บทที่ 3

เซต (Sets)

3.1 การกำหนดเซต (The Specification of a Set)

F_1

เซต คือ กลุ่มที่แจ่มชัด (well-defined) ของสิ่งของ ซึ่งเรียกว่า **สมาชิก** (element or member) ของเซต ใช้อักษรตัวเล็ก เช่น x, y, z แทนสมาชิก และใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น A, B หรือ C แทนชื่อเซต

ให้ "$x \in A$" แทนการกล่าวว่า x เป็นสมาชิกของ A

และ "$x \notin A$" แทนการกล่าวว่า x..........

ไม่เป็นสมาชิกของ A

F_2

เมื่อกำหนดเซต A ให้ จะต้องมีสิ่งที่แจ่มชัดเรียก A ว่าเซต**แจ่มชัด** (well-defined) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ x สามารถตัดสินได้ หรือไม่ได้ว่า x เป็นสมาชิกของ A

F_3

วิธีทั่วไปของการกำหนดเซต คือ **การแจกแจง** (list) สมาชิกทั้งหมดของมัน เช่น B เป็นเซตของจำนวนนับทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 0 และ 6 คือ :

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

นั่นคือ B **เป็นเซตที่**.. ....

แจ่มชัด

F_4

การกำหนดเซตอีกวิธีหนึ่ง คือการใช้ **รูปแบบผันกลับได้** (biconditional form) :

$x \in A \leftrightarrow P(x)$

(ตัวบ่งปริมาณในที่นี้ละไว้ในฐานเข้าใจว่า เป็นตัวบ่งปริมาณทั้งหมด)

ดังเช่น

กำหนดให้ B เป็นจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 0 และ 6 เขียนได้ดังนี้ :

$x \in B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in N \wedge 0 < x < 6$

ข้อสังเกต

ถ้าสิ่งของนั้นไม่อยู่ใน (ไม่เป็นสมาชิกของ) เซต B เขียนได้เป็น :

$x \notin B$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin N \vee x \leqslant 0 \vee 6 \leqslant x$

รูปผันกลับนี้ เรียกว่า การเขียนเซตแบบ**อธิบายสมาชิก**ในเซต (set builder form)

"$x \in A$ ก็ต่อเมื่อ $P(x)$" แทนด้วย $A = \{x : P(x)\}$ อ่านว่า A เท่ากับเซตของ x ทั้งหมด ซึ่ง $P(x)$

ดังนั้นเซต B ในตัวอย่างข้างบนนี้เขียนได้เป็น..

$B = \{x : x \in N \wedge 0 < x < 6\}$

แบบฝึกหัด 3.1

พิจารณาเซตต่อไปนี้ :

1) A เป็นเซตของคำตอบจริงของ $x^4 = 1$

2) B เป็นเซตของคำตอบเชิงซ้อนของ $x^4 = 1$

3) C เป็นเซตของจำนวนเต็มระหว่าง -1 กับ 1

4) D เป็นเซตของจำนวนจริงระหว่าง -1 กับ 1

5) E เป็นเซตของจำนวนนับระหว่าง $\frac{1}{3}$ กับ $\frac{2}{3}$

1. จงเขียน (เมื่อเป็นไปได้) แต่ละเซตข้างบนนี้โดยวิธีแจกแจงสมาชิก (listing)

   1)

   2)

   3)

   4)

   5)

2. จงเขียนแต่ละเซตข้างบนนี้โดยใช้รูปผันกลับได้ (biconditional form)

   1)

   2)

   3)

   4)

   5)

3. จงเขียนเซตแต่ละเซตข้างบนนี้ เป็นแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก (set builder form)

   1)

   2)

   3)

   4)

   5)

พิจารณานิยามต่อไปนี้ :

1) $A = \{1, 2, 3\}$

2) $B = \{x : x \neq x\}$

3) $c = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

4) $D = \{n/2 : \ldots n \in N\}$

5) E กำหนดโดย $x \in E$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin A$

6) $F = \{x : \exists a \in A \ni x = 3a\}$

4. จงตัดสินว่าเซตข้างบนนี้แจ่มชัด (well-defined) หรือไม่

1) 4)

2) 5)

3) 6)

5 . ข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1) $6 \in A$........................ 4) $6 \in D$......................................

2) $6 \in B$ . . . . 5) $6 \in E$..

3) $6 \in C$ . . . . 6) $6 \in F$...

3.2 เอกภพสัมพัทธ์ เซตว่าง ส่วนเติมเต็ม
(Universal set, Empty set, Complementation)

F_1

กลุ่มของสิ่งของทั้งหมดภายใต้ความสนใจรวมกันอยู่ในเซต ๆ หนึ่ง เรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ (the universal set) แทนด้วย U ด้วยเหตุนี้จึงได้ $\forall x\,[\,x \in U\,]$

เซตพิเศษอีกเซตหนึ่งที่ไม่มีสมาชิกใดเลย เรียกว่า **เซตว่าง** (the empty set) แทนด้วย $\varnothing$ หรือ $\{\ \}$

ดังนั้น ถ้า $\underline{X}$ เป็นเซตว่าง (เขียนได้ว่า $\underline{X} = \varnothing$) ก็ต่อเมื่อ $\forall x\,[\,x \notin \underline{X}\,]$ สำหรับข้อความแย้งสลับที่ ได้ว่า $\underline{X}$ **ไม่เป็นเซตว่าง** (non-empty) ซึ่งแทนด้วย $\underline{X} \neq \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x\,[\,x \in \underline{X}\,]$

F_2

ทุก ๆ เซต A จะเกี่ยวข้องกับอีกเซตหนึ่งเสมอ เรียกเซตนั้นว่า **ส่วนเติมเต็มของ** A (the complement of A) แทนด้วย A' และกำหนด A' ดังนี้ $: x \in A'$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin A$ ดังนั้น $A' = \{\,x : x \notin A\,\}$ ดังเช่น

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็น R และ $A = \{\,x : 0 < x$ และ $x < 2\,\}$ แล้ว $x \in A$ ก็ต่อเมื่อ $0 < x \wedge x < 2$

ดังนั้น $x \notin A$ ก็ต่อเมื่อ $0 \geqslant x \vee x \geqslant 2$

เพราะฉะนั้น $A' =$ ....

$\{\,x : x \leqslant 0 \vee 2 \leqslant x\,\}$

แบบฝึกหัด 3.2

1. M u = $\{1, 2\}$ แล้ว $\{1\}' = \{\ \}$ และ $\{1, 2\}' =$ ....

2. ให้ $B = \{x \in N : x < 5\}$

   2.1 ในกรณีนี้เอ nnwสัมพัทธ์คือ. ....

   2.2 จงใช้รูปผันกลับ (biconditional form) กำหนด B′

   2.3 สามารถกำหนด B' โดยวิธีแจกแจงสมาชิกหรือไม่

3. ถ้า A = [x ∈ R: P(x)] แล้ว A' = [x ....

4. $\{x : x = x\} =$ ....

   $\{x : x \neq x\} =$ ....

5. $U' =$ ....

   0' = ...

   $(D')' =$ ....

3.3 **การอยู่ในและการเท่ากัน** (Containment and Equality)

F_1

ให้ A และ B แทนเซตใด ๆ กล่าวว่า A เป็น **เซตย่อย** (subset) ของ B (แทนความสัมพันธ์นี้ด้วย $A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ $\forall x\,[\,x \in A \rightarrow x \in B\,]$

อย่าลืมว่าได้ละตัวบ่งปริมาณไว้ และเขียนเป็นรูปอย่างง่ายได้ ดังนี้

$A \subset B$ **ก็ต่อเมื่อ** $x \in A \rightarrow x \in B$

ดังนั้น A เป็นเซตย่อยของ B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย

ดังเช่น $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3, \ldots\ldots., 10\}$

แสดงว่า..

$A \subset B$

F_2

ในการพิสูจน์ว่า $A \subset B$ โดยทั่วไปใช้กฎสำหรับการพิสูจน์แบบแจงเหตุไปสู่ผล ดังนี้ : สมมติว่า $x \in A$ แล้วใช้เหตุ (premise) อื่น ๆ จนสรุปเป็นหลักเกณฑ์ (deduce) ว่า $x \in B$

ตัวอย่าง 3.3.1

ให้ $A = \{x : (x - 1)(x - 2) = 2\}$

$B = \{x : 0 < x < \pi\}$

ในการพิสูจน์ว่า A อยู่ใน B (is contained in B)

ตอนแรก : สมมติว่า $x \in A$

แล้ว $(x-1)(x-2) = 0$

ดังนั้น $x-1 = 0$ หรือ $x-2 = 0$

ได้ $x = 1$ หรือ $x = 2$

ตอนต่อไป : จาก $0 < x < \pi$

เพราะฉะนั้น $x \in B$

แสดงว่า ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

นั่นคือ.. ....

A C B

F_3

ให้ $A \not\subset B$ แทน A ไม่เป็นเซตย่อยของ B ข้อความแย้งสลับที่ของนิยามข้างบนนี้ คือ

$A \not\subset B$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x\,[x \in A \wedge x \notin B]$

ดังเช่น

$A = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

และ $B = \{x \in R : x < 1\}$

ในการพิสูจน์ว่า A ไม่เป็นเซตย่อยของ B จะต้องแสดงให้ได้ว่า มีสมาชิก x บางตัว ซึ่ง $x \in A$ แต่ $x \notin B$

ในกรณีที่ $x = 1 : 1 \in A \wedge 1 \notin B$

เพราะฉะนั้น $A \not\subset B$

F_4

ให้ A และ B แทนเซตใด ๆ กล่าวได้ว่า A **เท่ากับ** B (แทนความสัมพันธ์นี้ด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ $\forall x\,[x \in A \leftrightarrow x \in B]$ โดยกฎข้อความผันกลับได้ (Biconditional law) ได้ว่า

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A \rightarrow x \in B$ และ $x \in B \rightarrow x \in A$ ดังนั้น $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ในการพิสูจน์ว่า $A = B$ ต้องพิสูจน์ถึงความสัมพันธ์ 2 อย่าง คือ

1) ....

2) .. ..

ให้ $A \neq B$ แทน A **ไม่**เท่ากับ B

1) $A \subset B$

2) B C A

แบบฝึกหัด 3.3

ข้อต่อไปนี้ จริงหรือเท็จ จงให้เหตุผล

1. $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2\}$

2. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

3. $\{1, 2\} \subset \{1, 2\}$

4. $\{I, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

5. $\{1, 2, 2, 3\} = \{I, 2, 3\}$

6. $\{1, 2, 3 = \{2, 3, 4\}$

7. $\forall x, (x \in A \rightarrow x \in U)$

8. $\forall \chi,](; \chi \in \varnothing \rightarrow x \in A)$

9. $A \subset U$

10. 0 c A

11. $\{x \in R : 1 - (x-1)^2 > 0\} = \{x \in R : 0 < x$ และ $x < 2\}$

12. $\{x \in R : x^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}$

13. $\{x \in R : x^2 = -3\} = \varnothing$

14. จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ของนิยามของการเท่ากันของเซต : A **ไม่เท่ากับ** B ก็ต่อเมื่อ
    $\exists x$, (____________หรือ____________)

15. ให้ $A = \{0, 1\}$ และให้ $B = \{0\}$ จงใช้ข้อ 14 พิสูจน์ว่า $A \neq B$

3.4 **ผลตัด ผลผนวก ส่วนเติมเต็ม และผลต่างสมมาตร**

(Intersection, Union, Relative Complementation, and Symmetric Difference)

F_1

ให้ A และ B แทนเซตใด ๆ **ผลตัดของ A กับ** B แทนด้วย $A \cap B$ กำหนดได้ดังนี้ : $x \in A \cap B$ **ก็ต่อเมื่อ** $x \in A \wedge x \in B$

ดังนั้น $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

ผลผนวกของ A **กับ** B แทนด้วย $A \cup B$ และกำหนดได้ดังต่อไปนี้ :

$x \in A \cup B$ **ก็ต่อเมื่อ** $x \in A \vee x \in B$

ดังนั้น $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

F_2

ส่วนเติมเต็มของ B ที่สัมพันธ์กัน A แทนด้วย A-B กำหนดได้ดังนี้ :

$x \in A\text{-}B$ **ก็ต่อเมื่อ** $x \in A \wedge x \notin B$

ดังนั้น $A\text{-}B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A\} \cap \{x : x \notin B\}$

$= A \cap B'$

ผลต่างสมมาตรของ A และ B **คือเซตซึ่งแทนด้วย** $A \Delta B$ กำหนดได้ดังนี้ :

$x \in A \Delta B$ iff $x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap B$

ดังนั้น $A \Delta B = \{x : x \in A \cup B\} \cap \{x : x \notin A \cap B\}$

$= (AUB) - (A \cap B)$

กล่าวได้ว่า เซต A และ B เป็น **เซตต่างสมาชิก** (disjoint sets) ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \varnothing$

แบบฝึกหัด 3.4

1. ให้ A = { 1, 2, 3, 4 } , B = { 3, 4, 5, 6 } แล้ว

   1.1 A∩B = {   }

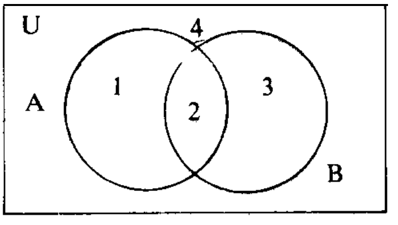
   1.2 AUB = ...

   1.3 A - B = ...

   1.4 B A = ...

   1.5 A A B = ...

2. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U และ เซต A และ B แทนด้วยแผนภาพเวนน์ ดังนี้ :



   จงบอกชื่อขอบเขต (region) ของ

   2.1 A′ = ...

   2.2 A∩B = ...

   2.3 AUB = ...

   2.4 A-B = ...

   2.5 B-A = ...

   2.6 AA13 = ...

   2.1 BAA = ...

   2.8 แผนภาพจะเป็นรูปใด ถ้า A และ B เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set) และถ้า ACB

3. จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ของ :

   3.1 ผลตัด (intersection)

   3.2 ผลผนวก (union)

   3.3 ส่วนเติมเต็ม (relative complement)

3.4 ผลต่างสมมาตร

3.5 เซตต่างสมาชิก

4. ถ้า $A-B = \varnothing$ แล้วอะไร คือความสัมพันธ์ระหว่าง A และ B

5. ถ้า $A-B = 0$ และ $B-A = 0$ แล้ว ....

6. ถ้า $A-B = A$ แล้ว $A \cap B =$ ....

7. ให้ $A = \{ x \in U : P(x) \}$

$B = \{ x \in U : Q(x) \}$

7.1 $\{ x \in u : \sim P(x) \} =$ ....

7.2 $[x \in U : P(x) \wedge Q(x) \} =$ ....

7.3 $\{ x \in U : P(x) \vee Q(x) \} =$ ....

7.4 $\{ x \in U : P(x) \wedge \sim Q(x)'] =$ ....

7.5 $\{ x \in U : P(x) \rightarrow Q(x) \} =$ ....

8. $U-A =$ ....

9. $A-U =$ . . . , ...

10. $0 - A \cong$ ....

11. $A - 0 =$ ....

12. $A-A =$ ....

3.5 ดรรชนีกลุ่มของเซต (Indexed Collections of Sets)

F_1

ให้ I เป็นเซต ๆ หนึ่ง สำหรับ $i \in I$ ให้ A_i เป็นเซต แล้ว $\{A_i : i \in I\}$ เรียกว่า**กลุ่มของเซตดรรชนีโดย** I (a collection of sets indexed by I)

ตัวอย่าง 3.5.1

สำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $A_n = \{x \in R : -\frac{1}{n} < x < n\}$ แล้วได้

$A_1 = \{x \in R : -1 < x < 1\}$

$A_2 = \{x \in R : -\frac{1}{2} < x < 2\}$

$A_3 = \{x \in R : -\frac{1}{3} < x < 3\}$ เรื่อย ๆ ไป

ดังนั้น $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_n : n \in N\}$

เรียกว่ากลุ่มของเซตดรรชนีโดย N

F_2

ได้จำกัดความ ผลผนวก และผลตัดในกรณีที่มีเซตสองเซตแล้ว ต่อไปนี้จะจำกัดความในกรณีที่มีเซตหลายเซต

ให้ $\{A_i : i \in I\}$ เป็นกลุ่มของเซต

ผลผนวกของ $\{A_i : i \in I\}$ เป็นเซต ที่แทนด้วย $\bigcup_{i \in I} A_i$ และนิยามได้ดังนี้ :

$$\boxed{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{iff} \quad \exists i \in I\,[x \in A_i]}$$

ตัวอย่าง 3.5.2

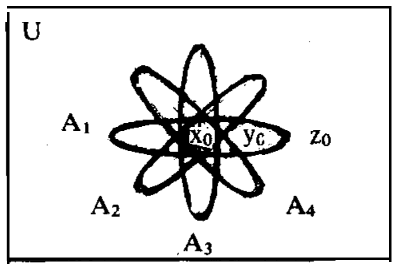
พิจารณากลุ่ม $\{A_n : n \in N\}$ กำหนดดังข้างบนนี้

ในกรณีนี้ $\bigcup_{n \in N} A_n = \{x \in R : -1 < \infty\}$

และ $\bigcap_{n \in N} A_n = \{x \in R : 0 \leq x < 1\}$

แบบฝึกหัด 3.5

1. ให้ $I = \{1, 2, 3, 4\}$ และให้กลุ่ม (collecttion) $\{ A_i : i \in I \}$ ดังแผนภาพเวนน์ :



ข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ :

1.1 $\exists i \in I,\ z \in A_i$ ....

1.2 $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ....

1.3 $\exists i \in I,\ y \in A_i$ ....

1.4 $y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ....

1.5 $\forall i \in I,\ y \in A_i$ ....

1.6 $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ....

1.7 $\exists i \in I,\ x \in A_i$ ....

1.8 $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ....

1.9 $\forall i \in I,\ x \in A_i$ ....

1.10 $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ....

1.11 $\bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ ....

2. สำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $A_n = \{ x \in R : -n < x < n \}$

แล้ว $A_1 = \{ x \in R : -1 < x < 1 \}$

$A_2 = \{$ .... $\}$

$A_3 = \{$ .... $\}$ เรื่อยๆ ไป

และ $\bigcup_{n\in N} A_n$ = {............................ } และ $\bigcap_{n\in N} A_n$ = {............................ }

3. สำหรับแต่ละ n $\in$ N ให้

A_n = { $x \in$ **R : 0** $\leqslant x \leqslant$ **(-1)"** }
-ii-

A_1 = {..}

A_2 = {..}

A_3 = {..}

$\bigcup_{n\in N} A_n$ = {..}

$\bigcap_{n\in N}$ = {..

4. สำหรับแต่ละ $n \in$ **N** ให้ B_n = { **1, 2, 3, ...** n }

แล้ว B_1 = { .... }

B_2 = { .... }

$\bigcap_{n\in N} B_n$ = {..}

และ $\bigcup_{n\in N} B_n$ = {..}

5. จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ของนิยามของผลผนวกของ { Ai : **i** $\in$ I }

$x \notin \bigcup_{i\in I}$ Ai ก็ต่อเมื่อ.. ....

6. จงตัดสินแต่ละขั้นตอน ของข้อโต้แย้งต่อไปนี้

x $\in$ [$\bigcup_{i\in I}$ Ai]' iff **x** $\notin \bigcup_{i\in I}$ Ai โดยนิยามของ...

iff $\forall$i $\in$ **I, x** $\notin$ Ai โดย...

iff vi $\in$ **I, x** $\in$ **A',** โดยนิยามของ ....

iffx $\in \bigcap_{i\in I} A_i'$ โดยนิยามของ ....

ข้อโต้แย้งนี้พิสูจน์ว่า...

7. จงพิสูจน์ว่า

$(\bigcap_{i\in I} Ai)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$

8. ให้ Q^+ แทนเซตของจำนวนตรรกยะบวกทั้งหมดสำหรับแต่ละ $q \in Q^+$ ให้ $S_q = \{ x \in R : 0 < x < q \}$

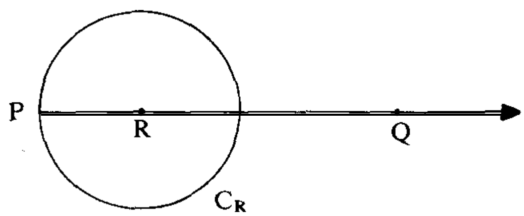
$\bigcap_{q \in Q^+} S_q$ = ...

$\bigcup_{q \in Q^+} S_q$ = ...

9. ให้ $\overrightarrow{PQ}$ แทนรังสีอนันต์ จาก P ไป Q สำหรับแต่ละ $R \in \overrightarrow{PQ}$ ให้ C_R เป็นภายในของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ R และผ่าน P

9.1 $\bigcup_{R \in PQ} C_R$ คืออะไร

9.2 $\bigcap_{R \in PQ} C_R$ คืออะไร



3.6 การพิสูจน์ของความสัมพันธ์ทางเซต

(On Proof of Set Relations)

F_1

ความสัมพันธ์ที่มีประโยชน์มาก ระหว่างเซต A และ B คือ การเท่ากัน ($A = B$) และความเป็นเซตย่อย ($A \subset B$) หัวข้อนี้จะแสดงวิธีพิสูจน์ โดยใช้ความสัมพันธ์ทั้งสองนี้ วิธีพิสูจน์จะใช้ทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ และนิยามตั้งแต่หัวข้อ 3.1 ถึง 3.5

อย่าลืมว่า $A = B \Leftrightarrow [(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$ ดังนั้นการพิสูจน์ว่าเซต A และเซต B เท่ากัน จะต้องแสดงให้ได้ความจริง 2 ประการคือ : 1) $x \in A \rightarrow x \in B$ และ 2) $x \in B \rightarrow x \in A$

F_2

อย่าลืมว่าแบบเงื่อนไข $P \rightarrow Q$ เป็นจริง นั้น Q เป็นจริงเมื่อไรก็ตามที่ P เป็นจริง ดังเช่น

การหาค่าความจริง ของ $x \in A \rightarrow x \in B$ โดยสมมติว่า "$x \in A$" เป็นจริง และแสดง (โดยใช้นิยามและทฤษฎีทางตรรกศาสตร์) ให้ได้ว่า "$x \in B$" เป็นจริงด้วย

วิธีการพิสูจน์หาความจริงของประโยคเงื่อนไขนี้ เรียกว่ากฎสำหรับการพิสูจน์แบบเงื่อนไข (Rule for Conditional Proof)

F_3

แสดงด้วยตัวอย่างทฤษฎีอย่างง่าย : $A \cap B = B \cap A$ ซึ่งเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของเซตสองเซต คือเซต $A \cap B$ และเซต $B \cap A$ ความสัมพันธ์ในที่นี้ คือ "ความเท่ากัน"

จึงเริ่มต้นด้วยการสมมติว่า $x \in A \cap B$ และแสดงให้ได้ว่าเหตุนี้ทำให้เกิดผล $x \in B \cap A$

ต่อไปสมมติว่า $x \in B \cap A$ และแสดงให้เกิดผลว่า $x \in A \cap B$

F_4

การพิสูจน์ทฤษฎี : จากการวิเคราะห์ ใน F_3 เขียนการพิสูจน์ได้ดังนี้ :

สมมติว่า $x \in A \cap B$

$\therefore x \in A \wedge x \in B$ (นิยามของ ∩)

$\therefore x \in B \wedge x \in A$ (กฎการสลับที่สำหรับ ∧)

$\therefore x \in B \cap A$ (นิยามของ ∩)

I ดังนั้น $x \in A \cap B \rightarrow x \in B \cap A$ (กฎของการพิสูจน์แบบเงื่อนไข)

ต่อไปสมมติว่า $x \in B \cap A$

$\therefore x \in B \wedge x \in A$ (นิยามของ ∩)

$\therefore x \in A \wedge x \in B$ (กฎการสลับที่สำหรับ ∧)

$\therefore x \in A \cap B$ (นิยามของ ∩)

II ดังนั้น $x \in B \cap A \rightarrow x \in A \cap B$ (กฎของการพิสูจน์แบบเงื่อนไข)

จาก I และ II สรุปได้ว่า $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A$

(กฎการผันกลับได้ หรือ Biconditional law)

เพราะฉะนั้น $A \cap B = B \cap A$ (นิยามการเท่ากันของเซต)

F_5

ข้อทดสอบ

จงหาเหตุผลและขั้นตอนที่หายไป สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎี $(A \cap B)' = A' \cup B$

พิสูจน์

สมมติว่า $x \in (A \cap B)'$

$\therefore x \notin A \cap B$ (โดยนิยามของ.........(1)...)

$\therefore$ ....(2)............................ (โดยข้อความแย้งสลับที่ของนิยามของ ∩)

$\therefore x \in A' \vee x \in B'$ (โดยนิยามของ ....(3)...............................)

$\therefore$ ....(4)............................ (โดยนิยามของ ∪)

I ดังนั้น $x \in (A \cap B)' \rightarrow x \in A' \cup B'$ (กฎแบบเงื่อนไขการพิสูจน์)

ต่อไปสมมติว่า....................(5)..

$\therefore x \in A' \vee x \in B'$	(โดยนิยามของ..........(6)..........)
$\therefore$..........(7)..........	(โดยนิยามของส่วนเติมเต็ม)
$.x \notin A \cap B$	(โดยข้อความแย้งสลับที่ของ..........(8)..........)
$.x \in (A \cap B)'$	(โดยนิยามของ..........(9)..........)
II ดังนั้น..........(10)..........	(โดยกฎของการพิสูจน์แบบเงื่อนไข)
สรุปได้ว่า..........(11)..........	(จาก I และ II โดยกฎการผันกลับได้)
เพราะฉะนั้น $(A \cap B)' = A' \cup B'$	(โดยนิยามของ..........(12)..........)

---

(1) ส่วนเติมเต็ม	(7) $x \notin A \vee x \notin B$
(2) $x \notin A \vee x \notin B$	(8) นิยามของผลตัด
(3) ส่วนเติมเต็ม	(9) ส่วนเติมเต็ม
(4) $x \in A' \cup B'$	(10) $x \in A' \cup B' \rightarrow x \in (A \cap B)'$
(5) $x \in A' \cup B'$	(11) $x \in (A \cap B)' \leftrightarrow x \in A' \cup B'$
(6) ผลผนวก	(12) การเท่ากันของเซต

F_6

สามารถแสดงได้ว่า "$A \subset B$ iff $A \cup B = B$" เป็นประโยคที่สมเหตุสมผล โดยนิยามและทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ เพราะว่าข้อความนี้เป็นข้อความ "ก็ต่อเมื่อ" จึงต้องพิสูจน์ :

1) $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$

และ 2) $A \cup B = B \rightarrow A \subset B$

ในกรณีที่ 1) สมมติว่า $A \subset B$ และแสดงให้ได้ว่า $A \cup B = B$ นั่นคือ

a) $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$

และ **b)** $x \in B \rightarrow x \in A \cup B$

ในกรณีที่ 2) สมมติว่า ....(1)..

และแสดงให้ได้ว่า $A \subset B$ นั่นคือ..........(2)..

(1) $A \cup B = B$

(2) $x \in A \to x \in B$

F_7

ขั้นตอนต่าง ๆ ในการหาข้อโต้แย้งมีดังต่อไปนี้ (หาเหตุผลเอง)

พิสูจน์

1) สมมติว่า $A \subset B$

a) สมมติว่า $x \in A \cup B$

$\therefore x \in A \vee x \in B$ (..........................1............................ ..)

ได้ $x \in A \to x \in B$ (..........................2............................ ..)

และ $x \in B \to x \in B$ (..........................3............................ ..)

ดังนั้น $x \in A \vee x \in B \to x \in B$ (..........................4............................)

$\therefore x \in B$ (..........................5............................ ..)

I ดังนั้น $x \in A \cup B \to x \in B$ (..........................6............................ ..)

b) ต่อไปสมมติว่า $x \in B$

$\therefore x \in A \vee x \in B$ (..........................7............................ ..)

$\therefore x \in A \cup B$ (..........................8............................)

II ดังนั้น $x \in B \to x \in A \cup B$ (........................ ....)

สรุปได้ว่า $A \cup B = B$ (..........................10............................ ..)

*เพราะฉะนั้น $A \subset B \to A \cup B = B$ (โดยกฎการพิสูจน์แบบเงื่อนไข)

2) สมมติว่า $A \cup B = B$

ให้ $x \in A$

แล้ว $x \in A \vee x \in B$ (..........................11............................ ..)

$\therefore x \in A \cup B$ (..........................12............................ ..)

$\therefore x \in B$ (..........................13............................)

ดังนั้น $x \in A \to x \in B$ (..........................14............................ ..)

นั่นคือ $A \subset B$ (..........................15............................)

**เพราะฉะนั้น $A \cup B = B \rightarrow A \subset B$ (..........................16..........................).

สรุปได้ว่า $A \cup B = B$ iff $A \subset B$ (จาก..........................17..........................)

คำตอบ

1. นิยามของผลผนวก (union)
2. กำหนดให้ $A \subset B$ และโดยนิยามของ $\subset$
3. สัจนิรันดร์ $P \Rightarrow P$
4. พิสูจน์โดยกรณี (Proof by cases) : $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta \rightarrow \beta}$
5. การแจงผลตามเหตุ (Modus Ponens)
6. กฎสำหรับการพิสูจน์แบบเงื่อนไข
7. โดยการรวม (By addition) : $P \Rightarrow Q \vee P$
8. นิยามของผลผนวก
9. กฎสำหรับการพิสูจน์แบบเงื่อนไข
10. จาก I และ II โดยนิยามการเท่ากันของเซต
11. โดยการรวม
12. โดยนิยามของผลผนวก
13. เพราะว่า $A \cup B = B$ ตามกำหนดให้
14. กฎสำหรับการพิสูจน์แบบเงื่อนไข
15. นิยามของเซตย่อย
16. กฎสำหรับการพิสูจน์แบบเงื่อนไข
17. จาก * และ ** และกฎการผันกลับได้ (biconditional law)

แบบฝึกหัด 3.6

จงเขียนรายละเอียดการพิสูจน์ของแต่ละทฤษฎีต่อไปนี้

1. (A’)’\= A

2. (A U B)‘= $A' \cap B'$

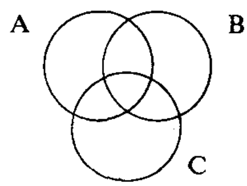
3. C - (A ∩ B) = (C-A) U (C-B)

4. A C B iff B’C A'

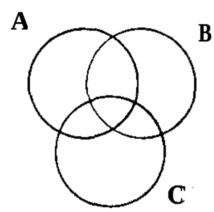
5 . $A \subset B$ iff $A \cap B' = \varnothing$

จงแรเงาบริเวณในแผนภาพเวนน์ที่กำหนดให้ ซึ่งแทนเซตที่กำหนดให้

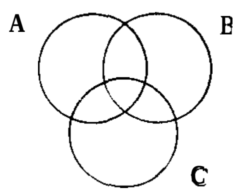
6. $A \cup (B-C)$



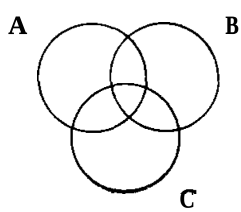
7 . $(A \cup B) - (A \cup C)$



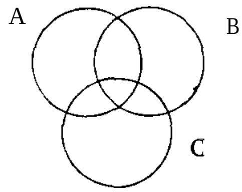
8. A i-l (BAC)



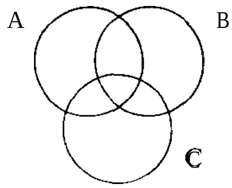
9. (A ∩ B) A (A f-l C)



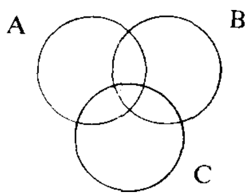
10. $A \cup (B \Delta C)$



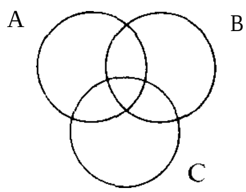
11. $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$



12. $A \cap (B \cup C)$



13. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



จงใช้ข้างบนนี้ทายว่าข้อใด ของ "กฎการกระจาย" ต่อไปนี้เป็นทฤษฎี

14. $A \cup (B-C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

15. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

16. A U (B A C) = (A U B) A (A U C)

17. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

จงเขียนการพิสูจน์เพียงหนึ่งทฤษฎี

3.7 **เซตกำลัง** (Power set)

F₁

ให้ A เป็นเซตที่กำหนดให้ กลุ่มของเซตย่อยทั้งหมดของ A เป็นเซต เรียกว่า **เซตกำลังของ** A (the power set of A) และเขียนแทนด้วย P(A)

ดังนั้น $x \in P(A)$ iff $X \subset A$

ดังตัวอย่าง

ให้ B $= \{1, 2, 3\}$

แล้ว P(B) $= \{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

ข้อสังเกต :

(1) $0 \in P(B)$, $B \in P(B)$, $1 \notin P(B)$, $2 \notin P(B)$ และ $3 \notin P(B)$

(2) อย่าลืมว่าสมาชิก ℓ และ $\{\ell\}$ นั้นไม่เหมือนกัน เซต $\{\ell\}$ ประกอบด้วยสมาชิก : $\ell \in \{\ell\}$ แต่ $\ell \neq \{\ell\}$

F₂

สมมติว่า $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$ เมื่อแต่ละ a_i แตกต่างกันทั้งหมด (ดังนั้น A มีเพียง n สมาชิก) เมื่อสร้างเซตย่อย S ของ A สมาชิกแต่ละ a_i จะมีทางเลือก 2 ทาง คือ a_i อยู่ใน S หรือไม่ก็ a_i อยู่นอก S ดังนั้นจะมีเซตย่อยของ A ทั้งหมด..............................เซตย่อย

2"

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงตอบคำถามข้างบนนี้

   ถ้า A มีเพียง n สมาชิก แล้ว P(A) จะมี... สมาชิก

2. P(0) = ...

3. P ({1}) = ...

4. P ({1, 2}) = ...

5. P (P (∅)) = ...

6. ถ้า A = { 1, 2, 3, 4 } แล้ว P(A) = ...

จงบอกว่าจริงหรือเท็จ

7. $A \in P(A)$

8. $A \subset P(A)$

9. $x = \{x\}$

10. $x, y = \{x, y\}$

11. $P(\{1, 2\}) = \{1, 2, \{1, 2\}, 0\}$

12. $\{x\} = \{\{x\}\}$