บทที่ 5
ฟังก์ชัน
(Functions)

5.1 ฟังก์ชัน

F_1

ให้ A และ B เป็น**ฟังก์ชันจาก** A **ไป** B (function from A into B) ก็ต่อเมื่อ

(1) $f \subset A \times B$

และ (2) $dom(f) = A$

และ (3) $[(s, t) \in f \wedge (u, v) \in f \wedge s = u] \to t = v$

F_2

ให้ "$f : A \to B$" แทน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

สัญลักษณ์ $\to$ ในขณะนี้ใช้ในความหมาย 2 ทางด้วยกัน ทางแรกแทนประโยคเงื่อนไข ทางที่สองใช้ในการกล่าวว่าสิ่งของบางสิ่งเป็นฟังก์ชัน

สังเกต เงื่อนไข (จาก F_1) ที่ (1) กล่าวว่า **ทุก ๆ ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์** และสังเกตได้ว่าตัวบ่งปริมาณของเงื่อนไขที่ (3) คือ $\forall s, \forall t, \forall u, \forall v, (\ldots \to \ldots)$

F_3

ข้อความแย้งสลับที่ของ F_1 คือ : f **ไม่**เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

(1)′ $f \not\subset A \times B$

หรือ (2)′ $dom(f) \neq A$

หรือ (3)′ $\exists s, \exists t, \exists u, \exists v, \ (s, t) \in f \ \wedge \ (u, v) \in f \ \wedge \ s = u \ \wedge \ t \neq v$

F_4

ให้ $f : A \rightarrow B$, y **เป็นภาพของ** x **ภายใต้** f (the image of x under f) ก็ต่อเมื่อ $(x, y) \in f$

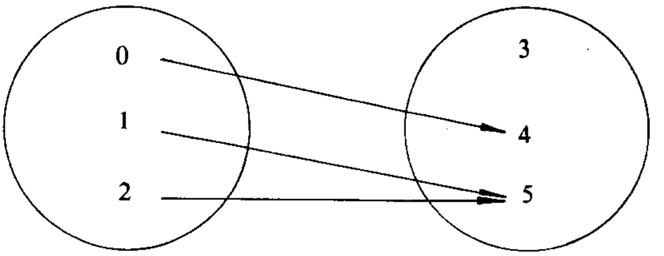
ให้ "$y = f(x)$" แทน y เป็นภาพของ x ภายใต้ f

ดังนั้น $y \neq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $(x, y) \notin f$

F_5

สามารถนิยามฟังก์ชันโดยกำหนดขบวนการหรือโครงการซึ่งแสดงว่า ทุก ๆ สมาชิกของเซต A จับคู่กับเพียงหนึ่งสมาชิกกับเซต B

ดังเช่น กลุ่มของลูกศรในแผนภาพต่อไปนี้ กำหนดฟังก์ชัน f จาก เซต $\{0, 1, 2\}$ ไปยังเซต $\{3, 4, 5\}$ ดังนี้



ในกรณีนี้ $f = \{(0, 4), (1, 5), (2, 5)\}$

F_6

อีกตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน

พิจารณาข้อความ "g(x) เท่ากับ 4 บวกด้วยผลคูณของ x กับ x"

ข้อความที่ได้กำหนดฟังก์ชัน จาก R ไป R ในกรณีนี้ $(x, y) \in g$ ก็ต่อเมื่อ $y = 4 + x^2$

F_7

ตัวอย่าง 5.1.1

ให้ $A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$\alpha = \{(0, 2), (1, 3)\}$

$\beta = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

$\gamma = \{(0, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$

$\delta = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$

แล้ว α **ไม่**เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะว่า $\mathrm{dom}(\alpha) \neq A$

β **ไม่**เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะว่า $B \not\subset A \times B$

γ **ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะว่า** $(1, 3) \in \gamma$ **และ** $(1, 4) \in \gamma$ **และ** $1 = 1$ **แต่**

$4 \neq 3$

ส่วน δ **เป็น** ฟังก์ชันจาก A ไป B จะเห็นว่า $\delta(0) = \delta(1) = \delta(2) = 2$

แบบฝึกหัด 5.1

1. สมมติว่า $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ และ $f = \{(0, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ จงให้เหตุผล 3 ข้อที่แตกต่างกันว่าทำไม f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

   1) ....

   2) ....

   3) ....

2. ถ้า A มี m สมาชิก และ B มีเพียง n สมาชิก แล้วมีฟังก์ชันที่แตกต่างกันจาก A ไป B กี่ฟังก์ชัน ....

   $h : A \to B$ เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) ก็ต่อเมื่อ $\exists b \in B, \ \forall a \in A, \ h(a) = b$ มีฟังก์ชันคงที่จาก A ไป B กี่ฟังก์ชัน..

3. สำหรับแต่ละ $x \in R$ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงเขียนกราฟ f ทำไม f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R

4. ให้ $g = ((x, y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 16\}$ จงเขียนกราฟ g จงให้เหตุผล 2 ข้อที่แตกต่างกันว่าทำไม g ไม่เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R

5. ให้ $h = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x^2 = y^2\}$ จงเขียนกราฟ h ทำไม h ไม่ เป็นฟังก์ชัน จาก **R** ไป **R**

6. ให้ $A = \{x \in R : -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ สำหรับแต่ละ $t \in R$ ให้ $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \in A \\ 0 & \text{ถ้า } t \notin A \end{cases}$

   จงเขียนกราฟ f, f เป็นฟังก์ชันจาก **R** ไป $\{0, 1\}$ หรือไม่

7. สมมติ $f : A \to B$ และ $g : C \to D$

   ให้ $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } x \in A \\ g(x) & \text{ถ้า } x \in c \end{cases}$

   ภายใต้เงื่อนไขใดที่ h จะเป็นฟังก์ชัน จาก $A \cup C$ ไป $B \cup D$

8. ให้ $j = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ แล้ว

   $j : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

$k = \{(x, x+1) : x \in \{1, 2, 3\}\}$ แล้ว

$K : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4, 5\}$

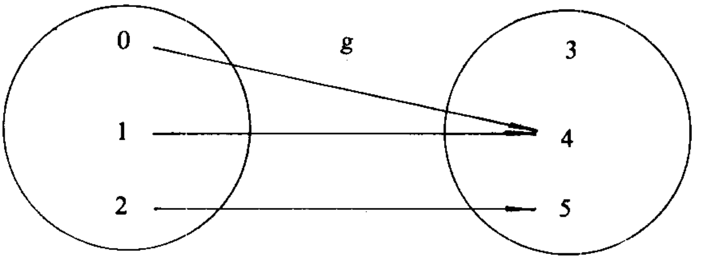
j เท่ากับ k หรือไม่ ทำไม ....

9. ให้ $\ell = \{(x, y) \in R \times R : y = \frac{(x-1)^2}{x-1}\}$

ให้ $m = \{(x, y) \in R \times R : y = x-1\}$

จงพิสูจน์ว่า $\ell \neq m$

10. ให้ $g : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$ กำหนดโดย



ให้ $f : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$

9.1 $\{x : g(x) = 4\}$ = ...

9.2 $\{x : g(x) = 3\}$ = ...

9.3 $\{g(x) : x \in \{1, 2\}\}$ = ...

9.4 $\{x \in R : f(x) = 16\}$ = ...

9.5 $\{x \in R : f(x) = -1\}$ = ...

9.6 $\{f(x) : 0 < x < 3\}$ = ...

9.7 $\{x \in R : f(x) > 4\}$ = ...

9.8 $\{x \in R : f(x) < 0\}$ = ...

9.9 $\{x \in R : \exists a \in R, f(a) = x\}$ = ...

9.10 $\{x \in \{3, 4, 5\} : \exists a \in \{0, 1, 2\}, g(a) = x\}$ = ...

....

5.2 **การเท่ากันของฟังก์ชัน** (Equality of Functions)

F_1

อย่าลืมฟังก์ชันเป็นเซต (ของคู่อันดับ) ดังนั้นในการพิสูจน์ว่าสองฟังก์ชันเท่ากันกระทำได้วิธีหนึ่งคือ พิสูจน์ให้เซตสองเซตเท่ากัน ทฤษฎีต่อไปนี้แสดงถึงการเท่ากันของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เป็นอีกวิธีหนึ่งที่นอกเหนือจากการเท่ากันของเซต

F_2

ทฤษฎี 5.1.1

ให้ $f : A \to B$ และให้ $g : C \to D$, $f = g$ ก็ต่อเมื่อ

1) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$

และ 2) $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$

พิสูจน์

$\Rightarrow$ 1) สมมติว่า $f = g$

และให้ $x \in \mathrm{dom}(f)$

และ $\exists y, (x, y) \in f$ (นิยามของโดเมน)

ดังนั้น $\exists y, (x, y) \in g$ (กำหนดให้ $f = g$)

แล้ว $x \in \mathrm{dom}(g)$ (นิยามของโดเมน)

ดังนั้น $x \in \mathrm{dom}(f) \to x \in \mathrm{dom}(g)$

หมายเหตุ ข้อโต้แย้งข้างบนนี้ยังคงสมเหตุสมผล (valid) แม้ว่า f กับ g สลับที่กัน หรือกล่าวว่า ข้อโต้แย้งนี้เป็นไปตามคุณสมบัติการสมมาตร มุ่งต่อ f และ g

นั่นคือ :

การสมมาตรสอดคล้องกับ

$x \in \mathrm{dom}(g) \to x \in \mathrm{dom}(f)$

สรุปได้ว่า $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ (นิยามการเท่ากันของเซต)

$\Rightarrow$ 2) สมมติ ให้ $f = g$ อีกครั้ง

ให้ $x \in dom(f)$

แล้ว $x \in dom(g)$ (เพราะว่า $dom(f) = dom(g)$ โดยข้อโต้แย้งข้างบน)

1. $\exists y_1, (x, y_1) \in f$ (นิยามของโดเมน)

$\exists y_2, (x, y_2) \in g$ (นิยามของโดเมน)

3. แล้ว $y_1 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ (นิยามของภาพของ x)

2. แต่ $(x, y_2) \in f$ (เพราะว่า $f = g$ ตามกำหนดให้)

ดังนั้น $y_1 = y_2$ (จาก 1, 2, $\because$ f เป็นฟังก์ชัน)

จึงได้ $f(x) = g(x)$ (จาก 3)

เพราะฉะนั้น $\forall x \in dom(f), f(x) = g(x)$

$\Leftarrow$ สมมติว่า $dom(f) = dom(g) = A$

3. และสมมติให้ $\forall x \in A, f(x) = g(x)$

1. ถ้า $(s, t) \in f$

แล้ว $s \in dom(f)$ (นิยามของโดเมน)

และ $s \in dom(g)$

เพราะฉะนั้น $dom(f) = dom(g)$ (กำหนดให้)

2. ดังนั้น $\exists u, (s, u) \in g$ (นิยามของโดเมน)

และ $t = f(s), u = g(s)$ (จาก 1, 2 และนิยามของภาพของ s)

แต่ $f(s) = g(s)$ ($s \in A$ และจาก 3)

ดังนั้น $(s, t) \in g$ (จาก 2)

นั่นคือ $(s, t) \in f \rightarrow (s, t) \in g$

สอดคล้องกับการสมมาตร $(s, t) \in g \rightarrow (s, t) \in f$

เพราะฉะนั้น $f = g$ (นิยามการเท่ากันของเซต)

F_3

จากทฤษฎี ใน F_2 แสดงว่า สามารถกำหนด (นิยาม) ฟังก์ชันได้อย่างสมบูรณ์ ด้วยโดเมน และภาพ (image) ของสมาชิกของโดเมนของมัน

ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 5.1.1 ก็เป็นจริง และใช้ประโยชน์ในการตัดสินว่าฟังก์ชันสองฟังก์ชันไม่เท่ากันได้ กล่าวคือ :

ให้ $f : A \to B, g : C \to D, f \neq g$ ก็ต่อเมื่อ $A \neq C$ หรือ ถ้า $A = C$ แล้ว $\exists x \in A, f(x) \neq g(x)$.

แบบฝึกหัด 5.2

1. ให้ $A \subset R$ สำหรับ $x \in R$ ให้ $X_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } x \in A \\ 0 \text{ ถ้า } x \notin A \end{cases}$

แล้ว dom X_A = ... และ rng X_A = ...

ถ้า $A = \{ x \in R : -1 \leqslant x \leqslant 2 \}$ แล้วกราฟของ X_A คืออะไร

2. จากแคลคูลัสทราบว่า ถ้า $f : C \rightarrow R$ และถ้า $g : C \rightarrow R$ แล้ว $(f.g) : C \rightarrow R$ และ $(f.g)(x)$ $= f(x)\, g(x)$

2.1 สมมติ $\forall x \in R$, $f(X) = x^2$ และ $g(x) = 2x + 1$

แล้ว $(f.g)(x)$ = ...

2.2 ให้ $A = \{ x \in R : -1 \leqslant x \leqslant 2 \}$

ให้ $B = \{ x \in R : 1 \leqslant x \leqslant 4 \}$

จงเขียนกราฟ X_A X_B

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $C \subset R$ และ $D \subset R$ แล้ว $X_{C \cap D} = X_C . X_D$

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $S \neq T$ แล้ว $X_S \neq X_T$

5.3 ฟังก์ชันประกอบ

(Composition of Functions)

F_1

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และให้ g เป็นฟังก์ชันจาก C ไป D กล่าวว่า g **ประกอบกับ** f (g composes with f) ก็ต่อเมื่อ $rng(f) \subset dom(g)$

g ประกอบกับ f เป็นฟังก์ชัน (แทนด้วย $g \circ f$) จาก A ไป D โดย :

1) $dom(g \circ f) = dom(f)$

และ 2) $\forall x \in dom(f), (g \circ f)(x) = g(f(x))$ ฟังก์ชันนี้เรียกว่า**ฟังก์ชันประกอบของ** g **กับ** f และ $rng(g \circ f) \subset rng(g)$

F_2

ตัวอย่าง 5.3.1

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

$C = \{a, b, c, d\}$

$D = \{x, y, z\}$

$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$

และ $g = \{(a, x), (b, y), (c, z), (d, x)\}$

แล้ว $f : A \to B$ และ $g : C \to D$

และ $rng(f) \subset dom(g)$

เพราะว่า $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

(หมายเหตุ$[g \circ f](1) = g[f(1)] = g(a) = x$ เพราะฉะนั้น$[g \circ f](1) = x$ ดังนั้น $(1, x) \in (g \circ f)$

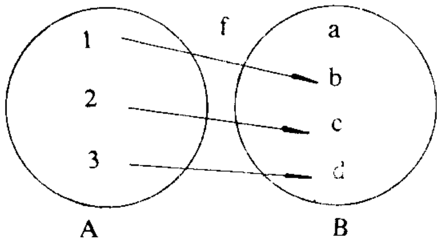
ข้อสังเกต

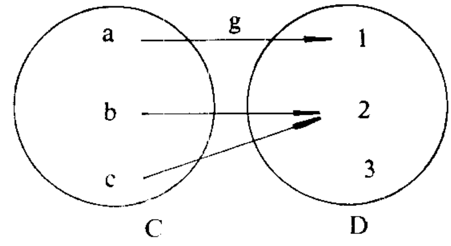
f ไม่ประกอบกับ g เพราะว่า $rng(g) = \{x, y\ z\} \not\subset \{1, 2, 3\} = dom(f)$

F_3

ตัวอย่าง 5.3.2

ให้ $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ กำหนดโดย

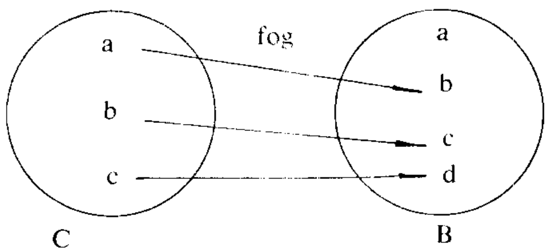




แล้ว g **ไม่**ประกอบกับ f เพราะว่า $rng(f) \not\subset dom(g)$, ($d \in rng(f)$ แต่ $d \notin dom(g)$)

แต่ f ประกอบกับ g เพราะว่า $rng(g) = \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} = dom(f)$

ดังนั้น $f \circ g : C \to B$ และกำหนดโดย



F_4

ตัวอย่าง 5.3.3

ให้ $f : N \to R$ กำหนดโดย $f(n) = \frac{1}{n}$

และ ให้ $g : R \to R$ กำหนดโดย $g(x) = x^2 - 2$

แล้ว g ประกอบกับ f เพราะ ....(1)..........

และ $g \circ f : N \to R$ กำหนดโดย $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{n^2} - 2$

ดังนั้น $(g \circ f)(n) = \frac{1}{n^2} - 2$ สำหรับแต่ละ $n \in N$ จะเห็นว่า f **ไม่**ประกอบกับ g เพราะ

(2) ....

(1) $rng(f) \subset dom(g)$

(2) $rng(g) \not\subset dom(f)$

F_5

ตัวอย่าง 5.3.4

ให้ $f : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = 3x + 1$ และ $g : R \to R$ กำหนดโดย $g(x) = x^2$ แล้วทั้ง-

g ประกอบกับ f และ f ประกอบกับ g, $g \circ f : R \to R$ กำหนดโดย

$$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = (3x + 1)^2$$

และ $f \circ g : R \to R$ กำหนดโดย

$$[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 + 1$$

แล้ว $f \circ g = g \circ f$ เพราะ ....

$\mathrm{Rng}(f) \subset \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{Rng}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$

แบบฝึกหัด 5.3

1 . $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$

$g = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

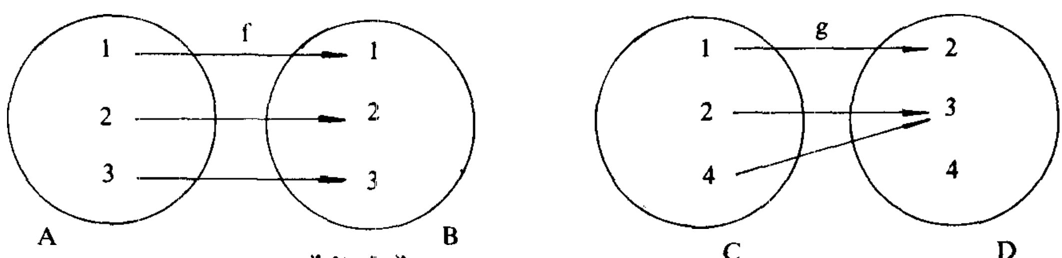
1.1 g ประกอบกับ f ได้หรือไม่ .... ทำไมจึงได้ หรือทำไมจึงไม่ได้ ....

ถ้าได้ จงหา $g \circ f$ ....

1.2 f ประกอบกับ g ได้หรือไม่ .... ทำไมจึงได้ หรือทำไมจึงไม่ได้ ....

ถ้าได้ จงหา $f \circ g$

2. ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : C \rightarrow D$ กำหนดโดย :



2.1 g ประกอบกับ f ได้หรือไม่.................................. ....

ทำไมจึงได้ หรือทำไมจึงไม่ได้..

ถ้าได้ จงหา $g \circ f$: ....

2.2 f ประกอบกับ g ได้หรือไม่.. ทำไมจึงได้หรือทำไมจึงไม่ได้..

ถ้าได้ จงหา $f \circ g$: ....

3. สมมติว่า $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ และ $h : C \rightarrow D$

3.1 ทำไม g ประกอบกับ f ได้

3.2 h ประกอบกับ $g \circ f$ ได้หรือไม่

3.3 $\mathrm{dom}[\, h \circ (g \circ f)\,]$ คืออะไร

3.4 ทำไม h ประกอบกับ g ได้

3.5 hog ประกอบกับ f ได้หรือไม่

3.6 dom [$(h \circ g) \circ f$] คืออะไร

3.7 จงพิสูจน์ว่า $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (ใช้ทฤษฎีการเท่ากันของฟังก์ชัน)

4. ให้ $f : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = -x$

$g : R \to R$ กำหนดโดย $g(x) = 2^x$

$h : R \to R$ กำหนดโดย $h(x) = \log_2 x$

จงหา :

4.1 $f \circ f$

4.2 $f \circ g$

4.3 $g \circ f$

4.4 $g \circ h$

4.5 $h \circ g$

4.6 กราฟของ f

4.7 กราฟของ g

4.8 กราฟของ h

4.9 กราฟของ $f \circ g$

4.10 กราฟของ $g \circ f$

4.11 กราฟของ $f \circ f$

4.12 กราฟของ $g \circ h$

5.4 **ภาพของเซต** (The Image of a set)

F_1

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B, $\overline{X} \subset A$ **ภาพของ** $\overline{X}$ **ภายใต้** f คือเซตย่อยของ B แทนด้วย $f(\overline{X})$ และกำหนดโดย $y \in f(\overline{X})$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x, x \in \overline{X} \wedge f(x) = y$

ดังนั้น $f(\overline{X}) = \{ f(x) : x \in \overline{X} \}$

ข้อสังเกต

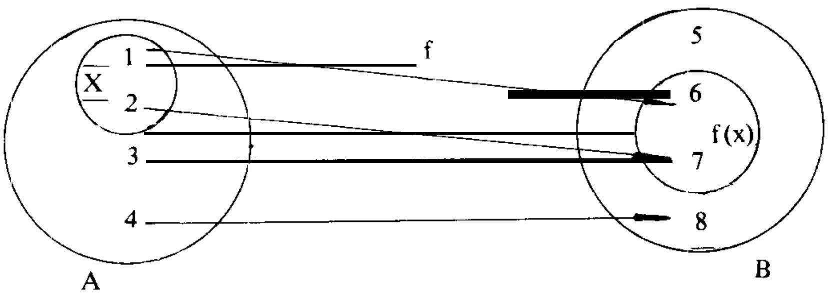
$\overline{X} \subset A$ ในขณะที่ $f(\overline{X}) \subset B$

ข้อความแย้งสลับที่ (contraposition) : $y \notin f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in \overline{X}, f(x) \neq y$

F_2

ตัวอย่าง 5.4.1

พิจารณาฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย



ให้ $\overline{X} = \{1, 2\}$ แล้ว $6 \in f(\overline{X})$

เพราะว่า $\exists x \in \overline{X}$ (คือ 1) $f(x) = 6$

$7 \in f(\overline{X})$ ด้วย เพราะว่า $7 = f(x)$ สำหรับบาง $x \in \overline{X}$ (คือ 2)

แต่ $8 \notin f(\overline{X})$ เพราะว่า $\forall x \in \overline{X}, f(x) \neq 8$

ในทำนองเดียวกัน $5 \notin f(\overline{X})$

ถ้าให้ $\overline{Y} = \{3, 4\}$ แล้ว $f(\overline{Y}) = \{ f(3), f(4) \} = \{7, 8\}$

F_3

จะเห็นความแตกต่างระหว่างภาพของ $f(\overline{X})$ ของเซต $\overline{X}$ กับภาพ f(x) ของสมาชิก x ดังตัวอย่างใน F_2 ข้างบนนี้ จะเห็นว่า

$f(\{1\}) = \{6\}$ ในขณะที่ $f(1) = 6$

ดังนั้น $f(\{1\}) \neq f(1)$

จากตัวอย่าง 5.4.1

$f(A) = \{ f(1), f(2), f(3), f(4) \} = \{ 6, 7, 8 \}$

ดังนั้น $f(A) = rng(f)$

จะเป็นจริงสำหรับทุกฟังก์ชัน f หรือไม่ที่ $f(dom(f)) = rng(f)$

F_4

ทฤษฎีบท 5.4.1

ให้ $f : A \to B$ แล้ว $f(A) = rng(f)$

พิสูจน์

ให้ $y \in rng(f)$

1. แล้ว $\exists x, (x, y) \in f$ (นิยามของเรนจ์)
2. แต่ $(x, y) \in f$ แสดงว่า $x \in dom(f) = A$ (นิยามของโดเมน)

ดังนั้น $\exists x, x \in A \wedge (x, y) \in f$ (จาก 1, 2)

แล้ว $\exists x, x \in A \wedge y = f(x)$ (นิยามของภาพของ x)

ดังนั้น $y \in f(A)$ (นิยามของภาพของ A)

เพราะฉะนั้น $y \in rng(f) \to y \in f(A)$

ส่วนที่เหลือของการพิสูจน์ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

F_5

จากตัวอย่าง 5.4.1 จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
f(\{ 1, 2, \} \cup \{ 3, 4 \}) &= f(\{ 1, 2, 3, 4 \}) \\
&= \{ f(1), f(2), f(3), f(4) \} \\
&= \{ 6, 7, 8 \} \\
&= \{ 6, 7 \} \cup \{ 7, 8 \} \\
&= f(\{ 1, 2 \}) \cup f(\{ 3, 4 \})
\end{aligned}
$$

และ $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ เป็นจริงเสมอ

ขอให้สังเกต จะเห็นว่า $f(\{ 2, 3 \} \cap \{ 3, 4 \}) = f(\{ 3 \})$

$= \{7\}$

$= \{7\} \cap \{7, 8\}$

$= f(\{2, 3\}) \cap f(\{3, 4\})$

และ $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ เป็น ....

จริงเสมอ

F_6

ทฤษฎีบท 5.4.2

สมมติว่า $f : A \rightarrow B$ และ $S \subset A$, $T \subset A$ แล้ว

1) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

2) $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

พิสูจน์ ของ 1)

สมมติว่า $y \in f(S \cup T)$

แล้ว $\exists x, x \in S \cup T$ และ $f(x) = y$

(นิยามของ f( ))

ดังนั้น $\exists x, (x \in S \vee x \in T) \wedge f(x) = y$

(โดยนิยามของ $\cup$)

และ $\exists x, (x \in S \wedge f(x) = y) \vee (x \in T \wedge f(x) = y)$

(กฎการกระจายของตรรกศาสตร์)

ดังนั้น $(\exists x, x \in S \wedge f(x) = y) \vee (\exists x, x \in T \wedge f(x) = y)$

(ทฤษฎีบทที่ 28 ของตรรกศาสตร์)

$\therefore y \in f(S) \vee y \in f(T)$ (โดยนิยามของ f( ))

$\therefore y \in f(S) \cup f(T)$ (นิยามของ $\cup$)

(A) **เพราะฉะนั้น** $y \in f(S \cup T) \rightarrow y \in f(S) \cup f(T)$

สมมติว่า $y \in f(S) \cup f(T)$

แล้ว $y \in f(S) \vee y \in f(T)$ (โดย ..... (1) ....)

ดังนั้น $(\exists x, x \in S \wedge f(x) = y) \vee (\exists x, x \in T \wedge f(x) = y)$

(โดย.................... (2) ....)

$\therefore\ \exists x, (x \in S \land f(x) = y) \lor \backslash x|(x \in T \land f(x) = y)$

(โดย ....(3)........................)

ดังนั้น $\exists x, (x \in S \lor x \in T) \land f(x) = y$

(โดย ....(4)........................)

$\therefore\ \exists x, x \in S \cup T \land f(x) = y$ (โดย ....(5)........................)

ได้ $y \in f(S \cup T)$ (โดย ....(6)........................)

Ⓑ **เพราะฉะนั้น** $y \in f(S) \cup f(T) \rightarrow y \in f(S \cup T)$

สรุปได้ว่า $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ (โดย ....(7)........................)

พิสูจน์ตอน 2)

สมมติว่า $y \in f(S \cap T)$

แล้ว $\exists x, x \in S \cap T \land f(x) = y$ **โดย** ....(8)........................)

และ $\exists x, (x \in S \land x \in T) \land f(x) = y$

(โดย ....(9)........................)

นั่นคือ $\exists x, (x \in S \land f(x) = y) \land (x \in T \land f(x) = y)$

(โดย $P \Rightarrow P \land P$)

ดังนั้น $(\exists x, x \in S \land f(x) = y) \land (\exists x, x \in T \land f(x) = y)$

(โดย ....(10)........................)

$\therefore\ y \in f(S) \land y \in f(T)$ (โดย ....(11)........................)

ดังนั้น $y \in f(S) \cap f(T)$ (โดย ....(12)........................)

Ⓒ **เพราะฉะนั้น** $y \in f(S \cap T) \rightarrow y \in f(S) \cap f(T)$

สรุปได้ว่า $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

(โดย ....(13)........................)

---

(1) นิยามของผลผนวก (union)

(2) นิยามของภาพของเซต

(3) สมเหตุสมผล (valid)

(4) กฎการกระจาย

(5) นิยามของผลผนวก

(6) นิยามของภาพของเซต

(7) จาก Ⓐ และ Ⓑ

(8) นิยามของภาพ

(9) นิยามของผลตัด ($\cap$)

(10) สมเหตุสมผล

(11) นิยามของภาพ

(12) นิยามของผลตัด

(13) นิยามของเซตย่อย

F_7

สังเกตขั้นตอนต่าง ๆ ในการพิสูจน์ของ Ⓑ เช่นเดียวกับขั้นตอนต่าง ๆ ในการพิสูจน์ของ Ⓐ ยกเว้นเรื่องลำดับจะผันกลับ ในกรณีนี้กล่าวได้ว่า การพิสูจน์ใน Ⓐ ผันกลับ (reverses) กับการพิสูจน์ใน Ⓑ

สำหรับการพิสูจน์ใน Ⓒ สามารถผันกลับการพิสูจน์ได้ : $y \in f(S) \cap f(T) \rightarrow y \in f(S \cap T)$

การพิสูจน์ตอน 2) ของทฤษฎี จะเปลี่ยนเป็นการเท่ากันไม่ได้

F_8

ทฤษฎีบท 5.4.3

สมมติว่า $f : A \rightarrow B$, $S \subset A$ และ $T \subset A$ ถ้า $S \subset T$ แล้ว $f(S) \subset f(T)$

พิสูจน์ (ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

F_9

ทฤษฎีบท 5.4.4

สมมติว่า $f : A \rightarrow B$ และ $S \subset A$, $T \subset A$ ถ้า $f(S) \cap f(T) = \varnothing$ แล้ว $s \cap T = 0$

พิสูจน์ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

สมมติว่า $s \cap T \neq 0$

1) แล้ว $\exists x, x \in S \cap T$ (โดยนิยามของ $\neq \varnothing$)

เพราะฉะนั้น $x \in \text{dom}(f)$ (เพราะว่า $S \cap T \subset A = \text{dom}(f)$)

ดังนั้น $\exists y, (x, y) \in f$ (นิยามของ dom(f))

2) นั่นคือ $\exists y, y = f(x)$ (นิยามของ f(x))

เพราะฉะนั้น $\exists y, \exists x, x \in S \cap T \wedge y = f(x)$

(จาก 1) และ 2))

ดังนั้น $\exists y, y \in f(S \cap T)$ (นิยามของ f( ))

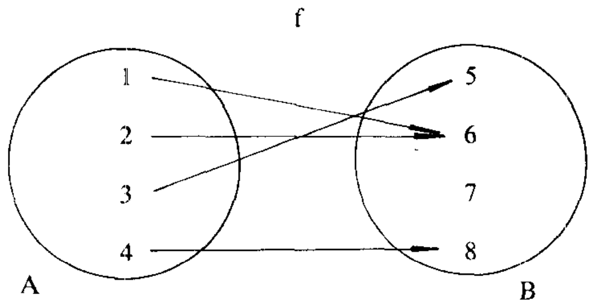
แต่ $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$ (โดยทฤษฎี 5.4.2)

ดังนั้น $\exists y; y \in f(s) \cap f(T)$ (นิยามของ $\subset$ (การแจงผลตามเหตุ))

นั่นคือ $f(S) \cap f(T) \neq \varnothing$ (นิยามของ $\neq \varnothing$)

แบบฝึกหัด 5.4

1. ให้



แล้ว $f(\{1, 2\})$ = ...

$f(\{2, 3\})$ = ...

$f(\varnothing)$ = ...

$f(2)$ = ...

$f(\{2\})$ = ...

$f(A)$ = ...

2. ให้ $f : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = x^2\ 4$

$f(3)$ = ...

$f(\{3\})$ = ...

$f(\{1, 2\})$ = ...

$f(\{x : x \in R \wedge 0 < x < 3\})$ = ...

ถ้า $A = \{x : x \in R \wedge |x| \leqslant 2\}$ แล้ว

$f(A)$ = ...

3. จงหาเซตย่อย S และ T ของ R ซึ่งพิสูจน์ได้ว่าข้อความข้างล่างนี้เป็นเท็จ สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดในข้อ 2

3.1 ถ้า $S \cap T = \varnothing$ แล้ว $f(S) \cap f(T) = \varnothing$

3.2 ถ้า $f(S) = f(T)$ แล้ว $S = T$

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท ใน F_4 ให้เรียบร้อย

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท ใน F_8

6. ให้ $g : A \to B$ และให้ $h : B \to C, S \subset A$ และ $T \subset C$

   6.1 $g \circ h$ มีความหมายหรือไม่..ทำไม

   6.2 $h \circ g$ มีความหมายหรือไม่.. ทำไม

   6.3 $(h \circ g)(T)$ มีความหมายหรือไม่.. ทำไม

   6.4 $(h \circ g)(S)$ มีความหมายหรือไม่..ทำไม

7. ให้ $f : A \to B$ ให้ $S \subset A$ และ $T \subset A$ พิสูจน์ได้หรือไม่ได้ว่า $f(S-T) = f(S) - f(T)$

5.5 บุพภาพของเซต (The Preimage of a set)

F_1

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B, $\underline{\overline{Y}} \subset B$ **บุพภาพของ** $\underline{\overline{Y}}$ **ภายใต้** f เป็นเซตย่อยของ A แทนด้วย $f^{-1}(\underline{\overline{Y}})$ และกำหนดโดย $x \in f^{-1}(\underline{\overline{Y}})$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \in \underline{\overline{Y}}$

นั่นคือ $f^{-1}(\underline{\overline{Y}}) = \{x \in A : f(x) \in \underline{\overline{Y}}\}$

ข้อสังเกต

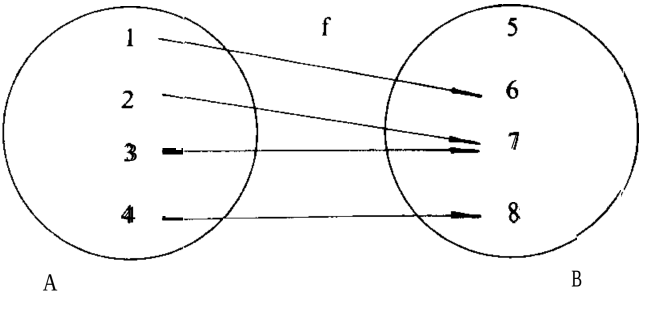
$\underline{\overline{Y}} \subset B$ ในขณะที่ $f^{-1}(\underline{\overline{Y}}) \subset A$

ข้อความแย้งสลับที่ก็เป็นจริง : $x \notin f^{-1}(\underline{\overline{Y}})$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \notin \underline{\overline{Y}}$

F_2

ตัวอย่าง 5.5.1

พิจารณาฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย :



จะเห็นว่า $f^{-1}(\{7\}) = \{2, 3\}$

$f^{-1}(\{5\}) = 0$

และ $f^{-1}(B) = A$

$f^{-1}(\{6, 7\} \cup \{7, 8\}) = f^{-1}(\{6, 7, 8\})$

$= \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}$

$= f^{-1}(\{6, 7\}) \cup f^{-1}(\{7, 8\})$

แต่ $f^{-1}(\{6, 7\} \cap \{7, 8\}) = f^{-1}(\{7\})$

$= \{2, 3\}$

$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}$

$= f^{-1}(\{6, 7\}) \cap f^{-1}(\{7, 8\})$

จากตัวอย่างนี้ทำให้เกิดทฤษฎี ดัง F_2

F_2

ทฤษฎี 5.5.1

ถ้า $f : A \to B$ และ $S \subset B, T \subset B$ แล้ว :

1) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

2) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

พิสูจน์ ตอน 1)

สมมติว่า $x \in f^{-1}(S \cup T)$

แล้ว $f(x) \in S \cup T$ (โดยนิยามของ $f^{-1}(\ )$)

และ $f(x) \in S$ **หรือ** $f(x) \in T$ (โดยนิยามของ $\cup$)

ดังนั้น $x \in f^{-1}(S)$ **หรือ** $x \in f^{-1}(T)$ (นิยามของ $f^{-1}(\ )$)

นั่นคือ $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ (นิยามของ $\cup$)

(A) **ดังนั้น** $x \in f^{-1}(S \cup T) \to x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

ข้อโต้แย้งของ (A) ผันกลับได้เป็น :

(B) $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \to x \in f^{-1}(S \cup T)$

เพราะฉะนั้น $x \in f^{-1}(S \cup T) \leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

นั่นคือ $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ (นิยามของการเท่ากัน)

พิสูจน์ ตอน 2) ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

F_3

ทฤษฎีบท 5.5.2

ถ้า $f : A \to B$ และ $S \subset B, T \subset B$ แล้วจะได้ :

1) ถ้า $S \subset T$ แล้ว $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$

2) $f^{-1}(S-T) = f^{-1}(S) - f^{-1}(T)$

พิสูจน์ตอน 1)

(1) ....

(2) ....

(3) ....

(4)
....

(5)
....

(6)
....

(7)
....

พิสูจน์ตอน 2)

ให้ $x \in f^{-1}(S-T)$ (.................(8).................)

แล้ว $f(x) \in S \wedge f(x) \notin T$ (.................(9).................)

เพราะฉะนั้น $x \in f^{-1}(S)$ และ $x \in f^{-1}(T)$ (.................(10).................)

นั่นคือ $x \in f^{-1}(S) - f^{-1}(T)$ (.................(11).................)

ข้อโต้แย้งข้างบนนี้ผันกลับได้ :

$x \in f^{-1}(S) - f^{-1}(T)$ แล้ว $x \in f^{-1}(S-T)$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(S-T) = f^{-1}(S) - f^{-1}(T)$ (นิยามการเท่ากันของเซต)

---

(1) ให้ $x \in f^{-1}(S)$

(2) $\therefore f(x) \in S$

(3) $\because S \subset T \therefore f(x) \in S \rightarrow f(x) \in T$

(4) $f(x) \in T$ (จากข้อ (2), (3) Modus Ponens)

(5) $\therefore x \in f^{-1}(T)$ (นิยามของบุพภาพ)

(6) นั่นคือ $x \in f^{-1}(S) \rightarrow x \in f^{-1}(T)$ (จากข้อ (1) และ (5))

(7) เพราะฉะนั้น $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$ (นิยามของเซตย่อย)

(6) นิยามของบุพภาพ

(9) นิยามของส่วนเติมเต็ม (complement)

(10) นิยามของบุพภาพ

(11) นิยามของส่วนเติมเต็ม

F_4

ทฤษฎีบท 5.5.3

ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $T \subset A$, $S \subset B$ แล้ว :

1) $T \subset f^{-1}(f(T))$

2) $f(f^{-1}(S)) \subset S$

(ลองพิสูจน์ด้วยตนเองก่อนที่จะดูการพิสูจน์ข้างล่างนี้)

พิสูจน์ (ตอน 1))

ให้ $x \in T$

แล้ว $f(x) \in f(T)$ (นิยามของ $f(\ )$)

เพราะฉะนั้น $x \in f^{-1}(f(T))$ (นิยามของ $f^{-1}(\ )$)

นั่นคือ $T \subset f^{-1}(f(T))$

พิสูจน์(ตอน 2))

ให้ $x \in f(f^{-1}(S))$

แล้ว $\exists y, y \in f^{-1}(S) \wedge f(y) = x$ (..........(1)..........)

จึงได้ $\exists y, f(y) \in S \wedge f(y) = x$ (..........(2)..........)

ดังนั้น $x \in S$ (เพราะ..........)

เพราะฉะนั้น $f(f^{-1}(S)) \subset S$

---

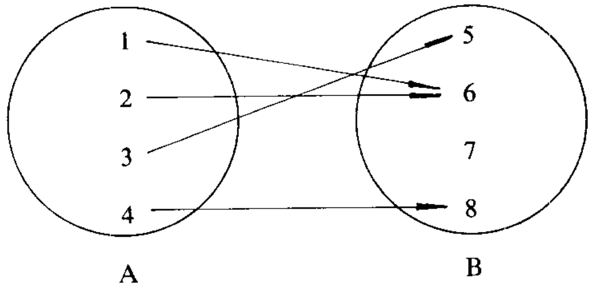
(1) นิยามของภาพ (image)

(2) นิยามของบุพภาพ

(3) นิยามของภาพ

แบบฝึกหัด 5.5

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันกำหนดดังแผนภาพ



แล้ว $f^{-1}(\{5,6\})$ = ...

$f^{-1}(\{7,8\})$ = ...

$f^{-1}(\{7\})$ = ...

$f^{-1}(\varnothing)$ = ...

$f^{-1}(B)$ = ...

$f^{-1}(\{6\})$ = ...

2. ให้ $f : R \to R$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$

$f^{-1}(\{9\})$ = ...

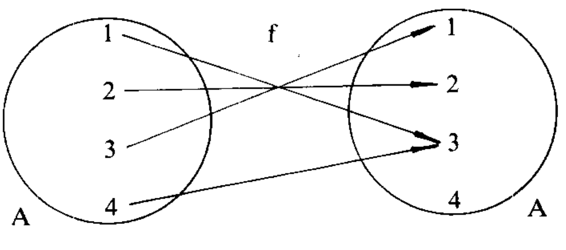
$f^{-1}(\{9, 4, 1\})$ = ...

$f^{-1}(\{x : x \in R \wedge 4 < x < 9\})$ = ...

$f^{-1}(\{x : x \in R \wedge x < 9\} \cup \{x : x \in R \wedge 16 < x\})$ = ...

....

3. ให้ f กำหนดโดย :



แล้ว $f(\{3\})$ = ...

$f^{-1}(\{3\})$ = ...

$f(\{4\})$ = ...

$f^{-1}(\{4\})$ = ...

$f(\{1,2\})$ = ...

$f^{-1}(\{1,2\})$ = ...

$f^{-1}(f(\{2,3\}))$ = ...

$f(f^{-1}(\{2,3\}))$ = ...

$f(A)$ = ...

$f^{-1}(A)$ = ...

4. ให้ $f : R \rightarrow R$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$

4.1 $f^{-1}(\{9,4,1\})$ = ...

4.2 $f^{-1}(\{x \in R : 4 < x < 9\})$ = ...

4.3 $f^{-1}(\{x \in R : 16 < x\} \cup \{x \in R : x < 9\})$

= ....

4.4 $f^{-1}(\{x \in R : 16 < x\})$ = ...

5. พิสูจน์ได้หรือไม่ได้ว่า : ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $S \subset B$, $T \subset B$ ถ้า $f^{-1}(S) = f^{-1}(T)$ แล้ว $S = T$

6.

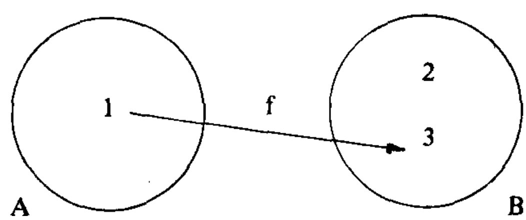
6.1 จงพิสูจน์ทฤษฎีบทใน F_3

6.2 จงพิสูจน์ทฤษฎีบทใน F_4

7.

7.1 จงแสดง(ด้วยตัวอย่าง) ว่า ความเท่ากัน **ไม่**สอดคล้องใน 1) ของทฤษฎีสุดท้ายของหัวข้อนี้

7.2 จงแสดงว่า ความเท่ากันไม่สอดคล้องใน 2) ของทฤษฎีสุดท้าย (แนะ : พิจารณา A



)

7.3 จงตรวจสอบข้อโต้แย้ง ใน 2) ของทฤษฎีสุดท้ายเพื่อค้นหาว่าทำไมจึง**ไม่**ผันกลับ (reverse)

7.4 สมมติในทฤษฎีสุดท้ายที่ว่า $S \subset f(A)$ แล้วข้อโต้แย้งใน 2) ผันกลับได้หรือไม่......... ทำไม

....

8 . ให้ $f : \overline{X} \to \underline{\overline{Y}}$ ซึ่ง $f(\underline{\overline{X}}) = \underline{\overline{Y}}$ ให้ $a = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in \underline{\overline{Y}}\}$ จงพิสูจน์ว่า a เป็นผลแบ่งกั้นของ x

5.6 **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (One-to-one Functions)

F_1

ให้ $f : A \to B$, f **เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in A, \forall y \in B, x \neq y \to f(x) \neq f(y)$

นั่นคือ ฟังก์ชันเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ภาพของสมาชิกที่แตกต่างกัน เป็นตัวมันเองที่แตกต่างกัน ข้อความแย้งสลับที่ของนิยามนี้ เป็นจริง กล่าวคือ : f **ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ** $\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y \wedge f(x) = f(y)$

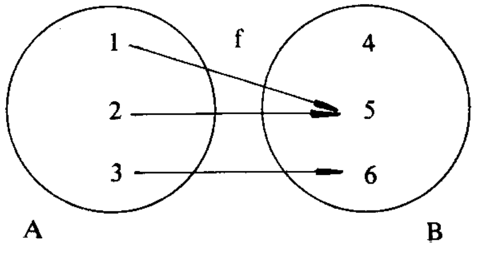
F_2

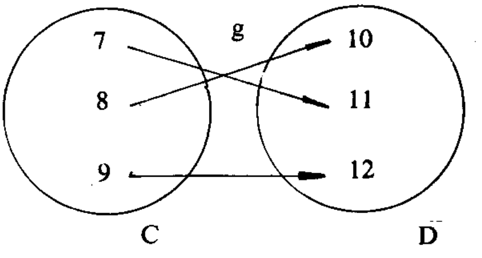
ฟังก์ชันไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ สมาชิก 2 สมาชิกของโดเมนที่แตกต่างกันมีภาพ (image) อย่างเดียวกัน รูปแบบของนิยามฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง คือ : f **เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ** $\forall x \in A\ \forall y \in A, f(x) = f(y) \to x = y$

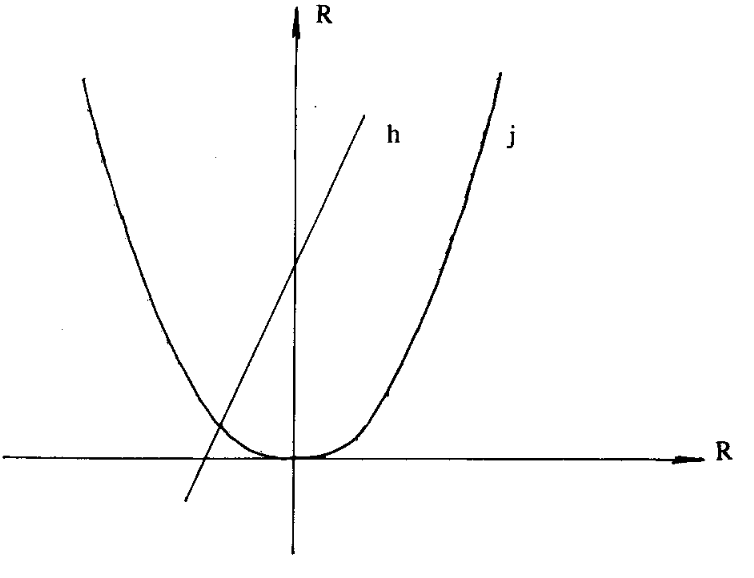
F_3

ตัวอย่าง 5.6.1

พิจารณาฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย







f **ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง** เพราะว่า $1 \neq 2 \wedge f(1) = f(2)$

g **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง**

$h : R \rightarrow R$ กำหนดโดย $h(t) = 2t + 1$ **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง**

F_4

ในการพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน h ใน F_3 เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง :

พิสูจน์

ให้ $x \in R \wedge y \in R$

และ $h(x) = h(y)$

แล้ว $2x + 1 = 2y + 1$ (นิยามของ h)

ดังนั้น $2x = 2y$

และ $x = y$

นี่คือการพิสูจน์ว่า $\forall x \in R\ \forall y \in R,\ h(x) = h(y)$

$\rightarrow x = y$ #

สำหรับฟังก์ชัน j ดังรูปใน F_3

$j : R \times R$ กำหนดโดย $j(t) = t^2$ **ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** เพราะว่า $-2 \in R \wedge 2 \in R$ $\wedge -2 \neq 2 \wedge$ (แต่) $j(2) = j(-2)$

แบบฝึกหัด 5.6

1. กำหนด $f : N \to N$ โดย $f(n) = n^2$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (ข้อสังเกต $dom(f) \neq R$)

พิสูจน์

สมมติว่า $x \in N$ และ $y \in N$

และ $f(x) = f(y)$

แล้ว $x^2 = y^2$ โดย..

และ $x = y \vee x = -y$ โดย..

แต่ $x = -y$ นั้นเป็นไปไม่ได้ เพราะ..

เพราะฉะนั้น $x = y$ โดย..

ดังนั้น $\forall x \in N, \forall y \in N, f(x) = f(y) \to x = y$

นั่นคือ f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง โดย..

2. ให้ $A = \{x \in R : x \geqslant 0\}$ กำหนด $f : A \to R$ โดย $f(t) = 2t^2+1$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

3. กำหนด $f : Z \times Z$ โดย $f(z) = 3z + 6$ จงพิสูจน์ว่า f เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง

4. สมมติว่า $f : A \to B$, $g : B \to C$, f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ g เป็นหนึ่งต่อหนึ่งจงพิสูจน์ว่า $g \circ f$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

5. พิจารณาฟังก์ชัน

$\alpha = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3)\}$

$\beta = \{(1, 2), (3, 2), (2, 4)\}$

จงเขียน ความสัมพันธ์ผกผันสำหรับแต่ละฟังก์ชัน :

$\alpha^{-1} =$ ....

$\beta^{-1} =$ ....

ความสัมพันธ์ผกผันใดเป็นฟังก์ชัน ....

ฟังก์ชันที่กำหนดให้ใดเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ....

ถ้าฟังก์ชัน f **เป็น**.. **แล้ว ความสัมพันธ์** f^{-1}

เป็น ....**สามารถพิสูจน์ได้หรือไม่**

6. **สมมติว่า** $f : A \rightarrow B$ **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และ** $\overline{\underline{X}} \subset A$ **และ** $\overline{\underline{Y}} \subset A$ **จงพิสูจน์ว่า** $f(\overline{\underline{X}} \cap \overline{\underline{Y}}) = f(\overline{\underline{X}}) \cap f(\overline{\underline{Y}})$

(**แนะ** : **ถ้า** $\exists y_1, y_1 \in \overline{\underline{X}} \wedge f(y_1) = x$ **และ**

ถ้า $\exists y_2, y_2 \in \overline{\underline{Y}} \wedge f(y_2) = x$ **แล้ว**

$f(y_1) = f(y_2)$)

5.7 ไปทั่วถึงเซต (Onto a set)

F_1

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

$\underline{\overline{Y}} \subset B$

f **ไปทั่วถึง** $\underline{\overline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ $\forall y \in \underline{\overline{Y}}, \exists x \in A, f(x) = y$

นั่นคือ f ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิกของ $\underline{\overline{Y}}$ เป็นภาพ (image) ของบางสมาชิกของโดเมนของ f รูปแบบที่นำไปใช้ประโยชน์ของนิยามนี้ คือ : f ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ **แต่ละสมาชิก** $y \in \underline{\overline{Y}}$ สมการ $f(x) = y$ **มีอย่างน้อย** 1 **คำตอบ** (solution) **ใน A**

F_2

ข้อความแย้งสลับที่ของนิยาม ใน F_1 : f **ไม่ไปทั่วถึง** $\underline{\overline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ $\exists y, \in \underline{\overline{Y}}, \forall x \in \underline{\overline{X}}, f(x) \neq y$

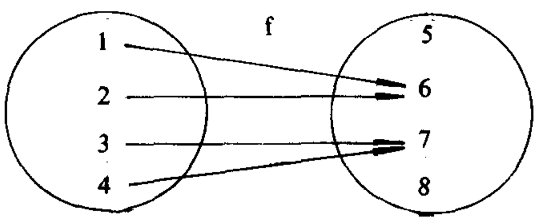
นั่นคือ f **ไม่**ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ มีบางสมาชิกของ $\underline{\overline{Y}}$ **ซึ่งไม่เป็นภาพของบางสมาชิก**ของ A

กล่าวคือ f **ไม่ไปทั่วถึง** $\underline{\overline{Y}}$ หมายความว่า มีบางสมาชิก $y \in \underline{\overline{Y}}$ **ซึ่งสมการ** $f(x) = y$ ไม่มีคำตอบใน A

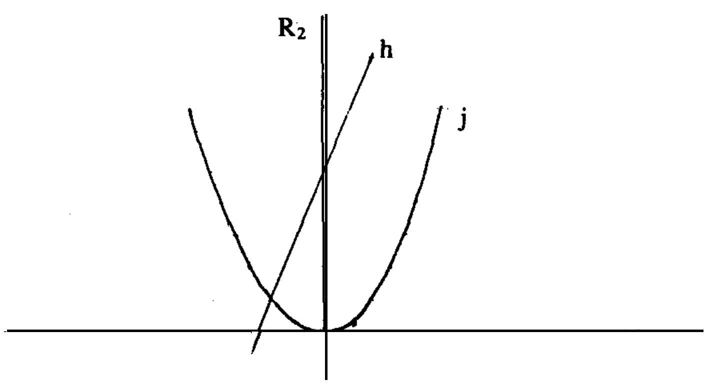
F_3

ตัวอย่าง 5.7.1

พิจารณาฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย :



$g = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$



จะเห็นว่า f **ไม่ไปทั่วถึงเซต** {6, 7, 8} แต่

f ไปทั่วถึง เซต {6, 7} และ

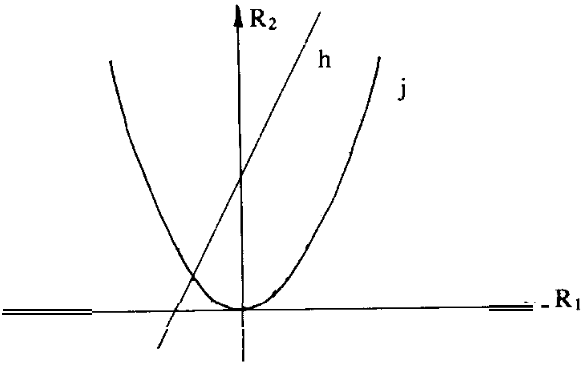
f ไปทั่วถึง เซต {6} ด้วย

g **ไม่ไปทั่วถึง** เซต {1, 2} แต่

g ไปทั่วถึงเซต {2, 3, 4}

ตัวอย่าง 5.7.2

พิจารณาฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย :



ให้ R_1 และ R_2 ต่างก็แทนเซตของจำนวนจริง ฟังก์ชัน $h : R_1 \rightarrow R_2$ กำหนดโดย $h(t) = 2t + 1$ เป็นฟังก์ชัน ไปทั่วถึง (onto) R_2

พิสูจน์

ให้ $b \in R_2$

พิจารณาสมการ $h(x) = b$

โดยนิยามซึ่ง h ได้ $2x + 1 = b$ สมการนี้มีอย่างน้อย 1 คำตอบ ใน R_1 หรือไม่

จะเห็นว่า $x = \frac{b-1}{2} \in R_1$

เพราะว่า b เป็นค่าไม่เจาะจง (arbitrary)

สรุปได้ว่า $\forall b \in R_2, \exists x \in \underline{R_1}$ (คือ $\frac{b-1}{2}$), $h(x) = b$ ดังนั้น h ไปทั่วถึง (onto) R_2

F_5

จาก F_4 ถ้าให้ R_1 และ R_2 แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

กำหนดฟังก์ชัน $j : R_1 \rightarrow R_2$ โดย $j(x) = x^2$ แล้ว j ไปทั่วถึง R_2 หรือไม่

พิสูจน์

ให้ $b \in R_2$

พิจารณาสมการ $j(x) = b$ โดยนิยามของ j จึงได้

$x^2 = b$ สมการนี้มีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบใน R_1 หรือไม่

อาศัยความรู้เบื้องต้นทางพีชคณิต จะเห็นว่า **ไม่มีคำตอบใน** R_1 (พิจารณา กรณี $b = -1$)

นั่นคือ ถ้า $b = -1$ แล้ว $\forall x \in R_1, j(x) \neq b$ นี่แสดงว่า $\exists b \in R_2, \forall x \in R_1, j(x) \neq b$

นั่นคือ j **ไม่** ไปทั่วถึง R_2

F_6

ตัวอย่าง 5.7.3

ให้ $\underline{\overline{Y}} = \{ y \in R_2 : y \geqslant 0 \}$

j ดัง F_5

แล้ว j ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$

พิสูจน์

จะต้องแสดงให้ได้ว่า สำหรับแต่ละ $b \in \underline{\overline{Y}}$ สมการ $j(x) = b$ มีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบใน R_1

จะเห็นว่า $\sqrt{b} \in R$ เพราะว่า $b \geqslant 0$

และ $j(\sqrt{b}) = b$

สรุปได้ว่า j ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$

F_7

ตัวอย่าง 5.7.4

ให้ D แทนเซตของฝ่ายจัดโต๊ะของมหาวิทยาลัยรามคำแหง

F แทนเซตของคณะต่าง ๆ ของมหาวิทยาลัยรามคำแหง

แต่ละคณะ x จะมีฝ่ายจัดโต๊ะเพียงหนึ่งฝ่ายเท่านั้น : a(x)

นั่นคือ $a : F \rightarrow D$

a **ไปทั่วถึง** D (a is onto D) เพราะทุก ๆ ฝ่ายจัดโต๊ะ y ขึ้นอยู่กับ (ได้กำหนดไว้) บางคณะ x

นั่นคือ $\forall y \in D, \exists x \in F, a(x) = y$

จากตัวอย่างนี้ a ไม่ไปทั่วถึง D แสดงว่า บางฝ่ายจัดโต๊ะ y ไม่ขึ้นอยู่กับ (ไม่ได้กำหนดไว้) คณะ กล่าวคือ $\exists y \in D, \forall x \in F, a(x) \neq y$

F_8

สรุป การพิสูจน์ว่า $f : A \to B$ ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$ มี 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1) ให้ $b \in \underline{\overline{Y}}$

2) หาค่า x ที่เหมาะเจาะ

3) แสดงให้ได้ว่า $x \in A$

4) แสดงให้ได้ว่า $f(x) = b$

แล้ว สรุปได้ว่า $\forall b \in \underline{\overline{Y}}, \exists x, x \in A \wedge f(x) = b$

ดังนั้น f ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$

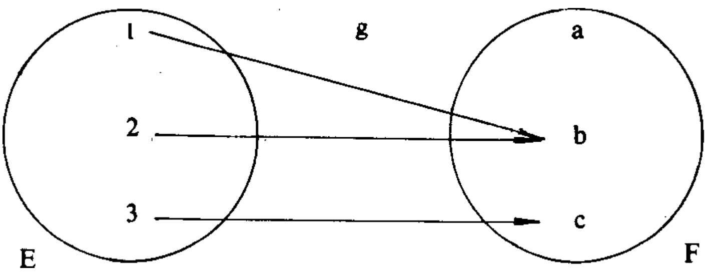
แบบฝึกหัด 5.7

1. พิจารณา a : F → D ดังตัวอย่าง 5.7.4 (F_4)

   1.1 a ไปทั่วถึง D หรือไม่..จงอธิบาย

   1.2 a เป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่...จงอธิบาย

2. กำหนด $g : E \to F$ โดย



จงเขียนทุก ๆ เซตย่อย $\overline{\underline{Y}}$ ของ F ซึ่ง g ไปทั่วถึง $\overline{\underline{Y}}$: $\{\overline{\underline{Y}} : \overline{\underline{Y}} \in \mathcal{P}(F) \wedge g$ ไปทั่วถึง $\overline{\underline{Y}}\}$

= ....

3. ให้ $f : A \to B$ ข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

   3.1 f ไปทั่วถึง $\overline{\underline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{\underline{Y}} \subset f(A)$ ....

   3.2 f ไปทั่วถึง $\overline{\underline{Y}}$ ก็ต่อเมื่อ $\forall y \in \overline{\underline{Y}}, f^{-1}(\{y\}) \neq 0$ ....

   ....

   3.3 f ไปทั่วถึง 0 ....

4. ให้ $W = \{x : x \in R \wedge 10 < x < 200\}$

   P : เซตของผู้มีชีวิตอยู่ทั้งหมด

   g(x) : น้ำหนักเป็นปอนด์ที่ใกล้เคียงที่สุดของบุคคล x

   จงกล่าวถึงข้อต่อไปนี้ :

   4.1 $g : P \to R$

   4.2 g ไปทั่วถึง R

   4.3 g ไปทั่วถึง W

   4.4 g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

5. กำหนด $f : R_1 \rightarrow R_2$ โดย $f(x) = 4x^2$

5.1 จงเขียนกราฟของ f

5.2 จงพิสูจน์ว่า f **ไม่** เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

5.3 จงพิสูจน์ว่า f **ไม่**ไปทั่วถึง R_2

5.4 ให้ $\underline{\overline{Y}} = \{x : x \in R_2 \wedge x > 0\}$

จงพิสูจน์ว่า f ไปทั่วถึง $\underline{\overline{Y}}$

6. กำหนด $f : R \times R \rightarrow R$ โดย $f((x, y)) = x + y$

แล้ว ดังเช่น $f((2, 2)) = 2 + 2 = 4$

$f((3, 7)) = 3 + 7 = 10$

$f((\pi, e)) = \pi + e$ เป็นต้น

6.1 จงเขียนสมาชิกซึ่งมีมากมายของ f

6.2 จงพิสูจน์ว่า f **ไม่** เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

6.3 จงพิสูจน์ว่า f ไปทั่วถึง R

7. สมมติ $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, f ไปทั่วถึง B และ g ไปทั่วถึง C จงพิสูจน์ว่า $g \circ f$ ไปทั่วถึง C

8. ให้ $f : A \rightarrow B$, $T \subset B$ ถ้า f ไปทั่วถึง T และถ้า $S \subset T$ แล้ว f ไปทั่วถึง S

9. ให้ $f : A \rightarrow B$

9.1 จงเขียนนิยามของ "f ไปทั่วถึง B"

9.2 จงเขียนนิยามของ "f(A)"

9.3 จงเขียนนิยามของ "$B \subset f(A)$"

9.4 จงพิสูจน์ว่า f ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $B \subset f(A)$

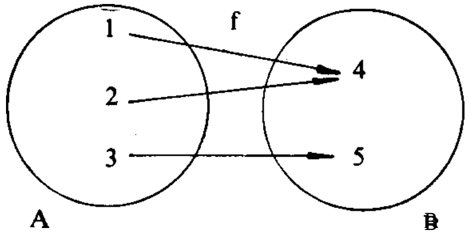
5.8 ตัวผกผันของฟังก์ชัน

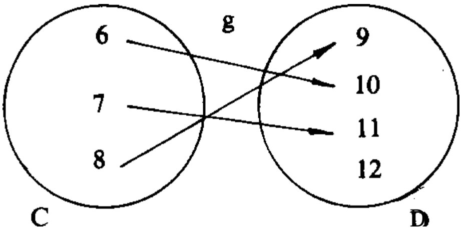
(Inverse of a Function)

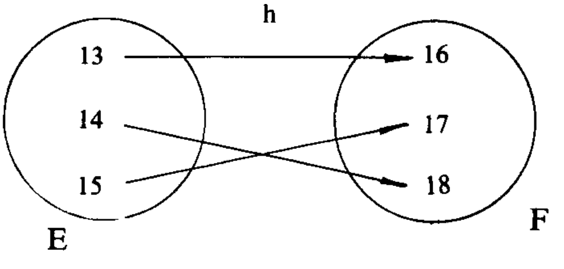
F_1

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B อย่าลืมว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A กำหนดโดย $(x, y) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $(y, x) \in f$

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้







จะเห็นว่า $f^{-1} = \{ (4, 1), (4, 2), (5, 3) \}$

และ f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A

เพราะ ....(1)..

และ $g^{-1} = \{ (9, 8), (10, 6), (11, 7) \}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน

จาก D ไป C เพราะ ....(2)..

ส่วน $h^{-1} = \{ (16, 13), (17, IS), (18, 14) \}$

เป็นฟังก์ชันจาก F ไป E

ข้อสังเกต

f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

g **ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง** (onto) D

h เป็นทั้งหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง F

---

(1) (4, 1), (4, 2) A $1 \neq 2$

(2) $\mathrm{dom}(g^{-1}) \neq D$

F_2

จากตัวอย่างใน F_1 ทำให้เกิดทฤษฎีดังนี้ :

ทฤษฎีบท 5.8.1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A ซึ่งเป็น หนึ่งต่อหนึ่ง (1 - 1) และทั่วถึง (onto) A

หมายเหตุ

การพิสูจน์ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A จะต้องแสดง :

1) $f^{-1} \subset B \times A$

2) $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$

และ 3) $((a, b) \in f^{-1} \wedge (c, d) \in f^{-1} \wedge a = c) \rightarrow b = d$

F_3

ทฤษฎีใน F_2 **พิสูจน์ได้ดังนี้**

ตอนที่ 1)

ให้ $(x, y) \in f^{-1}$

แล้ว $(y, x) \in f$ (นิยามของตัวผกผันของฟังก์ชัน)

และ $y \in A, x \in B$ $(f : A \rightarrow B)$

$\therefore (x, y) \in B \times A$ (นิยามของผลคูณคาร์ทีเซียน)

นั่นคือ $(x, y) \in f^{-1} \rightarrow (x, y) \in B \times A$

$\therefore f^{-1} \subset B \times A$ (นิยามของเซตย่อย)

ตอนที่ 2)

ให้ $x \in B$

แล้ว $\exists y \in A, (y, x) \in f$

$\therefore (x, y) \in f^{-1}$

$\therefore x \in dom(f^{-1})$

นั่นคือ $x \in B \rightarrow x \in dom(f^{-1})$

ให้ $x \in dom(f^{-1})$

แล้ว $\exists y \in A, (x, y) \in f^{-1}$

$\therefore (y, x) \in f$

$\therefore x \in B$

นั่นคือ $x \in dom(f^{-1}) \rightarrow x \in B$

เพราะฉะนั้น $B = dom(f^{-1})$

ตอนที่ 3)

ให้ $(a, b) \in f^{-1} \wedge (c, d) \in f^{-1} \wedge a = c$

แล้ว $(b, a) \in f \wedge (d, c) \in f \wedge a = c$

นั่นคือ $b = d$

จึงได้ $((a, b) \in f^{-1} \wedge (c, d) \in f^{-1} \wedge a = c) \rightarrow b = d$

สรุปได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$

แบบฝึกหัด 5.8

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

   1.1 จงพิสูจน์ว่า f^{-1} เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

   1.2 จงพิสูจน์ว่า f^{-1} ไปทั่วถึง A

2. ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง และไปทั่วถึง B แล้ว $f^{-1} \circ f =$ ....

   และ $f \circ f^{-1} =$ ....