บทที่ 4
ความสัมพันธ์
(Relations)

4.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน (The Cartesian Product)

F_1

ให้ a และ b เป็นสมาชิกของ U (a, b) เป็น**คู่อันดับ** (ordered pair) ก็ต่อเมื่อ $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

ใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทนคู่อันดับอันหนึ่ง จะใช้นิยามนี้พิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

F_2

ทฤษฎี 4.1.1

$(a, b) = (c, d)$ iff $a = c$ และ $b = d$

ข้อสังเกต

$(1, 3) \neq (3, 1)$ เพราะว่า $\{\{1\}, \{1, 3\}\} \neq \{\{3\}, \{1, 3\}\}$

F_3

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A กับ B แทนด้วย A x B และนิยามได้ โดยใช้คู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด ซึ่ง a ∈ A และ b ∈ B :

$$\boxed{A \times B = \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}}$$

ดังนั้น a ∈ A x B iff ∃a ∈ A, ∃b ∈ B, a = (a, b)

ตัวอย่าง 4.1.1

ให้ $\underline{X} = \{1, 2, 3\}$

$\underline{Y} = \{3, 4\}$

แล้ว $\underline{X} \times \underline{Y} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) (3, 3) (3, 4)\}$

และ $\underline{Y} \times \underline{X} = \{(3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3)\}$

ข้อสังเกต

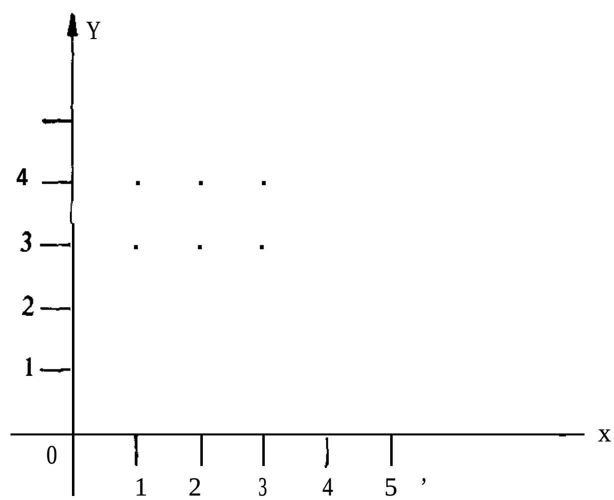
$(1, 3) \in \underline{X} \times \underline{Y}$ แต่ $(1, 3) \notin \underline{Y} \times \underline{X}$

เพราะฉะนั้น $\underline{X} \times \underline{Y} \neq \underline{Y} \times \underline{X}$

F_4

เมื่อ A และ B เป็นเซตย่อยของ R แล้วกราฟผลคูณคาร์ทีเซียนของ A กับ B ใช้ระบบคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนตได้

ดังตัวอย่าง ถ้า $\underline{X}$ และ $\underline{Y}$ กำหนดดังข้างบน แล้วกราฟของ $\underline{X} \times \underline{Y}$ แสดงได้ดังนี้ :



แบบฝึกหัด 4.1

1. ให้ $A = \{0, A\}$

   $B = \{*, \square\}$

   จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

   1.1 $A \times B =$ ....

   1.2 $B \times A =$ ....

   1.3 $B \times B =$ ....

2. ถ้า $\underline{X}$ มีเพียง n สมาชิกและถ้า $\underline{Y}$ มี m สมาชิกแล้ว $\underline{X} \times \underline{Y}$ มี.......................สมาชิก

3. จงอธิบายกราฟของ $R \times R$

4. จงบอกถึงลักษณะของกราฟของแต่ละข้อต่อไปนี้

   4.1 $N \times N$

   4.2 $\{1\} \times R$

   4.3 $R \times \{1\}$

   4.4 $\{x \in R : 2 < x < 4\} \times \{x \in R : -1 < x < 1)$

4.2 **ความสัมพันธ์ระหว่างเซต** (Relations Between Sets)

F_1

ให้ A และ B เป็นเซต ρ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $\rho \subset A \times B$

ดังนั้นความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ **โดเมนของความสัมพันธ์** ρ เป็นเซต ซึ่งแทนด้วย "dom (ρ)" และกำหนด(นิยาม) โดย $x \in \text{dom}(\rho)$ iff $\exists b \in B\ [\ (x, y) \in \rho\ ]$

เพราะฉะนั้น $\text{dom}(\rho) = \{\ x : \exists b \in B\ [\ (x, y) \in \rho\ ]$ **เรนจ์ของความสัมพันธ์** ρ คือเซตซึ่งแทนด้วย "rng(ρ)" และนิยามโดย $x \in \text{rng}(\rho)$ iff $\exists a \in A\ [\ (a, x) \in \rho\ ]$

เพราะฉะนั้น $\text{rng}(\rho) = \{\ x : \exists a \in A\ [\ (a, x) \in \rho\ ]\ \}$

F_2

สมมติว่า ρ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B **ตัวผกผันของความสัมพันธ์** ρ เป็นเซตซึ่งแทนด้วย " ρ^{-1} " และนิยามโดย $(x, y) \in \rho^{-1}$ iff $(y, x) \in \rho$

ดังนั้น $\rho^{-1} = \{\ (b, a) : (a, b) \in \rho\ \}$

นั่นคือ ρ^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

F_3

ตัวอย่าง 4.2.1

ให้ $A = \{\ 1, 3, 5\ \}$

$B = \{\ 2, 3, 4\ \}$

$\rho = \{\ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 4)\ \}$

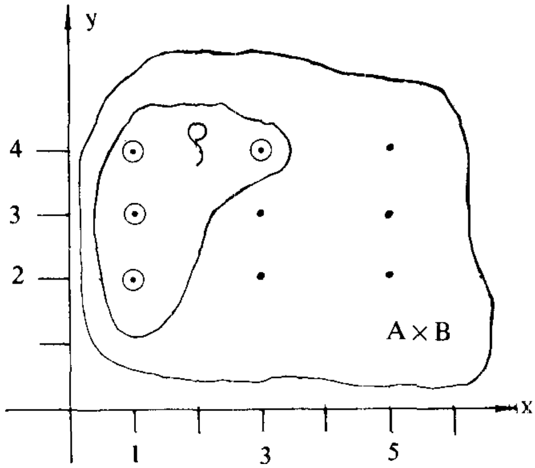
แล้ว ρ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

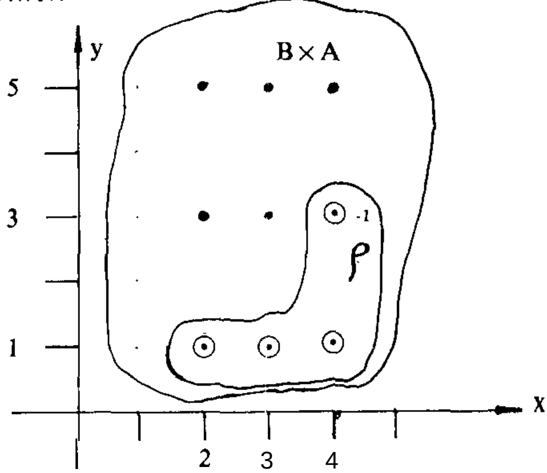
$\text{dom}(\rho) = \{\ 1, 3\ \}$

$\text{rng}(\rho) = \{\ 2, 3, 41$

$\rho^{-1} = \{\ (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\ \}$

แสดงด้วยกราฟดังนี้





แบบฝึกหัด 4.2

1. กำหนดความสัมพันธ์ β จาก N ไป N โดย $(n, m) \in \beta$ ก็ต่อเมื่อ $n > m$

   1.1 $\mathrm{dom}(\beta)$ = ...

   1.2 $\mathrm{rng}(\beta)$ = ...

   1.3 $(x, y) \in \beta^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ . … … ....

   1.4 $\beta^{-1} = \beta$ หรือไม่........................*..........*.....เพราะ...

   1.5 กราฟของ β เป็น ....*..............

   1.6 กราฟของ β^{-1} เป็น ....

2. กำหนดความสัมพันธ์ a จาก R ไป R โดย (x, y) ∈ a ก็ต่อเมื่อ $4x + y = 4$

   2.1 $\mathrm{dom}(\alpha)$ = ...

   2.2 rng (a) = ...

   2.3 (x, y) ∈ a-' ก็ต่อเมื่อ ....

   2.4 α^{-1} = a หรือไม่...................................... เพราะ......................................

   2.5 กราฟของ a เป็น ....

   2.6 กราฟของ a-' เป็น ....

3. กำหนดความสัมพันธ์ a จาก R ไป R โดย $(x, y) \in \alpha : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leqslant 1$

   3.1 $\mathrm{dom}(\alpha)$ = ...

   3.2 $\mathrm{rng}(\alpha)$ = ...

   3.3 (x, y) ∈ a-' ก็ต่อเมื่อ ....

   3.4 a-' = a หรือไม่...................................... ทำไม......................................

   3.5 กราฟของ a เป็น ....

   3.6 กราฟของ a-' เป็น ....

4. ให้ S เป็นเซตใด ๆ กำหนด i จาก S ไป S โดย (x, y) ∈ i ก็ต่อเมื่อ x = y **ความสัมพันธ์**
   นี้เรียกว่า **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์บน** S (identity relation on S)

   4.1 dom(i) = ...

4.2 rng (i) = ...

4.3 $(x, y) \in i^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ..................... ....

4.4 $i^{-1} = i$ หรือไม่...................................... ทำไม.......................................

5. อย่าลืมว่า U แทนเอกภพสัมพัทธ์ จงบอกชื่อความสัมพันธ์สองอย่างจาก P(U) ไป P(U) ซึ่งได้นิยามไว้ในบทที่แล้ว

5.1 ....

5.2 ....

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า ρ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว

6.1 $\mathrm{dom}\,(\rho) \subset A$ และ

6.2 $\mathrm{rng}\,(\rho) \subset B$

4.3 ความสัมพันธ์ทางเซต

(Relations on a set)

F_1

ให้ A เป็นเซตใด ๆ

ρ เป็น**ความสัมพันธ์บน** A ก็ต่อเมื่อ $\rho \subset A \times A$

หมายเหตุ ρ เป็นความสัมพันธ์**บน** A หมายความว่า ρ เป็นความสัมพันธ์**จาก** A **ไป** A

กล่าวได้ว่า "x สัมพันธ์กับ y" เขียนเป็นสัญลักษณ์ "$x \rho y$" ในกรณีที่ $(x, y) \in \rho$ "x ไม่สัมพันธ์กับ y" แทนด้วย "$x \not\rho y$" ในกรณีที่ $(x, y) \notin \rho$

F_2

ตัวอย่าง 4.3.1

I ให้ P แทนเซตของผู้คนที่มีชีวิตอยู่ในปัจจุบันนี้ ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์บน P

$f = \{ (x, y) \in P \times P :$ x เป็นบิดาของ y $\}$

$b = \{ (x, y) \in P \times P :$ x เป็นน้องชายของ y $\}$

$c = \{ (x, y) \in P \times P :$ x และ y อาศัยอยู่ในประเทศเดียวกัน $\}$

$m = \{ (x, y) \in P \times P :$ x อาศัยอยู่ห่างจาก y น้อยกว่า 1 ไมล์ $\}$

II ให้ $A = \{ 1, 2, 3 \}$ ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์บน A :

$\alpha = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1) (2, 2), (3, 3) \}$

$\beta = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3) \}$

$\gamma = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2) \}$

III ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์บน R :

$A = \{ (x, y) \in R \times R :$ x น้อยกว่า y $\}$

$B = \{ (x, y) \in R \times R :$ x มากกว่า หรือเท่ากับ y $\}$

$C = \{ (x, y) \in R \times R :$ x เท่ากับ y $\}$

$D = \{ (x, y) \in R \times R : x = y + 5 \}$

IV ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์บน Z (จำนวนเต็ม) : $P = \{(x, y) \in Z \times Z : \exists_t \in Z [x-y = 4t]\}$

ดังนั้น $x \rho y$ iff $x-y = 4t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มบางตัว

F_3

ความสัมพันธ์ ρ บน A เป็น**ความสัมพันธ์สะท้อน** (reflexive) ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in A [(x, x) \in \rho]$

จากนิยามนี้เขียนเป็นข้อความแย้งสลับที่ ได้ : ....

ความสัมพันธ์ ρ บน A **ไม่**เป็นความสัมพันธ์สะท้อนก็ต่อเมื่อ $\exists x \in A [(x, x) \notin \rho]$

F_4

ตัวอย่าง 4.3.2

1. α ดังกำหนดใน II ข้างบนนี้ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน เพราะว่า $A = \{1, 2, 3\}$ และ $(2, 2) \in \alpha \wedge (3, 3) \in \alpha \wedge (1, 1) \in \alpha$ ดังนั้น $\forall x \in A, x \alpha x$
2. β ดังกำหนดใน II ข้างบนนี้ **ไม่**เป็นความสัมพันธ์สะท้อน เพราะว่า $2 \in A \wedge (2, 2) \notin \beta$ ดังนั้น $\exists x \in A, x \not\beta x$
3. B ดังกำหนดใน III ข้างบนนี้ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน เพราะว่า $\forall x \in R$, x เท่ากับ x ดังนั้น $\forall x \in R, x \geqslant x$
4. ι ดังกำหนดใน III ข้างบนนี้ **ไม่**เป็นความสัมพันธ์สะท้อน เพราะ..............(1)..............
5. ρ ดังกำหนดใน IV ข้างบนนี้ เป็นความสัมพันธ์สะท้อนพิสูจน์ได้ดังนี้..........(2)..........

---

(1) $2 + 2 \neq 5$

(2)

พิสูจน์

ให้ $x \in Z$

ได้ $x - x = 4(0)$ และ $0 \in z$

$\therefore\ x \rho x$

$\therefore\ \forall x \in Z,\ x \rho x$

$\therefore\ \rho$ **เป็นความสัมพันธ์สะท้อน**

F_5

ความสัมพันธ์ ρ **บน** A **เป็นความสัมพันธ์สมมาตร** (symmetric) **ก็ต่อเมื่อ** $(x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho$ ข้อความแย้งสลับที่ของนิยามนี้ คือ $(y, x) \notin \rho \rightarrow (x, y) \notin \rho$

F_6

ตัวอย่าง 4.3.3

1. γ ดังกำหนดใน II เป็นความสัมพันธ์สมมาตร
2. A ดังกำหนดใน II **ไม่เป็นความสัมพันธ์สมมาตร** เพราะว่า $(1, 2) \in A$ แต่ $(2, 1) \notin A$ $[1 < 2 \wedge 2 \not< 1]$
3. b ดังกำหนดใน I **ไม่เป็นความสัมพันธ์สมมาตร** เพราะ y ไม่เป็นน้องชายของ x
4. ρ ดังกำหนดใน IV เป็นความสัมพันธ์สมมาตร :

พิสูจน์

สมมติว่า $x \rho y$

แล้ว $\exists t \in z,\ x - y = 4t$

แล้ว $y - x = 4(-t)$ และ $-t \in z$

ดังนั้น $y \rho x$

$\therefore\ x \rho y \rightarrow y \rho x$

$\therefore\ \rho$ เป็นความสัมพันธ์สมมาตร

F_7

ความสัมพันธ์ ρ **เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด** (transitive) **ก็ต่อเมื่อ** $(x, y) \in \rho$ **และ** $(y, z) \in \rho$ **แล้ว** $(x, z) \in \rho$

F_8

1. β ดังกำหนดใน II เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด
2. t ดังกำหนดใน III ไม่เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด เพราะว่า $(1, 4) \in t \wedge (4, 1) \in t$ แต่ $(1, 1) \notin t$ $(1\ t\ 4 \wedge 4\ t\ 1 \wedge 1 \not t\ 1)$
3. γ ดังกำหนดใน II ไม่เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด เพราะ............................ ....
4. ρ ดังกำหนดใน IV เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด

พิสูจน์

สมมติว่า $x \rho y$ และ $y \rho z$

แล้ว $\exists t_1 \in Z$, $x - y = 4t_1$ และ $\exists t_2 \in z$, $y - z = 4t_2$

ดังนั้น $x - z = 4(t_1 + t_2)$ และ $t_1 + t_2 \in z$

$\therefore x \rho z$

$\therefore$ ถ้า $x \rho y$ และ $y \rho z$ แล้ว $x \rho z$

$\therefore \rho$ เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด

เพราะ $(1, 2) \in \gamma$, $(2, 1) \in \gamma$ แต่ $(1, 1) \notin \gamma$

แบบฝึกหัด 4.3

จงทดสอบตัวอย่างทั้งหมด ใน F_2

สำหรับ การถ่ายทอด T การสมมาตร S และการสะท้อน R

4.4 **ความสัมพันธ์สมมูล** (Equivalence Relations)

F_1

ความสัมพันธ์ ρ บน A เป็น**ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalence relation) ก็ต่อเมื่อ ρ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive) สมมาตร (symmetric) และถ่ายทอด (transitive)

ตัวอย่าง 4.4.1

c, α, C และ ρ ในตัวอย่างที่ I ถึง IV (F_2 ของหัวข้อ 4.3) เป็นความสัมพันธ์สมมูล

แบบฝึกหัด 4.4

1. ให้ A เป็นเซตใด ๆ α และ β เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิสูจน์ หรือให้ตัวอย่างค้านสำหรับ :

   1.1 ถ้า α และ β เป็นความสัมพันธ์สะท้อน แล้ว $\alpha \cup \beta$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน

   1.2 ถ้า α และ β เป็นการสมมาตร แล้ว $\alpha \cup \beta$ เป็นการสมมาตร

   1.3 ถ้า α และ β เป็นความสัมพันธ์สมมูล แล้ว $\alpha \cup \beta$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

   1.4 ถ้า α เป็นการสมมาตร และการถ่ายทอด แล้ว α เป็นการสะท้อน

2. จงพิสูจน์ว่า : ถ้า α และ β เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว $\alpha \cap \beta$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

3. กำหนดความสัมพันธ์ $\sim$ บน N x N โดย $\sim = \{((a, b), (c, d)) \in (N \times N) \times (N \times N) : a + d = b + c\}$

ข้อสังเกต $(1, 2) \sim (3, 4)$ เพราะว่า $1 + 4 = 2 + 3$

   3.1 จงพิสูจน์ว่า $\sim$ เป็นการสะท้อน (ให้ $(a, b) \in N \times N$ และแสดงให้ได้ว่า $(a, b) \sim (a, b)$)

   3.2 จงพิสูจน์ว่า $\sim$ เป็นการสมมาตร (สมมติว่า $(a, b) \sim (c, d)$ และแสดงให้ได้ว่า $(c, d) \sim (a, b)$)

   3.3 จงพิสูจน์ว่า $\sim$ เป็นการถ่ายทอด (สมมติว่า $(a, b) \sim (c, d)$ และ $(c, d) \sim (e, f)$ และแสดงให้ได้ว่า $(a, b) \sim (e, f)$

4. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   ให้ $Q = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$

   ขอให้สังเกตว่าสมาชิกของ Q เป็นเซตย่อยของ S ให้ $\rho = \{(x, y) \in S \times S : \exists A \in Q, x \in A \wedge y \in A\}$

   จงเขียนสมาชิกทั้งหมดของ ρ

   $\rho = \{$ .... $\}$

   ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S หรือไม่

5. พิจารณาความสัมพันธ์ $\subset$ (เซตย่อยของ) กำหนดบน P(U) เมื่อ U แทนเอกภพสัมพันธ์

5.1 จงพิสูจน์ว่า $\subset$ เป็นการสะท้อนบน P(U)

5.2 จงพิสูจน์ว่า $\subset$ เป็นการถ่ายทอดบน P(U)

5.3 $\subset$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน P(U) หรือไม่..

ทำไม..

4.5 ความสมมูลเป็นพวก ๆ

(Equivalence Classes)

F_1

ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์บนเซต A และให้ $x \in A$ **ความสมมูลเป็นพวก ๆ** ρ **ของ** x เป็นเซตย่อยของ A แทนด้วย $[x]_\rho$ และกำหนดดังนี้ : $y \in [x]_\rho$ iff $x \rho y$

ดังนั้น $[x]_\rho = \{y \in A : x \rho y\}$

F_4

ตัวอย่าง 4.5.1

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $\beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ แล้ว β เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

ความสัมพันธ์สมมูลเป็นพวก ๆ ของ β คือ : $[1]_\beta = \{1, 2\}$, $[2]_\beta = \{1, 2\}$ และ $[3]_\beta = \{3\}$

F_5

ตัวอย่าง 4.5.2

ให้ Z แทนเซต $\{\ldots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ คือเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน Z แล้วสมาชิกของความสมมูลเป็นพวก ๆ ของ ρ มีดังต่อไปนี้ :

$[-1]_\rho = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

$[0]_\rho = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$[1]_\rho = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$

$[2]_\rho = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$

$[3]_\rho = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$

$[4]_\rho = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$[5]_\rho = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$

เรื่อย ๆ ไป

ข้อสังเกต

แต่ละจำนวนเต็ม z อยู่ใน ความสมมูลเป็นพวก ๆ ρ หรือ $[\, z\,]_\rho$

ดังนั้น $x \rho y$ iff $[\, x\,]_\rho = [\, y\,]_\rho$ นั่นคือ ความสัมพันธ์เป็นพวก ๆ เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set) หรือ เซตที่เท่ากัน (equal set)

F_6

ทฤษฎีบท 4.5.1

ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A และ $x \in A$ แล้ว $x \in [\, x\,]_\rho$

พิสูจน์

$x \rho x$ (คุณสมบัติ**การสะท้อน**ของ ρ)

ดังนั้น $x \in [\, x\,]\rho$ (นิยามของ $[\, x\,]_\rho$)

F_7

ทฤษฎี 4.5.2

ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A, $x \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $x \rho y$ ก็ต่อเมื่อ $[x_\rho] = [\, y\,]_\rho$

พิสูจน์

$\Rightarrow$ สมมติว่า $x \rho y$

I **แล้ว** $y \rho x$ (การ**สมมาตร**ของ ρ)

ให้ $a \in [\, x\,]_\rho$

II แล้ว $x \rho a$ (นิยามของ $[\quad]_\rho$)

เพราะฉะนั้น $y \rho a$ (จาก I และ II คุณสมบัติการ**ถ่ายทอด**ของ ρ)

ดังนั้น $a \in [\, y\,]_\rho$ (นิยามของ $[\quad]_\rho$)

เพราะฉะนั้น $a \in [\, x\,]_\rho \to a \in [\, y\,]_\rho$

ข้อโต้แย้งนี้สมมาตรมุ่งต่อ x และ y

ดังนั้น $a \in [\, y]_\rho \to a \in [\, x]_\rho$

นั่นคือ $[\, x\,]\rho = [\, y\,]_\rho$

$\Leftarrow$ สมมติว่า $[\, x\,]_\rho = [\, Y\,]_\rho$

แสดงว่า $x \in [\, x\,]_\rho$ (ทฤษฎี 4.5.1)

ดังนั้น $x \in [y]_\rho$	(เพราะว่า $[y]_\rho = [x]_\rho$)
แล้ว $y \rho x$	(**นิยามของ** $[\ ]_\rho$)
จึงได้ $x \rho y$	(การ**สมมาตร**ของ ρ)

F_8

ทฤษฎี 4.5.3

ให้ ρ **เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน** A

ให้ $x \in A$ **และ** $y \in B$ **แล้ว** $[x]_\rho \cap [y]_\rho = \varnothing$ **หรือ** $[x]_\rho = [y]_\rho$

พิสูจน์

$[x]_\rho \cap [y]_\rho = \varnothing$ **หรือ** $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \varnothing$

สมมติ $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \varnothing$	
แล้ว $\exists a : a \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$	(นิยามของเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง)
ดังนั้น $a \in [x]_\rho$ **และ** $a \in [y]_\rho$	(นิยามของ $\cap$)
แล้ว $x \rho a$ **และ** $y \rho a$	(นิยามของ $[\ ]_\rho$)
เพราะฉะนั้น $x \rho a$ **และ** $a \rho y$	(การสมมาตรของ ρ)
แล้ว $x \rho y$	(การถ่ายทอดของ ρ)
เพราะฉะนั้น $[x]_\rho = [y]_\rho$	(ทฤษฎีบท 4.5.1)

แบบฝึกหัด 4.5

1. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $\beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4),$
   $(5, 5), (6, 6)\}$

   แล้ว β เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S จงหาความสัมพันธ์สมมูลเป็นพวก ๆ ของ β (β - equivalence classes)

   $[1]_\beta = \{ \qquad \}$

   $[2]_\beta = \{ \qquad \}$

   $[3]_\beta = \{ \qquad \}$

   $[4]_\beta = \{ \qquad \}$

   $[5]_\beta = \{ \qquad \}$

   $[6]_\beta = \{ \qquad \}$

2. ให้ A เป็นเซตของดินสอเทียนทั้งหมดในโลก

   $\sigma = \{(x, y) \in A \times A : x$ เป็นสีเดียวกับ $y\}$

   σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A หรือไม่

   .... ถ้าเป็น จงอธิบายความสัมพันธ์สมมูลบน σ

3. ให้ $U = \{1, 2, 3\}$ กำหนด ρ บน P(U) โดย $A \rho B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีสมาชิกอย่างเดียวกัน แล้ว ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน P(U) จงหา

   $[\varnothing]_\rho$ = ...

   $[\{1\}]_\rho$ = ...

   $[\{1,2\}]_\rho$ = ...

   $[\{1,2,3\}]_\rho$ = ...

4. พิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $\sim$ กำหนดบน $N \times N$ ในข้อ 3 ของแบบฝึกหัด 4.4

   4.1 จงแจกแจงสมาชิกของความสัมพันธ์สมมูล $\sim$ ต่อไปนี้

   $[(1,3)]_\sim$

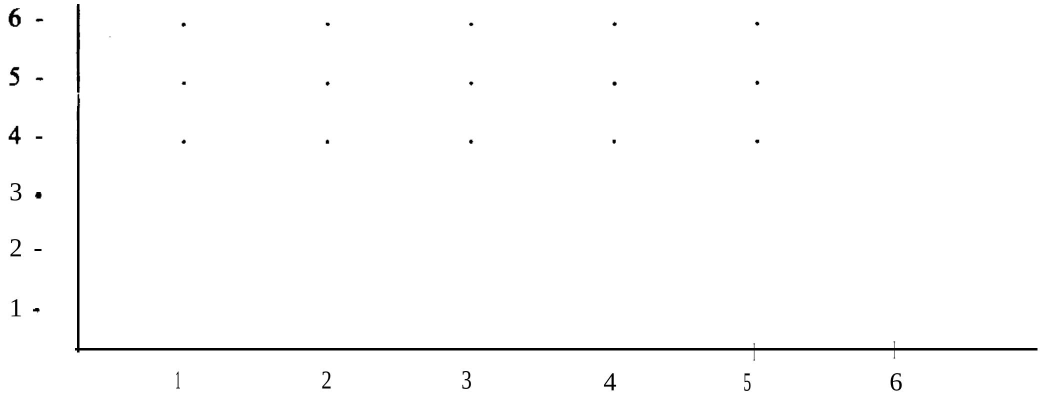
   $[(1, 2)]_\sim$

$[\,(1, 1)\,]_{\sim}$

$[\,(2, 1)\,]_{\sim}$

$[\,(3, 1)\,]_{\sim}$

4.2 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์สมมูล $\sim$ (เป็นพวก ๆ) ของข้างบนนี้



5. ให้ S แทนเซตของสัญลักษณ์ที่อยู่ในรูป

"$\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & n \end{array}$" เมื่อ $m \in Z$ และ $n \in N$ ดังตัวอย่าง

เช่น : $\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 6 \end{array}$, $\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 5 \end{array}$, $\begin{array}{c|c} 3 & \\ \hline & 1 \end{array}$, $\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 2 \end{array}$ เรื่อย ๆ ไป

ให้ $\approx \; = \{ (\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & n \end{array} , \begin{array}{c|c} p & \\ \hline & q \end{array}) : mq = np \}$ แล้วจะมี

ดังเช่น $\begin{array}{c|c} 2 & \\ \hline & 3 \end{array} \approx \begin{array}{c|c} 8 & \\ \hline & 12 \end{array}$ เพราะว่า $2(12) = 3(8)$

5.1 จงพิสูจน์ว่า $\approx$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน S

5.2 จงเขียนสมาชิกในข้อต่อไปนี้อย่างน้อย 5 สมาชิก

$[\; \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \;]_{\approx}$

$[\; \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 3 \end{array} \;]_{\approx}$

$[\; \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 4 \end{array} \;]_{\approx}$

$[\; \begin{array}{c|c} -2 & \\ \hline & 3 \end{array} \;]_{\approx}$

5.3 ให้ $Q = \{ [\; \begin{array}{c|c} m & \\ \hline & n \end{array} \;]_{\approx} : m \in Z,\; n \in N \}$

แล้ว Q เป็นเซตของ ≈ ความสัมพันธ์สมมูลเป็นพวก ๆ ของ S

เรียก Q ว่า เซตของจำนวนตรรกยะได้หรือไม่

.... ถ้า Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

ทั้งหมดแล้ว จำนวนตรรกยะคืออะไร ....

....

4.6 ผลแบ่งกั้น (Partitions)

F_1

ให้ $\overline{\underline{X}}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง

a เป็น**ผลแบ่งกั้น**ของ $\overline{\underline{X}}$ ก็ต่อเมื่อ

1) $\forall A \in a, A \subset \overline{\underline{X}}$

2) $\forall A \in a, A \neq \varnothing$

3) $\forall A \in a, \forall B \in a, A \neq B \rightarrow A \cap B = \varnothing$

4) $\forall x \in \overline{\underline{X}}, \exists A \in a, x \in A$

ข้อสังเกต

จาก 1) และ 2) จะเห็นว่าผลแบ่งกั้น a ของ $\overline{\underline{X}}$ คือกลุ่มของเซตย่อย ที่ไม่ใช่เซตว่างของ $\overline{\underline{X}}$ ข้อ 3) กล่าวว่าสมาชิกที่แตกต่างกันของ a เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint) และข้อ 4) กล่าวว่า ทุก ๆ สมาชิกของ X เป็นของ (belong to) บางสมาชิกของผลแบ่งกั้น a

ดังนั้น a เป็นผลแบ่งกั้นของ $\overline{\underline{X}}$ ก็ต่อเมื่อ $a \subset [\, P(\overline{\underline{X}})\ \ \{\varnothing\}\,]$ และ $\forall A \in a, \forall B \in a, A \cap B \neq \varnothing \rightarrow A = B$ และ $\overline{\underline{X}} \subset \bigcup_{A \in a} A$

หมายเหตุ : $P(\overline{\underline{X}})$: ผลแบ่งกั้นของ $\overline{\underline{X}}$

F_2

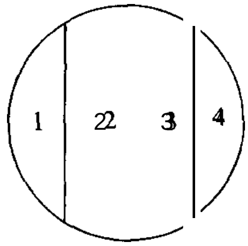
ตัวอย่าง 4.6.1

ให้ $\overline{\underline{X}} = \{1, 2, 3, 4\}$

$a = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$

แล้วทุก ๆ สมาชิกของ a เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $\overline{\underline{X}}$ ผลตัด (intersection) ของสองสมาชิกใด ๆ ของ a เป็นเซตว่าง และทุก ๆ สมาชิกของ $\overline{\underline{X}}$ เป็นของบางสมาชิกของ a

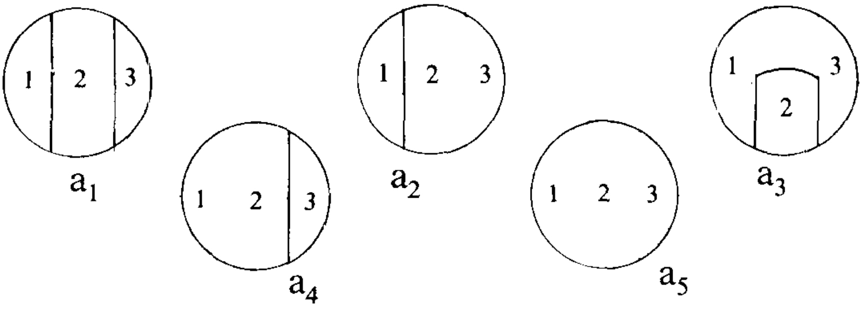
เพราะฉะนั้น a เป็นผลแบ่งกั้นของ $\overline{\underline{X}}$ แสดงผลแบ่งกั้น a ด้วยรูป ดังนี้ :



F_3

ตัวอย่าง 4.6.2

สมมติ $\underline{X} = \{1, 2, 3\}$ แล้ว จะมีผลแบ่งกั้นต่าง ๆ กัน ของ $\underline{X}$ เพียง 5 ชนิด ดังนี้ :



$a_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$a_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

$a_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$

$a_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$

$a_5 = \{\{1, 2, 3\}\}$

F_4

ตัวอย่าง 4.6.3

ให้ Z แทนเซตของ $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ของจำนวนเต็ม

ให้ E แทนเซตของจำนวนคู่ทั้งหมด

O แทนเซตของจำนวนคี่ทั้งหมด

แล้ว $\{E, O\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ Z

F_5

ตัวอย่าง 4.6.4

ให้ $\underline{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\sigma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

จะสังเกตเห็นได้ว่า σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\underline{X}$

ให้ $a = \{[x]_\sigma : x \in \underline{X}\}$

แล้ว $a = \{[1]_\sigma, [2]_\sigma, [3]_\sigma, [4]_\sigma, [5]_\sigma\}$

$= \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$

a เป็นผลแบ่งกั้นของ $\underline{X}$

แบบฝึกหัด 4.6

1. ให้ $\underline{X} = \{1, 2\}$, $\beta = \{\{\ \}, \{2\}, \{2, 3\}\}$ จงให้เหตุผลที่แตกต่างกัน 4 ข้อ ว่าทำไม β ไม่เป็นผลแบ่งกั้นของ $\underline{X}$

    1.1

    1.2

    1.3

    1.4

2. จงให้ผลแบ่งกั้น (partition) ที่แตกต่างทั้งหมดของ $\{1, 2\}$

3. ให้ $\underline{X} = \{1, 2, 3\}$, $\sigma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ แล้ว σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\underline{X}$ ให้ $a_i = \{[x]_\sigma : x \in \underline{X}\}$ แล้ว a_i เป็นหนึ่งในห้าผลแบ่งกั้นที่แตกต่างกันของ $\underline{X}$ ดังตัวอย่างใน F_4 ของหัวข้อ 4.3 ข้อ 2

4.7 ความสัมพันธ์สมมูลกับผลแบ่งกั้น

(Equivalence Relations VS. Partitions)

F_1

ทฤษฎี 4.7.1

ให้ $\underline{\overline{X}}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง

a เป็นผลแบ่งกั้นของ $\underline{\overline{X}}$ และให้

$\sigma = \{ (x, y) \in \underline{\overline{X}} \times \underline{\overline{X}} : \exists A \in a \ni x \in A \wedge y \in A \}$

แล้ว σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\underline{\overline{X}}$

พิสูจน์

1) ให้ $x \in \underline{\overline{X}}$

แล้ว $\exists A \in a \ni x \in A$

และ $\exists A \in a \ni x \in A \wedge x \in A$

ดังนั้น $x \sigma x$

$\therefore \sigma$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน

2) สมมติว่า $x \sigma y$

แล้ว $\exists A \in a \ni x \in A \wedge y \in A$

และ $\exists A \in a \ni y \in A \wedge x \in A$

ดังนั้น $y \sigma x$

$\therefore \sigma$ เป็นความสัมพันธ์สมมาตร

3) สมมติ $x \sigma y$ และ $y \sigma z$

แล้ว $\exists A_1 \in a \ni x \in A_1 \wedge y \in A_1$

และ $\exists A_2 \in a \ni y \in A_2 \wedge z \in A_2$

แล้ว $y \in A_1 \cap A_2$

ดังนั้น $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้น $A_1 = A_2$

แล้ว $x \in A_1 \wedge z \in A_1$

เพราะฉะนั้น $x \sigma z$

$\therefore \sigma$ เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด

จาก 1), 2) และ 3) สรุปได้ว่า σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\underline{\overline{X}}$

ทฤษฎี 4.7.2

ให้ $\overline{X}$ เป็นเซต ๆ หนึ่ง σ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\overline{X}$

และให้ $\mathcal{B} = \{ [x]_\rho : x \in \overline{X} \}$ แล้ว $\mathcal{B}$ เป็นผลแบ่งกั้นบน $\overline{X}$

พิสูจน์

1) ให้ $B \in \mathcal{B}$

แล้ว $B = [x]_\rho$, $\exists x \in \overline{X}$

ดังนั้น $B \subset \overline{X}$

$\therefore \forall B \in \mathcal{B}, B \subset \overline{X}$

2) ให้ $B \in \mathcal{B}$

แล้ว $B = [x]_\rho$, $\exists x \in \overline{X}$

จึงได้ $x \in [x]_\rho$

ดังนั้น $B \neq \varnothing$

. $\forall B \in \mathcal{B}, B \neq 0$

3) ให้ $A \in \mathcal{B}$ และ $B \in \mathcal{B}$

แล้ว $A = [x]_\rho$, $\exists x \in \overline{X}$

และ $B = [y]_\rho$, $\exists y \in \overline{X}$

สมมติ $A \cap B \neq 0$

นั่นคือ $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq 0$

แล้ว $[x]_\rho = [y]_\rho$

นั่นคือ $A = B$

.. $\forall A \in \mathcal{B}, \forall B \in \mathcal{B}, A \cap B \neq \varnothing \rightarrow A = B$

4) ให้ $x \in \overline{X}$

ให้ $A = [x]_\rho$

แล้ว $A \in \mathcal{B} \wedge x \in A$

$\therefore \forall x \in \overline{X}, \exists A \in \mathcal{B}$ (ชื่อว่า $[x]_\rho$), $x \in A$ สรุปได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $\overline{X}$

F_3

นิยาม 4.7.1

ให้ $\mathfrak{a}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $\underline{\overline{X}}$ และให้ $\sigma = \{(x, y) \in \underline{\overline{X}} \times \underline{\overline{X}} : \exists A \in \mathfrak{a}, x \in A \wedge y \in A\}$ แล้วเรียก σ ว่า **ความสัมพันธ์สมมูลอุปนัยบน $\underline{\overline{X}}$ โดย** $\mathfrak{a}$ (the equivalence relation induced on $\overline{X}$ by $\mathfrak{a}$)

F_4

นิยาม 4.7.2

ให้ ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\underline{\overline{X}}$ และให้ $\mathcal{B} = \{[x]_\rho : x \in \underline{\overline{X}}\}$ แล้วเรียก $\mathcal{B}$ ว่า **ผลแบ่งกั้นอุปนัยบน $\underline{\overline{X}}$ โดย** ρ (the partition induced on $\underline{\overline{X}}$ by ρ

F_5

ตัวอย่าง 4.7.1

ให้ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ และให้ $\mathfrak{a} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ จะเห็นว่า $\mathfrak{a}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ S ความสัมพันธ์สมมูลอุปนัยบน $\underline{\overline{X}}$ โดย $\mathfrak{a}$ คือ $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

F_6

ตัวอย่าง 4.7.2

ให้ $T = \{1, 2, 3, 4\}$

ให้ $\rho = \{(1,1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

จะเห็นว่า ρ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน s

และผลแบ่งกั้นอุปนัยบน $\underline{\overline{X}}$ โดย ρ คือ$\{[1]_\rho, [2]_\rho, [3]_\rho, [4]_\rho$ซึ่งก็คือ $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

แบบฝึกหัด 4.7

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$ ถ้า a เป็นความสัมพันธ์สมมูลอุปนัยบน A โดย a แล้ว a = ...

....

2. ให้ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ

   $\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

   ถ้า P เป็นผลแบ่งกั้นอุปนัยบน B โดย β

   แล้ว P= ....

3. ให้ P (ρ) เป็นผลแบ่งกั้นอุปนัยบน $\underline{X}$ โดย P

   ให้ $\rho($ P $)$ แทนความสัมพันธ์สมมูลอุปนัยบน $\overline{X}$ โดย P แล้ว

   $\rho($ P $(\rho))=$ ....

   และ P $(\rho($ P $))$ = ...