคือ g แสดงได้ว่า $N \sim Z$

6.2 เซตจำกัดและเซตอนันต์ (Finite and Infinite sets)

F_1

นิยาม 6.2.1

A เป็นเซตจำกัด (finite) ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$ หรือ $\exists n \in N, \{1, 2, 3, \ldots, n\} \sim A$

นิยาม 6.2.2

A **เป็นเซตอนันต์** (infinite) ก็ต่อเมื่อ $\exists f : N \to A$, f **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง**

F_2

ทฤษฎีบท 6.2.1

A เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A ไม่เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์

$\Rightarrow$ ให้ A เป็นเซตอนันต์

แล้ว $\exists f : N \to A$, f **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง**

ต่อไปสมมติว่า A เป็นเซตจำกัด

ถ้า $A = \varnothing$ แล้ว $f : N \to A$ **จะไม่มี** (not exist) $\Rightarrow \Leftarrow$ ขัดแย้งกับ

ถ้า $A \neq \varnothing$ แล้ว $\exists n \in N, A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$

แล้ว $\exists g : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$, g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

และไปทั่วถึง $\{1, \ldots, n\}$

ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก N ไป $\{1, 2, \ldots, n\}$

และ $g \circ f$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่าทั้ง f และ g

เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ ....

สรุปได้ว่า A ไม่เป็นเซตจำกัด

$\Leftarrow$ ในทางกลับกัน สมมติให้ A ไม่เป็นเซตจำกัด

แล้ว ① $A \neq \varnothing$ และ ② $\forall n \in N, \{1, 2, \ldots, n\} \not\sim A$

จึงได้ $\exists x_1 \in A$ โดย ①

และ $A \neq \{x_1\}$ อีกนัยหนึ่ง $\{1\} \sim A$ ซึ่งขัดแย้งกับ ②

นั่นคือ $A - \{x_1\} \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้น $\exists x_2 \in A - \{x_1\}$

และ $A \neq \{x_1, x_2\}$ อีกนัยหนึ่ง $\{1, 2\} \sim A$

ซึ่งขัดแย้งกับ ②

ดังนั้น $A - \{x_1, x_2\} \neq \varnothing$

นั่นคือ $\exists x_3 \in A - \{x_1, x_2\}$

ถ้าเลือก $x_1, x_2, \ldots, x_n$

แล้ว $A \neq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

อีกนัยหนึ่ง $\{1, 2, \ldots, n\} \sim A$ ซึ่งขัดแย้งกับ ②

ดังนั้น $A - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \varnothing$

นั่นคือ $\exists x_{n+1} \in A - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สำหรับแต่ละ $n \in N$ มี $x_n \in A$ ซึ่ง $x_n \neq x_1, x_n \neq x_2, \ldots, x_n \neq x_{n-1}$

ต่อไป $\forall n \in N$ ให้ $g(n) = x_n$

แล้ว g เป็นฟังก์ชัน จาก N ไป A

และ g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือ g แสดงได้ว่า A เป็นอนันต์

6.3 ภาพ เซตย่อย และผลผนวกนับได้ของเซตนับได้

(Images, subsets, and countable unions of countable sets)

F_1

ทฤษฎีบท 6.3.1

ถ้า A เป็นอนันต์ แล้วมีเซตย่อยแท้ B ของ A ซึ่ง $A \sim B$

พิสูจน์

ถ้า A เป็นอนันต์

ดังนั้น $\exists f : N \to A$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $\{ f(1), f(2), f(3), \ldots \} \subseteq A$

ให้ $B = A - \{ f(1) \}$

แล้ว B เป็นเซตย่อยแท้ของ A

$\forall a \in A$ ให้ $g(a) = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \notin \{ f(1), f(2), \ldots \} \\ f(n+1) & \text{ถ้า } a = f(n) \end{cases}$

ดังนั้น $g : A \to B$ และ g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ g ไปทั่วถึง B

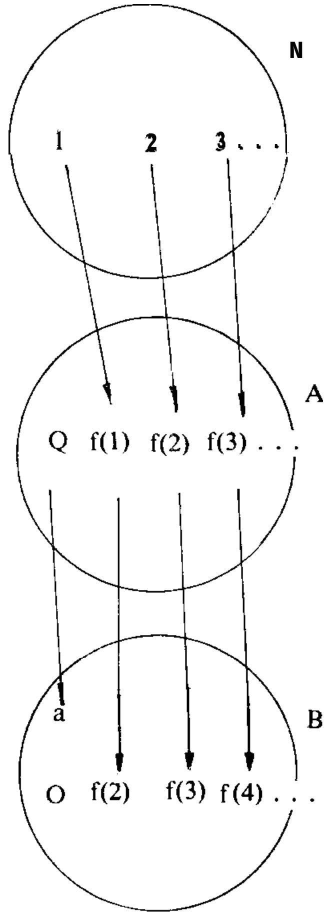
นั่นคือ $A \sim B$ #

หมายเหตุ

การพิสูจน์ของทฤษฎีนี้ แสดงด้วยรูปได้เป็น

....

....



F_2

บทกลับของทฤษฎี 6.3.1 สมเหตุสมผลด้วย กล่าวคือ : ถ้ามีเซตย่อยแท้ B ของ A ซึ่ง A ~ B แล้ว A เป็นอนันต์

F_3

ทฤษฎีบท 6.3.2

ถ้ามีเซตย่อยแท้ B ของ A ซึ่ง A ~ B แล้ว A เป็นอนันต์

พิสูจน์

B เป็นเซตย่อยแท้ของ A

นั่นคือ $\exists x, x \in A - B$

แต่ $A \sim B$

ดังนั้น $\exists f : A \to B$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

ถ้าให้ $f_1(x) = f(x)$

และ $\forall n \in N$, ให้ $f_{n+1}(x) = f\,(f_n(x))$

แล้ว $f_2(x) = f(f(x))$

และ $f_3(x) = f(f(f(x)))$, etc.

ต่อไปจะต้องแสดงให้ได้ว่า

$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$ เป็นอนันต์ :

ถ้า $n \neq m$ แล้ว $f_n(x) \neq f_m(x)$:

อีกนัยหนึ่ง ก็คือ :

$f_n(x) = f,(x)$ สำหรับ $n \not> m$

กล่าวคือ $m = n + d$

แล้ว $f_{n+d}(x) = f,,(x)$

และ $f_n\,(f_d(x)) = f_n(x)$

นั่นคือ $f_d(x) =$ x เพราะว่า f เป็น 1-1

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $x \notin B$

เพราะฉะนั้น $n \to f_n(x)$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือ $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$ เป็นอนันต์

F_4

สัจพจน์ที่เป็นอันดับดีแล้ว (Well-ordering Axiom) ทุก ๆ เซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ N ประกอบด้วยสมาชิกตัวที่น้อยที่สุด

ทฤษฎีบทประกอบ 6.3.1 (lemma 6.3.1)

เซตย่อยอนันต์ (infinite subset) ของ N เป็นการแจงนับเท่ากัน (equinumerous) กับ N

พิสูจน์

ให้ $B \subseteq N$ ซึ่ง B เป็นอนันต์

ดังนั้น B ไม่เป็นเซตจำกัด และ $B \neq \varnothing$

แล้ว B ประกอบด้วยสมาชิกที่เล็กที่สุด x_1

กำหนด f

$B - \{x_1\} \neq \varnothing$

แล้ว $B - \{x_1\}$ **ประกอบด้วยสมาชิกที่เล็กที่สุด** x_2

และ $B - \{x_1, x_2\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $B - \{x_1, x_2\}$ **ประกอบด้วยสมาชิกตัวที่เล็กที่สุด** x_3

ถ้าเลือก $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

แล้ว $B - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \varnothing$

ดังนั้น $B - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ประกอบด้วยสมาชิกตัวที่เล็กที่สุด x_{n+1}

เพราะฉะนั้น $\forall n \in N, \exists x_n \in B, x_n \notin \{x_1, x_2, \ldots x_{n+1}\}$

$\forall n \in N$, ให้ $f(n) = x_n$

แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก N ไป B

f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $n \in N$ และ $m \in N$ และถ้า $n \neq m$

กล่าวได้ว่า $n < m$ แล้ว $x_m \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+1}\}$

นั่นคือ $x_m \neq x_n$ ดังนั้น $f(m) \neq f(n)$

เพราะฉะนั้น f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

f ไปทั่วถึง B

ให้ $b \in B$

จะได้ $\{1, 2, \ldots, b\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $B \cap \{1, 2, \ldots, b\}$ เป็นเซตจำกัด

และ $\exists n_0 \in N, \{1, 2, \ldots, n_0\} \sim B \cap \{1, 2, \ldots, b\}$

จึงได้ $f(n_0) = b$

นั่นคือ f ไปทั่วถึง B

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f แสดงได้ว่า $B \sim N$

F_5

บทแทรก 6.3.1

ถ้า $A \sim N$ และถ้า B เป็นเซตย่อยอนันต์ของ A แล้ว $B \sim N$

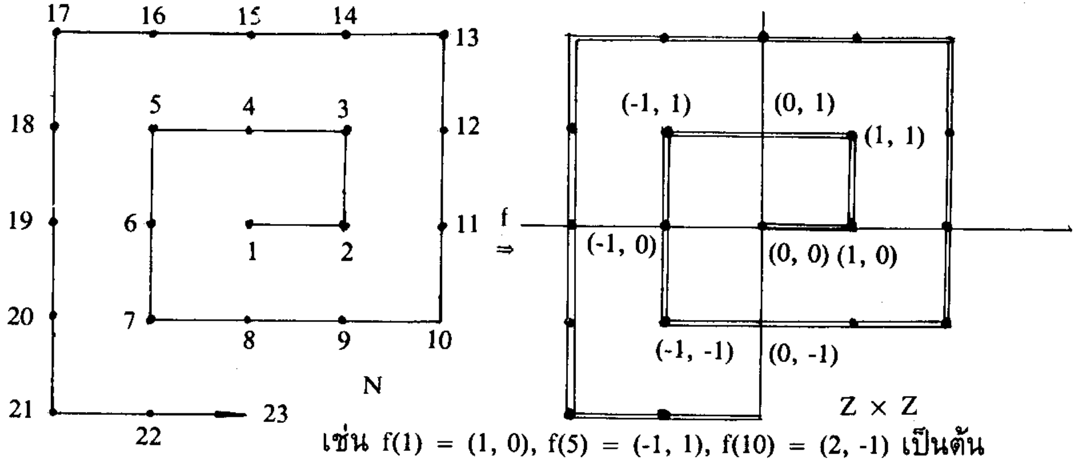
ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด

F6

ทฤษฎีบท 6.3.3

$$N \sim Z \times Z$$

กราฟทั้งสองข้างล่างนี้แสดงถึง f เป็นฟังก์ชันจาก N ไปยัง $Z \times Z$ ซึ่งเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและไปทั่วถึง $Z \times Z$



เช่น $f(1) = (1, 0)$, $f(5) = (-1, 1)$, $f(10) = (2, -1)$ เป็นต้น

F7

ทฤษฎีบท 6.3.4

$Q \sim N$

พิสูจน์

จำนวนตรรกยะทุกจำนวนอยู่ในรูป x/y (เศษส่วนอย่างต่ำ) เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบางจำนวน และ y เป็นจำนวนเต็มบวกบางจำนวน

ให้ q แทนเซตของคู่อันดับ (x, y)

ตัวอย่างเช่น จำนวนตรรกยะ $6/-15$ แทนด้วยคู่อันดับ $(-2, 5)$

ดังนั้น Q เป็นเซตย่อยของ $Z \times Z$ และ Q เป็นเซตอนันต์ด้วย

เพราะฉะนั้น $Z \times Z \sim N$

สรุปได้ว่า $Q \sim N$ (บทแทรก 6.3.1)

F8

ข้อสังเกต ได้แสดงให้เห็นแล้วว่าเซตอนันต์ต่อไปนี้เป็นการแจงนับเท่ากัน (equinumerous) กับ N : N, E, Z, $Z \times Z$, Q และ $N \times N$ จะแสดงให้เห็นว่ามีเซตอนันต์อีกมากมาย ซึ่งไม่แจงนับเท่ากันกับ N ตอนแรก จะแสดงว่า $(0, 1) = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ ไม่แจงนับกับ N

F_9

ความเป็นจริง (Fact)

จำนวนจริงทุกจำนวนที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 สามารถแทนด้วยทศนิยมไม่รู้จบ

ถ้า $x \in (0, 1)$ แล้ว $x = .d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$

เมื่อแต่ละ $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$

และถ้า $x = .d_1 d_2 d_3 \ldots d_k 999 \ldots$ เมื่อ $d_k \neq 9$

แล้ว $x = .d_1 d_2 \ldots (d_k + 1)000 \ldots$ ดังตัวอย่าง เช่น

$1/2 = .49999 \ldots$ และ $1/2 = .50000 \ldots$

F_{10}

ข้อโต้แย้งเรื่องเส้นทแยงมุมของคันตอร์[1] (Cantor's Diagonal Argument)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก N ไป (0, 1) แล้ว f **ไม่ไปทั่วถึง** (0, 1)

พิสูจน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ จาก N ไป (0, 1)

แล้ว $\{f(1), f(2), f(3), .\} \subseteq (0, 1)$

และ $f(1) = .d_1^1 d_2^1 d_3^1 d_4^1 \ldots \forall d_i \in \{0, 1, .., \mathbf{9}\}$ (ไม่จำเป็นจบลงถึง **9** ทั้งหมด)

$f(2) = .d_1^2 d_2^2 d_3^2 d_4^2, , .$ (ไม่จำเป็นจบลงถึง 9 ทั้งหมด)

$f(3) = d_1^3 d_2^3 d_3^3 d_4^3 \ldots$ (ไม่จำเป็นจบลงถึง 9 ทั้งหมด)

$f(4) = d_1^4 d_2^4 d_3^4 d_4^4 .$ (ไม่จำเป็นจบลงถึง 9 ทั้งหมด)

.

.

พิจารณาเส้นทแยงมุม $d_1^1 d_2^2 d_3^3 d_4^4 . \quad .$

ให้ $b = b_1 b_2 b_3 b_4 .$ เมื่อแต่ละ $b_i \in \{1, 2, \ldots, 7, 8\} - \{d_i^i\}$

อีกนัยหนึ่ง : $b_1 \neq d_1^1 \wedge b_1 \neq 0 \wedge b_1 \neq 9$

$b_2 \neq d_2^2 \wedge b_2 \neq 0 \wedge b_2 \neq 9$

---

(1) คันตอร์, เกออร์จ (Cantor, Georg) ค.ศ. 1845-1918 ชาวเยอรมนี

$b_3 \neq d_3^3 \wedge b_3 \neq 0 \wedge b_3 \neq 9$

$b_4 \neq d_4^4 \wedge b_4 \neq 0 \wedge b_4 \neq 9$

แล้ว $b \neq .0000\ldots$

และ $b \neq .9999\ldots$

นั่นคือ $b \in (0, 1)$

และ $\forall n \in N, f(n) \neq b$

เพราะฉะนั้น f ไม่ไปทั่วถึง (0, 1)

F_{11}

บทแทรก 6.3.2

N ไม่เป็นการแจงนับเท่ากันกับ (0, 1)

สัจพจน์

เซตของจำนวนจริง แจงนับเท่ากันกับเซตของจุดทุกจุดบนเส้นตรงใด ๆ ในปริภูมิยุคลิเดียน (Euclidean space)

F_{12}

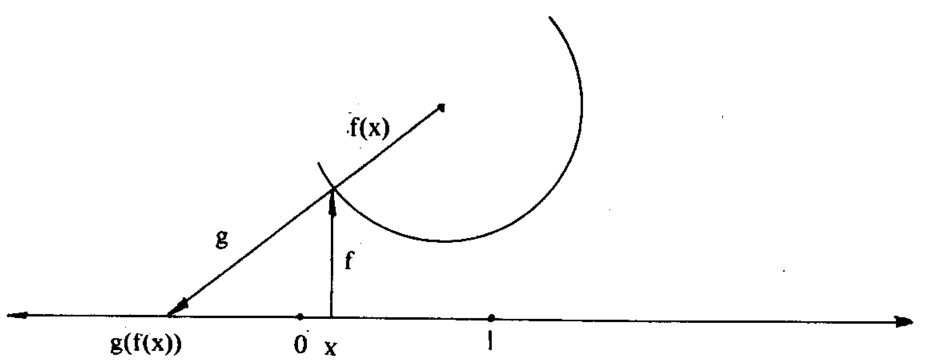
ทฤษฎีบท 6.3.5

(0, 1) แจงนับเท่ากันกับ R

พิสูจน์

ให้ f : (0, 1) → ครึ่งวงกลมดังรูป

ให้ g : ครึ่งวงกลม → R ดังรูป



ให้ $h = g \circ f$

แล้ว $h : (0, 1) \to R$

และ h เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

นอกจากนี้ h ไปทั่วถึง (onto) R

นั่นคือ $(0, 1) \sim R$

F_{13}

บทแทรก 6.3.3

N ไม่แจงนับเท่ากันกับ R

พิสูจน์

ให้ $N \sim R$

แต่ $R \sim (0, 1)$

สรุปได้ว่า $N \sim (0, 1)$ ซึ่งเกิดการขัดแย้ง นั่นคือ N ไม่แจงนับเท่ากันกับ R

6.4 ทฤษฎีเซตกำลังของคันตอร์ (Cantor's Power set Theorem)

F_1 **ข้อโต้แย้งเรื่องเซตกำลังของคันตอร์**

(Cantor's Power Set Argument)

ให้ A เป็นเซตใด ๆ

P(A) แทนกลุ่มของเซตย่อยทั้งหมดของ A

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป P(A) แล้ว f ไม่ไปทั่วถึง P(A)

พิสูจน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ จาก A ไป P(A)

ดังนั้น ถ้า $x \in A$ แล้ว $f(x) \subseteq A$

ให้ $E = \{ x \in A, x \in f(x) \}$

และ $N = \{ x \in A, x \notin f(x) \}$

แล้ว $A = N \cup E$ และ $N \cap E = \varnothing$

จึงได้ $N \subseteq A$ เพราะฉะนั้น $N \in P(A)$

ให้ f ไปทั่วถึง P(A)

ดังนั้น $\exists y \in A, f(y) = N$

จึงมี 2 กรณี : $y \in N$ หรือ $y \in E$

สมมติว่า $y \in N$

แล้ว $y \in f(y)$ เพราะว่า $N = f(y)$

และ $y \in E$ โดยนิยามของ E

นั่นคือ $y \notin N$ เพราะว่า $N \cap E = \varnothing$

นี่คือข้อขัดแย้ง (contradiction)

สมมติว่า $y \in E$

แล้ว $y \in f(y)$ โดยนิยามของ E

และ $y \in N$ เพราะว่า $N = f(y)$

และ $y \notin E$ เพราะว่า $N \cap E = \varnothing$

แต่ละกรณีนำไปสู่การขัดแย้ง

จึงสรุปได้ว่า f **ไม่**ไปทั่วถึง (onto) P(A)

F_2

บทแทรก 6.4.1

A ไม่เป็นการแจงนับเท่ากันกับ P(A)

หมายเหตุ

บทแทรกนี้แสดงว่าไม่มีลิมิตเกี่ยวกับ "ขนาด" ของเซต

6.5 นับได้น้อยกว่า (less numerous than)

F_1

ต่อไปนี้จะได้รู้จักกับแนวคิด (concept) ของ "นับได้น้อยกว่า" (less numerous than) เช่น "A นับได้น้อยกว่า P(A)" หรือ "P(A) นับได้น้อยกว่า P (P(A))" เป็นต้น

F_2

นิยาม 6.5.1

กล่าวว่า**เซต** A **นับได้น้อยกว่าเซต** B (A is less numerous than set B) ก็ต่อเมื่อ A เป็นการแจงนับเท่ากันกับเซตย่อยของ B แต่ A ไม่เป็นการแจงนับเท่ากันกับ B

ให้ $A \prec B$ แทน A นับได้น้อยกว่า B

F_3

ทฤษฎีบท 6.5.1

N นับได้น้อยกว่า R

พิสูจน์

กำหนด i เป็นฟังก์ชัน จาก N ไป R โดย $i(n) = n$

แสดงว่า i เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือ N เป็นการแจงนับเท่ากันกับ i(N)

และ $i(N) \subseteq R$

แต่ $N \not\sim R$ โดยการพิสูจน์เรื่องเส้นทแยงมุมของคันตอร์ (Cantor's Diagonal Proof)

สรุปได้ว่า $N \prec R$

F_4

ทฤษฎีบท 6.5.2

ให้ A เป็นเซตใด ๆ แล้ว A นับได้น้อยกว่า P(A)

พิสูจน์

กำหนด f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป P(A) โดย $f(x) = x$

แล้ว f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

นั่นคือ A เป็นการแจงนับเท่ากันกับ f(A)

และ $f(A) \subseteq P(A)$

แต่ $A \not\sim P(A)$ โดยข้อโต้แย้งเรื่องเซตกำลังของคันตอร์ (Cantor's Power set Argument)

สรุปได้ว่า $A \prec P(A)$

F_5

นิยาม 6.5.2

ให้ $A \preceq B$ แทน $A \prec B$ หรือ $A \sim B$

F_6

ทฤษฎีบท 6.5.3

1) $\prec$ เป็นการถ่ายทอด (transitive) :

ถ้า $A \prec B$ และ $B \prec C$ แล้ว $A \prec C$

2) $\prec$ เป็นปฏิสมมาตร (anti-symmetric) :

ถ้า $A \prec B$ แล้ว $B \not\prec A$

3) $\prec$ เป็นการเปรียบเทียบ (comparing)

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใด ๆ จะได้ว่า $A \prec B$ **หรือ** $A \sim B$ **หรือ** $B \prec A$

F_7

วางนัยทั่วไปของภาวะต่อเนื่องสมมุติฐาน (Generalized Continuum Hypothesis)

ให้ S เป็นเซตใด ๆ

P(S) เป็นเซตกำลังของ S **ไม่มีเซต** T **ซึ่ง** $S \prec T$ และ $T \prec P(S)$

หมายเหตุ

คันตอร์ (Cantor) เคยเดา (conjectured) ว่า **ไม่มีเซต** S **ซึ่ง** $N \prec S \prec R$ **แต่แล้วเขา**สามารถแสดงได้ว่า $P(N) \sim R$

6.6 **เซตนับได้** (Countable Sets) **และเซตนับไม่ได้** (Uncountable Sets)

F_1

นิยาม 6.6.1

กล่าวว่าเซต A เป็น**เซตที่นับได้** (countable) ก็ต่อเมื่อ $A \preceq N$

นั่นคือ A นับได้ ก็ต่อเมื่อ $\exists f : A \to N$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อสังเกต

เซตจำกัดทั้งหมดเป็นเซตนับได้ และเซตที่แจงนับเท่ากัน (equinumerous) กับ N ทั้งหมด ก็เป็นเซตนับได้ และกล่าวได้ว่า A **เป็นเซตนับไม่ได้** (uncountable) **ก็ต่อเมื่อ** A **ไม่เป็นเซตนับได้**

นั่นคือ A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ $N \prec A$ ตัวอย่างเช่น R เป็นเซตนับไม่ได้

F_2

แผนภาพข้างล่างนี้แสดงถึงความสัมพันธ์อย่างย่อของเซต

เซตนับได้ เซตนับไม่ได้

อนันต์แบบนับได้

(The Denumerable Sets)

เซตจำกัด

$\varnothing \prec \{1\} \prec \{1, 2\} \prec \ldots$

$\wr \qquad \wr \qquad \wr$

$\{\ \} \qquad \{\varnothing\} \qquad \{\Delta, 0\}$

$\wr \qquad \wr \qquad \wr$

เซตอนันต์

$N \prec P(N) \prec P(P(N)) \prec \ldots$

$\wr \qquad \wr \qquad \wr$

$Z \qquad R$

$\wr \qquad \wr$

$Q \qquad (0, 1)$

$\wr \qquad \wr$

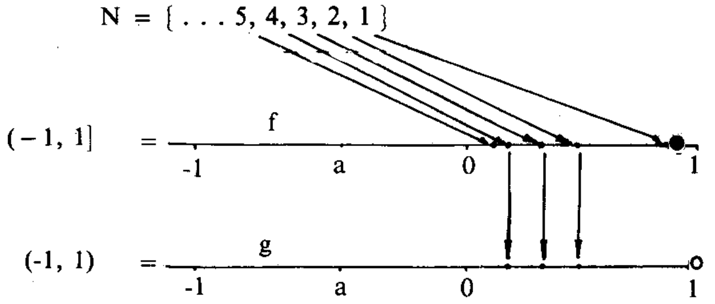
$\cdot \qquad \cdot$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $(-1, 1] = \{x \in R : -1 < x \leqslant 1\}$ และ

   $(-1, 1) = \{x \in R : -1 < x < 1\}, \forall n \in N$

   ให้ $f(n) = \frac{1}{n}$ แล้ว



   เมื่อ $g(a) = a$ ถ้า $a \notin \{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ และเมื่อ $g(a) = 1/n+1$ ถ้า $a = 1/n$ และ $n \in N$ จงแสดงว่า g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง (-1, 1) สรุปได้ว่า (-1, 1] แจงนับเท่ากัน (equinumerous) กับ (-1, 1)

2. จะใช้บทกลับทฤษฎีบท 6.5 พิสูจน์ว่าเซต R ทั้งหมดเป็นอนันต์ได้อย่างไร

3. จงพิสูจน์ว่า $N \times N \sim N$