บทที่ 2
ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

2.1 ประพจน์ (Logical Statement or Proposition)

F_1

การตัดสินใจในชีวิตประจำวันของมนุษย์ขึ้นอยู่กับ โอกาส อำนาจ กำลัง ความคิดเห็นของส่วนใหญ่ การอุปมาน หรือตรรกวิทยา แต่การตัดสินใจในทางคณิตศาสตร์ต้องอาศัยพื้นฐานทางตรรกวิทยา

ตรรกศาสตร์ หรือตรรกวิทยา หมายถึง วิชาที่ว่าด้วยเหตุและผล

F_2

นิยาม 2.1.1 ประพจน์ คือ ข้อความที่บอกค่าความจริง (Truth Value) ได้ว่า จริง (True) หรือเท็จ (False) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นรูปประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธก็ได้ ดังเช่น

$2 + 3 = 6$ (เท็จ)

12 เป็นจำนวนเต็มคู่ (จริง)

$\sqrt{2} \in Q$ (เท็จ)

สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x \in R$ และ n บางตัว ซึ่ง $n \in N$

$n > x$ (เท็จ)

ดังนั้น ถ้า $x \in R$ และ $(x - 1)(x - 2) = 0$ แล้ว $x = 2$(..........)

ข้อความดังกล่าวข้างต้นนี้ เป็น ....

จริง

ประพจน์

F_3

ตัวอย่างของประโยคที่ไม่เป็นประพจน์

1) การพิสูจน์คืออะไร

2) ปิดประตู

3) $x + 3 = 10$

4) $\frac{1}{x}$

5) $x < n$

F_4

จะเห็นว่า ประโยคคำถาม คำสั่ง ขอร้อง อ้อนวอน แสดงความปรารถนา ห้าม หรือประโยคอุทาน ก็ไม่สามารถบอกได้ว่า จริง หรือเท็จ ดังนั้นประโยคเหล่านี้ไม่เป็นประพจน์ เช่น

ทำไมต้องเรียนวิชา MA 224	(คำถาม)
อยากมีงานทำ	(แสดงความปรารถนา)
อย่าทำตัวเหลวไหลนะ	(คำสั่ง)
โธ่! สอบตกอีกแล้ว	(อุทาน)
กรุณาคืนหนังสือให้ผมด้วย	(ขอร้อง)
โอ! พระเจ้าช่วยด้วย	(อ้อนวอน)

F_5

ใช้สัญลักษณ์ P, Q, R, S, ... แทนประพจน์

เช่น P : $2 + 3 = 8$

Q : มหาวิทยาลัยรามคำแหงเป็นมหาวิทยาลัยที่ใหญ่ที่สุด

R : นกบินได้

เป็นต้น

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิจารณาดูว่าประโยคใดเป็นประพจน์ ถ้าเป็นประพจน์ จงระบุว่าเป็นจริงหรือเท็จ
   1) 4 เป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่
   2) $-3 < -5$
   3) สามเหลี่ยมทุกรูปเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   4) สามเหลี่ยมบางรูปเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
   5) 2 เป็นจำนวนเฉพาะ
   6) $x\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
   7) $x + 13 = 25$
   8) $2x + 4 > 12$
   9) ออกไปนะ
   10) ฉันรักมหาวิทยาลัยรามคำแหง
   11) เธอสอบได้ G 32 ตัวแล้วหรือ
   12) สี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเซตย่อยของสี่เหลี่ยมผืนผ้า
   13) ขอได้โปรดรับฉันเข้าทำงานด้วย เพราะฉันมีความสามารถสูง
   14) หลับตาเดี๋ยวนี้นะ
   15) ฉันอยากเป็นอาจารย์ในมหาวิทยาลัย
   16) ฉันไม่ใช่คนสวยอย่างดาราภาพยนตร์
   17) ทุก ๆ คนไม่ใช่คนดี
   18) รักดีหามจั่ว รักชั่วหามเสา
   19) จงพิสูจน์ว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
   20) ใคร ๆ ก็ทำดีได้

2. จงยกตัวอย่างประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง**มา 3 ตัวอย่าง

3. จงยกตัวอย่างประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**มา 3 ตัวอย่าง

4. จงยกตัวอย่างประโยคที่**ไม่**เป็นประพจน์มา 3 ตัวอย่าง

2.2 ประโยคเปิด (Open Sentences)

F_1

ประโยค $x + 5 = 10$ ไม่เป็นประพจน์ เพราะไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ว่าจริงหรือเท็จอย่างไรก็ตาม ถ้าแทน x ด้วย 5 แล้ว $5 + 5 = 10$ เป็นจริง และเป็นประพจน์

ดังนั้น ถ้าแทนที่ x ด้วย 4 แล้ว ....

4 + 5 = 10 เป็นเท็จ และเป็นประพจน์

F_2

ประโยคใดก็ตามที่ประกอบด้วยหนึ่งตัวแปรหรือมากกว่า โดยที่เมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกใด ๆ จากเซตที่มีความหมาย แล้วทำให้เป็นประพจน์ เรียกประโยคนี้ว่า **ประโยคเปิด** (Open sentences or a predicate)

ดังนั้น $x + 4 = 13$

$x + 3y < 10$

เขาเป็นคนดี

เป็น ....

ประโยคเปิด

F_3

เซตที่มีความหมาย (The meaningful set) ซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวแปรที่กำหนดให้ เรียกว่า **เอกสมภพสัมพัทธ์ของมัน** (its universal set) ดังเช่น ถ้ากล่าวถึงจำนวนจริง แล้วตัวแปรในประโยคเปิด $x < y$ เป็นที่เข้าใจกันว่า แทน x และ y ด้วยจำนวนจริง ในกรณีนี้ เอกภพสัมพัทธ์ ก็คือ **จำนวนจริง** เช่นเดียวกับตัวแปรแต่ละตัว

ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงจำนวนจริง x และจำนวนนับ n แล้ว ตัวแปรในประโยคเปิด $x < n$ แต่ละตัวมีเอกภพสัมพัทธ์ต่างกัน

นั่นคือ เอกภพสัมพัทธ์ของ x คือ ....

ในขณะที่เอกภพสัมพัทธ์ของ n คือ ....

และแทนประโยคเปิด $x < n$ ด้วยสัญลักษณ์ $P(x, n)$

จำนวนจริง (R)

จำนวนนับ (N)

F_4

ใช้สัญลักษณ์ P(x) แทนประโยคเปิด ซึ่งมี x เป็นตัวแปรตัวเดียว และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของ x เซตของสมาชิกทั้งหมดของเอกภพสัมพัทธ์ U ซึ่งทำให้ประโยคเปิด P(x) เป็นจริง เรียกว่า **เซตความจริง** (truth set) ของ P(x)

ดังเช่น ประโยคเปิด $x^2 + 1 = 0$ ด้วยเอกภพสัมพัทธ์ R ไม่มีสมาชิกใดเลยที่อยู่ในเซตความจริง

ดังนั้น เซตความจริงของ $(x - 1)(x + 2) = 0$ เมื่อ $x \in R$ คือ ....

และเซตความจริง ของ $x^2 > -1$ เมื่อ $x \in R$ คือ ....

$\{1, -2\}$

R ทั้งหมด

F_5

จากตัวอย่างใน F_4 จะเห็นว่า ตัวอย่างแรกไม่มีสมาชิกใดเลย ตัวอย่างที่ 2 ประกอบด้วยหนึ่งสมาชิก หรือมากกว่า ส่วนตัวอย่างที่ 3 สุดท้าย เซตความจริงเท่ากับเซตของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ทั้งหมด

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $(x - 2)(x + 3)(x - 4) = 0$
   เมื่อ $x \in R$ แล้ว $P(3)$ คือ ข้อความเชิงตรรกศาสตร์

   $$(3 - 2)(3 + 3)(3 - 4) = 0$$

   ค่าความจริงของ $P(3)$ คือ ....
   ค่าความจริงของ $P(4)$ คือ ....
   ค่าความจริงของเอกภพสัมพัทธ์สำหรับ X คือ ....
   ค่าความจริงของ $P(x)$ คือ ....

2. ให้ $P(x) : 2x = 3$ เมื่อ $x \in z$
   เอกภพสัมพัทธ์ของ X คือ ....
   ค่าความจริงสำหรับ $P(x)$ คือ ....

3. ให้ $P(x) : 2x = x + x$ เมื่อ $x \in N$
   เอกภพสัมพัทธ์สำหรับ X คือ ....
   เซตความจริงสำหรับ $P(x)$ คือ ....

4. ให้ $P(x, y)$ แทนประโยค $(x - 1)(y + 2) = 0$
   เมื่อ $x \in R$ และ $y \in R$ ถ้า $y = 1$ แล้ว
   เซตความจริงของ $P(x, y)$ คือ ....
   ถ้า $Y = -2$ แล้ว เซตความจริงของ $P(x, y)$ คือ.........
   เซตความจริงของ $P(3, y)$ คือ ....
   เซตความจริงของ $P(1, y)$ คือ ....

5. ให้ $P(x, n)$ แทน $x.n = 1$ เมื่อ $x \in R$ และ $n \in Z$
   เซตความจริงของ $P(x, 3)$ คือ ....
   เซตความจริงของ $P(x, 0)$ คือ ....

6. พิจารณาตารางต่อไปนี้

*	|||	*	|||
*	*	*	*

ให้ P(n, m) แทนข้อความ "สัญลักษณ์ซึ่งปรากฏในแถวที่ n และหลักที่ m คือ * "

เอกภพสัมพัทธ์สำหรับตัวแปร n คือ ....

เอกภพสัมพัทธ์สำหรับตัวแปร m คือ ....

จงหาเซตความจริงของแต่ละข้อต่อไปนี้

6.1 P(1, m) 6.5 P(n, 1)

6.2 P(2, m) 6.6 P(n, 2)

6.3 P(3, m) 6.7 P(n, 3)

6.4 P(4, m) 6.8 P(n, 4)

2.3 ตัวบ่งปริมาณ (Quantifiers)

F_1

พิจารณาคำกล่าว "สำหรับ x ทั้งหมด", "สำหรับแต่ละ x" และ "สำหรับทุก ๆ x" เหล่านี้ มีความหมายเหมือนกัน เรียกคำกล่าวนี้ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (universal quantifiers) สำหรับ x ใช้สัญลักษณ์ $\forall x$ [...] และถ้าต้องการระบุเอกภพสัมพัทธ์ไปด้วย เขียนแทนด้วย $\forall x \in U$ [...] ดังเช่น ถ้าให้ P(x) : x เป็นคนดี แล้วคำกล่าวที่ว่า "คนทุกคนเป็นคนดี" แทนด้วย $\forall x$ [P(x)] หรือ $\forall x \in$ คน [P(x)]

ดังนั้น ถ้าให้ P(y) : $y^2 > 0$ แล้วคำกล่าวที่ว่า "กำลังสองของจำนวนจริง**ทุกจำนวน**มากกว่าศูนย์" แทนด้วย ....

$\forall y$ [P(y)]

F_2

ตัวบ่งปริมาณอีกตัวหนึ่ง ใช้กับคำกล่าวประเภท "มี x ตัวหนึ่งซึ่ง...", "สำหรับ x บางตัว..." และ "มี x ซึ่ง..." เรียกคำกล่าวนี้ว่า **ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง** (existential quantifiers) สำหรับ x เขียนแทนด้วย $\exists x$ [...] และถ้าต้องการระบุเอกภพสัมพัทธ์ไปด้วย เขียนได้เป็น $\exists x \in U$ [...]

ดังเช่น ถ้าให้ P(x) : x เป็นคนดี แล้วคำกล่าวที่ว่า "คนบางคนเป็นคนดี" แทนด้วย $\exists x\,[P(x)]$ หรือ $\exists x \in$ คน $[P(x)]$

ดังนั้น ถ้าให้ P(y) : $y^2 > 0$ แล้ว คำกล่าวที่ว่า "กำลังสองของจำนวนจริง**บางจำนวน**มากกว่าศูนย์" แทนด้วย ....

$\exists y\,[P(y)]$

F_3

เมื่อประโยคเปิด P(x) แทนประโยคที่มี x เป็นตัวแปรเพียง**ตัวเดียว** ด้วยเอกภพสัมพัทธ์ U และกำหนดตัวบ่งปริมาณของ x แล้ว ทำให้บอกค่าความจริงได้ว่าจริงหรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง "สำหรับ x ทั้งหมด P(x)" แทนด้วย $\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริง ถ้าแทนที่ x ด้วย**สมาชิกทั้งหมด**ในเอกภพสัมพัทธ์ U แล้วมีค่าความจริงเป็น**จริงทั้งหมด** หรือกล่าวว่า $\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริงถ้าเซตความจริง (truth set) ของ P(x) เท่ากับเอกภพสัมพัทธ์ U

ดังเช่น

$\forall x \in N\,[x > 0]$

$\forall x\,[x + 3 = 3 + x]$

$\forall x\,[x + 2 \leqslant 7]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 4, 5\}$

ต่างก็เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x\,[x^2 \geqslant 0]$ เป็น ....

และ $\forall x\,[x^2 + 3 > 0]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ เป็น ....

จริง

จริง

F_4

ประโยค $\forall x\,[P(x)]$ เป็น**เท็จ** ถ้าแทนที่ x ด้วยทุก ๆ สมาชิกใน U แล้วมีอย่างน้อยหนึ่ง P(x) เป็นเท็จ หรือ $\forall x\,[P(x)]$ เป็นเท็จ ถ้าเซตความจริงของ P(x) ไม่เท่ากับสมาชิกทั้งหมดของ U

ดังเช่น

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

(1) $\forall x\, [x > 1]$ เป็นเท็จ

เพราะเมื่อ แทน $x = 1$ แล้ว $1 > 1$ เป็น**เท็จ**

นั่นคือ $\forall x\, [P(x)]$ เมื่อ $P(x) : x > 1$ เป็นเท็จ

(2) $\forall x\, [x^2 - 1 > 0]$ เป็นเท็จ

เพราะมีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ U เมื่อแทนตัวแปร x ใน P(x) แล้ว ทำให้ P(x) เป็นเท็จ

จะเห็นว่า ถ้า $x = 1$ ได้ $1^2 - 1 > 0$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall x\, [P(x)]$ เมื่อ $P(x) : x^2 - 1 > 0$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x\, [P(x)]$ เป็น .... เมื่อ $P(x) : x + x = x^2$ เพราะ ....

เท็จ

เพราะ ถ้า $x = 1$ แล้ว $1 + 1 = 1^2$ เป็นเท็จ

ถ้า $x = 3$ แล้ว $3 + 3 = 3^2$ เป็นเท็จ

F_5

ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ แล้ว

$\forall x\, [P(x)]$ หมายถึง $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots \wedge P(n)$

จึงเห็นได้ชัดว่า $\forall x\, [P(x)]$ เป็นจริง เมื่อแต่ละประพจน์เป็นจริง

และ $\forall x\, [P(x)]$ เป็น**เท็จ** เมื่อมีอย่างน้อยหนึ่ง P(x) เป็น**เท็จ**

หมายเหตุ จะเข้าใจได้ดีขึ้น หลังจากศึกษาหัวข้อ 2.4 แล้ว

F_6

มี x บางตัวซึ่ง P(x) (แทนด้วย $\exists x\, [P(x)]$) เป็น**จริง** ถ้าเซตความจริงของ P(x) ประกอบด้วยอย่างน้อยหนึ่งสมาชิกของ U

ดังเช่น

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ แล้ว

$\exists x\, [x^2 + 1 > 0]$ เป็นจริง

เพราะมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัว ใน U ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง

กล่าวคือ ถ้า แทน $x = 1$ จะได้ $1^2 + 1 > 0$ เป็นจริง

ถ้า แทน $x = 2$ จะได้ $2^2 + 1 > 0$ เป็นจริง

เป็นต้น

นั่นคือ $\exists x\ [P(x)]$ **เป็นจริง เมื่อ** $P(x) : x^2 + 1 > 0$

ดังนั้น $\exists x\ [x + x = x^2]$ **เป็น** .... **เพราะ** ....

จริง

เพราะ มี $2 \in U$ อยู่หนึ่งตัวที่ทำให้ P(x) เป็นจริง

เมื่อ $P(x) : x + x = x^2$

F_7

$\exists x\ [P(x)]$ **เป็นเท็จ ถ้าเซตความจริง (truth set) ไม่ประกอบด้วยสมาชิกใดเลยของ U ดังเช่น**

$(x - 1)(x + 2) = 0$ เมื่อ $x \in R$ เป็นประโยคเปิดที่มีตัวแปร x เพียงตัวเดียว ซึ่งเซตความจริงเท่ากับ $\{1, -2\}$ ประโยคนี้ไม่เป็นประพจน์ จนกว่ากำหนดตัวบ่ง**ปริมาณทั้งหมด**และตัวบ่ง**ปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง**ของตัวแปร x ดังนั้นประโยคเปิด $(x - 1)(x + 2) = 0$ จะเป็นประพจน์อยู่ในรูป (1) .... และ

(2) .... ตามลำดับ

$\forall x\ [(x - 1)(x + 2) = 0]$

$\exists x\ [(x - 1)(x + 2) = 0]$

F_8

ประโยคแรก "สำหรับ x ทั้งหมด $(x - 1)(x + 2) = 0$" เป็นเท็จ เพราะว่าเซตความจริงของ $(x - 1)(x + 2) = 0$ ไม่เท่ากับเซตของ R ทั้งหมด ประโยคที่สอง "มี x บางตัวซึ่ง $(x - 1)(x + 2) = 0$" เป็นจริง เพราะว่าเซตความจริง $\{1, -2\}$ ประกอบด้วยอย่างน้อยหนึ่งสมาชิก

F_9

พิจารณาตัวอย่างเพิ่มเติม

ประโยค $\exists x \in N, x = x^2$ หมายถึง "มีจำนวนนับ x บางจำนวน ซึ่ง $x = x^2$" ประโยคนี้เป็นจริง เพราะว่าเซตความจริงของ $x = x^2$ มีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิก คือ 1 ที่ทำให้ประโยคเป็นจริง

ประโยค $\forall x \in N, x = x^2$ หมายถึง "สำหรับจำนวนนับ x ทุกจำนวน $x = x^2$" ประโยคนี้เป็นเท็จ เพราะว่า 2 เป็นจำนวนนับ แต่ 2 ไม่อยู่ในเซตความจริงของ $x = x^2$

ดังนั้น $\forall x \in N\ [x = \sqrt{x^2}]$ เป็น ....

แต่ $\forall x \in Z\ [x = \sqrt{x^2}]$ เป็น ....

จริง

เท็จ

F_{10}

ข้อสังเกต

ประโยคที่อยู่ในรูป $\forall x\ [P(x)]$ หรือ $\exists x\ [P(x)]$ เป็นประโยคปิด และไม่เป็นประโยคเปิด

F_{11}

ในทำนองเดียวกัน ประโยคที่อยู่ในรูป $\forall x\ [P(x, y)]$ หรือ $\exists x\ [P(x, y)]$ เป็นประโยคเปิดที่มีตัวแปร y **ตัวเดียวแต่ละรูปแบบ** เรียก x ว่า **ตัวแปรที่ปรากฏ** (apparent variable) **หรือตัวแปรหุ่น** (dummy variable)

พิจารณาประโยค $\exists y \in Q\ [zy = 1]$ เมื่อ $z \in Z$ ประโยคนี้จะเป็นจริงหรือเท็จ ขึ้นอยู่กับจำนวนเต็ม z เท่านั้น ถ้าแทน z ด้วยจำนวนเต็ม β ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วผลของ

$\exists y \in Q\ [\beta \cdot y = 1]$ เป็นประโยคที่เป็นจริง ถ้าแทนที่ด้วยศูนย์ แล้วประโยค $\exists y \in Q\ [0 . y = 1]$ เป็น ....

ดังนั้น $\exists y \in Q\ [zy = 1]$ **เป็นประโยคเปิด** ที่มีตัวแปร z **เพียงตัวเดียว**

ตัวอย่างหลังนี้ y เป็นตัวแปรที่ปรากฏ

เท็จ

F_{12}

จากตัวอย่างใน F_{11}

ให้ R(z) แทนประโยคเปิด $\exists y \in Q\ [zy = 1]$ เซตความจริงของ R(z) คือ $\{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

ดังนั้น $\exists z \in Z$, R(z) เป็นข้อความที่เป็นจริง

และ $\forall z \in Z$, R(z) เป็นเท็จ เพราะว่าศูนย์ไม่อยู่ในเซตความจริงของ R(z)

เพราะฉะนั้น $\exists z \in Z\ [\exists y \in Q, zy = 1]$ เป็น ....

และ $\forall z \in Z\ [\exists y \in Q, zy = 1]$ เป็น ....

จริง

เท็จ

F_{13}

จาก F_{12} ประโยคเปิด P(z, y) มีตัวแปรสองตัว กลายเป็นประโยคปิด เมื่อกำหนดตัวบ่งปริมาณของตัวแปรแต่ละตัว ตัวบ่งปริมาณข้างล่างนี้ขยายตัวแปรใน P(z, y) ทำให้กลายเป็นประพจน์

1) $\forall z, \forall y\ [P(z, y)]$

2) $\exists z, \forall y\ [P(z, y)]$

3) $\forall z, \exists y\ [P(z, y)]$

4) $\exists z, \exists y\ [P(z, y)]$

5) $\forall y, \forall z\ [P(z, y)]$

6) $\exists y, \forall z\ [P(z, y)]$

7) $\forall y, \exists z\ [P(z, y)]$

8) $\exists y, \exists z\ [P(z, y)]$

F_{14}

วิธีแปลข้อความหรือประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ จากภาษาสัญลักษณ์มาเป็นภาษาทั่วไป กระทำได้ดังนี้

ให้ $P(z, y)$: ประโยคเปิด $z.y = 1$

เมื่อ $z \in Z$ และ $y \in Q$ แล้วประโยค 1) ถึง 4) หมายถึง

1) สำหรับจำนวนเต็ม z แต่ละตัว จำนวนตรรกยะ y แต่ละตัว $z.y = 1$

2) มีจำนวนเต็ม z บางตัว ซึ่งแต่ละจำนวนตรรกยะ y, $z.y = 1$

3) สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม Z มีจำนวนตรรกยะ y ตัวหนึ่ง ซึ่ง $z.y = 1$

ดังนั้น ข้อ 4) คือ ....

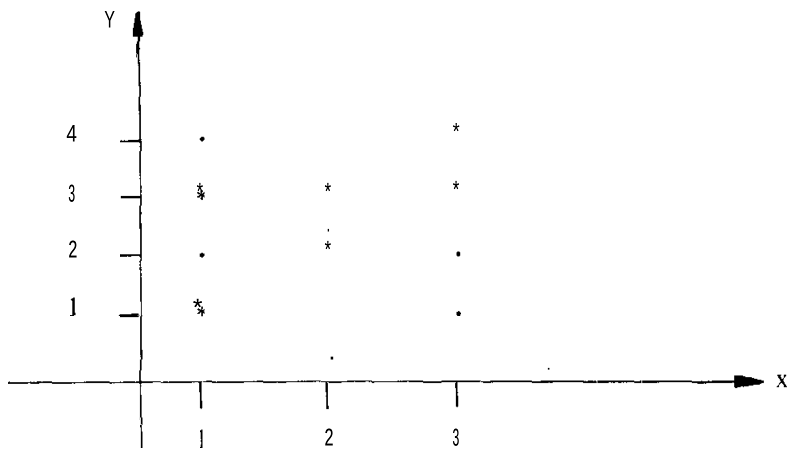
มีจำนวนเต็ม z ตัวหนึ่ง (บางตัว) และจำนวนตรรกยะ y ตัวหนึ่ง ซึ่ง $z.y = 1$

F_{15}

ข้อสังเกต สัญลักษณ์ ที่อยู่ในรูป $\exists x\,[P(x)]$ หมายถึง มี x ตัวหนึ่ง ซึ่ง $P(x)$ ในขณะที่สัญลักษณ์ที่อยู่ในรูป $\forall x\,[P(x)]$ หมายถึง สำหรับแต่ละ x, $P(x)$

F_{16}

เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น จงพิจารณากราฟต่อไปนี้



เมื่อ $x \in \{1, 2, 3\}$ และ $y \in \{1, 2, 3, 4\}$

ให้ $P(x, y)$ แทนประโยคเปิด " * ปรากฏที่ (x, y)" เช่น $P(1, 3)$ เป็นจริง ในขณะที่ $P(3, 1)$ เป็นเท็จ สามารถแปลแต่ละข้อความ (ประพจน์) ต่อไปนี้ได้ และตัดสินได้ว่า จริง หรือเท็จ

1) $\forall x, \forall y\,[P(x, y)]$

2) $\exists x, \forall y\,[P(x, y)]$

3) $\forall y, \exists x\ [P(x, y)]$

4) $\exists x, \exists y\ [P(x, y)]$

5) $\forall x, \exists y\ [P(x, y)]$

6) $\exists y, \forall x\ [P(x, y)]$

แปลได้ดังนี้ :

1) สำหรับแต่ละ x และ y, * ปรากฏที่ (x, y) : เท็จ

2) มี x บางตัว ซึ่งสำหรับแต่ละ y, * ปรากฏที่ (x, y) : เท็จ

3) สำหรับแต่ละ y มี x บางตัว ซึ่ง * ปรากฏที่ (x, y) : จริง

ดังนั้น อีกสามข้อที่เหลือ แปลและตัดสินได้ เป็น ....

---

4) มี x บางตัว และ y บางตัว ซึ่ง * ปรากฏที่ (x, y) : จริง

5) สำหรับแต่ละ x มี y บางตัว ซึ่ง * ปรากฏที่ (x, y) : จริง

6) มี y บางตัว ซึ่งสำหรับแต่ละ x, * ปรากฏที่ (x, y) : จริง

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ A แทนเซต $\{1, 2, 3, 4\}$ และ B แทนเซต $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

   จงแปลแต่ละข้อความต่อไปนี้ เป็นภาษาที่สละสลวย และจงบอกค่าความจริง

   1.1 $\exists x \in A$, x เป็นเลขคู่

   1.2 $\forall x \in A, 0 < x < 5$

   1.3 $\forall y \in B, y < 6$

   1.4 $\exists y \in B, y < 6$

   1.5 $\forall x \in A, \exists y \in B, y = x + 1$

   1.6 $\exists y \in B, \forall x \in A, y > x$

   1.7 $\forall x \in A, \exists y \in B, y = x$

   1.8 $\forall y \in B, \exists x \in A, y = x$

   1.9 $\exists y \in B, \forall x \in A, y = x + 1$

   1.10 $\forall x \in A$, x เป็นเลขคู่

   1.11 $\forall x \in A, \forall y \in B, x + y > 1$

   1.12 $\exists x \in A, \exists y \in B, x + y > 8$

   1.13 $\exists x \in A, \exists y \in B, x - y < -5$

2. จงแปลข้อความต่อไปนี้ เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ แล้วบอกค่าความจริง

   2.1 สำหรับแต่ละ $x \in R$ มีบาง $n \in N$ ซึ่ง $n > x$

   2.2 มีบาง $n \in N$ ซึ่งแต่ละ $x \in R, n > x$

   2.3 สำหรับแต่ละ $x \in R$, $\frac{1}{x} \in R$

3. จงแปลข้อความต่อไปนี้เป็นภาษาสัญลักษณ์ แล้วบอกค่าความจริง :

   3.1 สำหรับแต่ละ x ใน R มีบาง $q \in Q$ ซึ่ง q อยู่ระหว่าง x และ x + 1

   3.2 มีจำนวนจริง e ซึ่งสำหรับแต่ละจำนวนจริง x, $e.x = x$

   3.3 สำหรับแต่ละ x ใน R มี y บางตัวใน R ซึ่ง $x.y = 1$

4. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ประโยค $\forall x \in A, y \geqslant x$ สามารถพิจารณาด้วยประโยคเปิด $P(y)$ ด้วยตัวแปร y ตัวเดียว เมื่อ $y \in A$ จงหาค่าความจริงของ

4.1 $P(1)$

4.2 $P(2)$

4.3 $P(3)$

4.4 จงหาเซตความจริงของ $P(y)$

4.5 ข้อความ $\forall y \in A, \forall x \in A, y \geqslant x$ เป็นจริง หรือเท็จ

4.5 ข้อความ $\exists y \in A, \forall x \in A, y \geqslant x$ เป็นจริง หรือเท็จ เพราะเหตุใด

5. ให้ $A = \{0, 1.2, 3)$ และให้ $B = \{2, 4\}$

จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

5.1 $vx \in A$, x เป็นเลขคู่

5.2 $vx \in B$, x เป็นเลขคู่

5.3 $\exists x \in A, x + x = x$

5.4 $3x \in B, x + x = x$

5.5 $\exists x \in A, vy \in A, x + y = y$

5.6 $\exists x \in B, \forall y \in A, y < x$

5.7 $vx \in B, \exists y \in A, x = 2y$

5.8 $\exists x \in A, \forall y \in B, x - y = y$

5.9 $\exists x \in B, vy \in A, x - y = y$

5.10 $\exists x \in A, \exists y \in A, x \neq y$

5.11 $\forall x \in A, \forall y \in A, x \neq y$

คำตอบ

1. 1.1 T

1.2 T

1.3 T

1.4 T

1.5 T

1.8 F

1.9 F

1.10 F

1.11 T

1.12 T

1.6 T

1.7 T

2. 2.1 T

2.2 F

2.3 F

3. 3.1 T

3.2 T

3.3 F

4. 4.1 F

4.2 F

4.3 T

1.13 F

5. 5.1 F

5.2 T

5.3 T

5.4 F

5.5 T

5.6 T

5.7 T

5.8 F

5.9 F

5.10 T

5.11 F

2.4 **ข้อความเชิงประกอบ** (Compound statement)

F_1

คำว่า "และ", "หรือ", "ถ้า...แล้ว..." และ "ก็ต่อเมื่อ" เรียกว่า **ตัวเชื่อมเชิงตรรกศาสตร์** (logical connectives) อีกตัวหนึ่ง คือคำว่า "ไม่" เป็นตัวเชื่อมเชิงตรรกศาสตร์ด้วย

ใช้ตัวเชื่อมเหล่านี้ รวมข้อความเข้าด้วยกัน เรียกว่า **ข้อความเชิงประกอบ**

F_2

การดำเนินการ (operation) โดยการเชื่อมข้อความหรือประพจน์สองประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ" เรียกว่า **ตัวเชื่อมการร่วม** (conjunction)

ใช้สัญลักษณ์ $\wedge$ แทน "และ"

ดังนั้น $P \wedge Q$ อ่านว่า P และ Q

"ตัวเชื่อมการร่วม $P \wedge Q$ ของข้อความ P และ Q เป็นจริง เมื่อทั้ง P และ Q เป็นจริง" นอกเหนือจากคำกล่าวนี้ แล้วเป็นเท็จ

ดังเช่น

P : ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

Q : $3 < 4$

แล้ว $P \wedge Q$ เป็นจริง เพราะ P เป็นจริง Q เป็นจริง

และถ้า

P : มหาวิทยาลัยรามคำแหงเป็นมหาวิทยาลัยปิด

Q : $2 = 4$

แล้ว $P \wedge Q$ เป็นเท็จ เพราะ P เป็นเท็จ Q เป็นเท็จ ซึ่งนอกเหนือจากคำกล่าวที่ว่า $P \wedge Q$ เป็นจริง เมื่อทั้ง P และ Q เป็นจริงเท่านั้น

ดังนั้น ถ้า P เป็น จริง

Q เป็น เท็จ

แล้ว $P \wedge Q$ เป็น ....

เท็จ

F_3

การดำเนินการโดยการเชื่อมข้อความด้วยคำว่า "หรือ" เรียกว่า **ตัวเชื่อมการเลือก** (disjunction)

ใช้สัญลักษณ์ $\vee$ **แทน "หรือ"**

$P \vee Q$ อ่านว่า P หรือ Q

"ตัวเชื่อมการเลือก $P \vee Q$ ของข้อความ P, Q เป็นเท็จ เมื่อทั้ง P และ Q เป็นเท็จ" นอกเหนือจากคำกล่าวนี้แล้วเป็นจริง

ดังเช่น

P : กรุงเทพฯ อยู่ในภาคกลาง

Q : นกมีสี่ขา

แล้ว $P \vee Q$ เป็นจริง เพราะ P เป็นจริง Q เป็นเท็จ

และถ้า

P : $3 > 4$

Q : $6 + 2 = 8$

แล้ว $P \vee Q$ เป็นจริง เพราะ P เป็นจริง Q เป็นจริง ซึ่งนอกเหนือจากคำกล่าวที่ว่า $P \vee Q$ เป็นเท็จ เมื่อทั้ง P และ Q เป็นเท็จ เท่านั้น

ดังนั้น ถ้า P เป็น เท็จ

Q เป็นจริง

แล้ว $P \vee Q$ เป็น ....

จริง

F_4

หมายเหตุ คำว่า "หรือ" ในทางตรรกศาสตร์ใช้เป็น**ตัวเชื่อมการเลือกทั้งสองอย่าง** (inclusive disjunction) ด้วย เช่น $P \vee Q$ เป็นจริง แม้ว่า P เป็นจริง และ Q เป็นจริง ดังนั้น "แดงรับประทานน้ำชา**หรือ**กาแฟ" แดงรับประทานน้ำชาอย่างเดียว ก็ทำให้ข้อความเชิงประกอบเป็นจริง แดงรับประทานกาแฟอย่างเดียว ก็ทำให้ข้อความเชิงประกอบเป็นจริง หรือถ้าแดงรับประทานทั้งสองอย่าง ก็ทำให้ข้อความเชิงประกอบเป็นจริงเช่นกัน แต่คำว่า "หรือ" ในชีวิต

ประจำวันนั้น หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง เรียกในความหมายนี้ว่า **ตัวเชื่อมการเลือกเพียงหนึ่ง** (exclusive disjunction)

F_5

ข้อความเชิงประกอบที่เกิดจากตัวเชื่อม ถ้า...แล้ว... เรียกว่า **ข้อความแจงเหตุสู่ผล** (conditional statement)

ใช้สัญลักษณ์ $P \rightarrow Q$ แทนแบบมีเงื่อนไข (conditional) อ่านว่า ถ้า P แล้ว Q

"แบบมีเงื่อนไข $P \rightarrow Q$ เป็นเท็จ ในกรณีที่ P เป็นจริง และ Q เป็นเท็จ" นอกเหนือจากคำกล่าวนี้แล้วเป็นจริง

ดังเช่น

"ถ้ากรุงเทพฯอยู่ในภาคกลาง แล้วนกมีสี่ขา" เป็นเท็จ เพราะข้อความต้น (P) เป็นจริง ข้อความหลัง (Q) เป็นเท็จ

"ถ้านกมีสี่ขา แล้วกรุงเทพฯอยู่ในภาคกลาง" เป็นจริง เพราะ ข้อความต้นเป็นเท็จ ข้อความหลังเป็นจริง

ดังนั้น ถ้า P เป็น T

Q เป็น T

แล้ว $P \rightarrow Q$ เป็น .... เพราะ ....

จริง

$P \rightarrow Q$ เป็นเท็จในกรณีที่ P เป็นจริง Q เป็นเท็จ เท่านั้น นอกเหนือจากคำกล่าวนี้ เป็นจริง

F_6

ข้อความเชิงประกอบที่เชื่อมด้วย ...ก็ต่อเมื่อ... เรียกว่า **ข้อความผันกลับได้** (biconditional statement)

ใช้สัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ แทนตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ"

$P \leftrightarrow Q$ อ่านว่า P ก็ต่อเมื่อ Q

"ข้อความผันกลับได้ $P \leftrightarrow Q$ เป็นจริง เมื่อทั้ง P และ Q มีค่าความจริงเหมือนกัน และเป็นเท็จ เมื่อ P และ Q มีค่าความจริงแตกต่างกัน"

ดังเช่น

8 > 4 ก็ต่อเมื่อ 3 + 2 = 5 เป็นจริง

มหาวิทยาลัยรามคำแหง เป็นมหาวิทยาลัยปิด ก็ต่อเมื่อโลกแบน เป็นจริง

ดังนั้น เดือนกุมภาพันธ์ มี 30 วัน ก็ต่อเมื่อมนุษย์มี 2 ขา เป็น .... เพราะ ....

เท็จ

ข้อความแรกกับข้อความหลัง มีค่าความจริงต่างกัน

F_7

ตัวเชื่อม**ไม่** (not) ใช้นำหน้าประพจน์ เรียกว่า **นิเสธ** (negation)

ใช้สัญลักษณ์ $\sim P$ แทนนิเสธของ P

อ่านว่า ไม่ใช่ P หรือ not P หรือ negation P

"$\sim P$ **เป็นเท็จ เมื่อ** P **เป็นจริง และ** $\sim P$ เป็นจริง เมื่อ P **เป็นเท็จ**"

ดังเช่น

P : แดงเป็นอาจารย์คณิตศาสตร์ (เป็นจริง)

$\sim P$: แดง**ไม่** เป็นอาจารย์คณิตศาสตร์

หรือ **ไม่ใช่** แดงเป็นอาจารย์คณิตศาสตร์ (เป็นเท็จ)

ดังนั้น R : คณิตศาสตร์เกิดแถบกลุ่มแม่น้ำโขง (เป็นเท็จ)

แล้ว $\sim R$: .... และเป็น ....

คณิตศาสตร์**ไม่**ได้เกิดแถบลุ่มแม่น้ำโขง

จริง

F_8

ให้ $P \rightarrow Q$ เป็นข้อความแจงเหตุสู่ผล แล้วประพจน์ $Q \rightarrow P$ เรียกว่า **บทกลับ** (converse) ของเงื่อนไขที่กำหนดให้

ข้อความ $\sim P \rightarrow \sim Q$ เรียกว่า **ตัวผกผัน** (inverse) ของแบบเงื่อนไข $P \rightarrow Q$

และ $\sim Q \rightarrow \sim P$ เรียกว่า **ข้อความแย้งสลับที่** (contrapositive statement) ของ $P \rightarrow Q$

F_9

ได้ทราบมาแล้วว่า นิพจน์ที่อยู่ในรูป $-w + x.y < z$ นี้ ไม่มีความหมาย จนกว่าจะตกลงเรื่องอันดับ (order) ของการดำเนินการ เช่น การจัดกลุ่มของนิพจน์นี้เป็น $[(-w) + (x.y)] < z$ เป็นต้น ในทำนองเดียวกัน นิพจน์ $\sim P \vee Q \wedge R \rightarrow S$ ก็ยังไม่มีความหมายจนกว่าจะมีการจัดกลุ่มของสัญลักษณ์

F_{10}

สำหรับข้อความเชิงประกอบที่ไม่ได้จัดอันดับของการอ่านไว้ มีข้อตกลงในการจัดกลุ่มสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้ :

1) อ่านนิเสธทั้งหมด (all negations) ก่อน
2) ต่อไปอ่านตัวเชื่อมการร่วม (conjunctions) และตัวเชื่อมการเลือก (disjunction) และ
3) อ่านแบบมีเงื่อนไข (conditionals) และข้อความผันกลับได้ (biconditionals) เป็นขั้นสุดท้าย

ดังเช่น

$-P \vee (Q \wedge R) \rightarrow S$ ภายใต้ข้อตกลงนี้ หมายถึง $[(\sim P) \vee (Q \wedge R)] \rightarrow S$

นิพจน์ $-P \vee Q$ หมายถึง $(\sim P) \vee Q$ ซึ่งไม่เหมือนกับ $\sim(P \vee Q)$

ดังนั้น นิพจน์ $P \wedge Q \rightarrow R$ หมายถึง ....

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

(ไม่เหมือนกับ $P \wedge (Q \rightarrow R)$)

F_{11}

ข้อสังเกต ข้อตกลงใน F_{10} นั้น ไม่ชัดเจนนัก เช่น ในการจัดกลุ่ม $P \vee Q \wedge R$ และ $P \rightarrow R \rightarrow S$ แต่อย่างไรก็ตาม พอใช้เป็นแนวทางได้บ้าง

แบบฝึกหัด 2.4

1. ให้ W : วันนี้ลมแรง

   S : วันนี้มีแดด

   R : วันนี้ฝนตก

   C : วันนี้ฉันจะไปเรียน

   จงเขียนข้อความเชิงประกอบต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์

   (ใช้สัญลักษณ์ W, S, R, C, $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$)

   1.1 ถ้าวันนี้มีแดดแล้วฉันจะไปเรียน

   1.2 วันนี้ฝนตกและลมแรง

   1.3 วันนี้ฉันจะไปเรียนก็ต่อเมื่อฝนตกและลมแรง

   1.4 วันนี้ฝนไม่ตกแต่ลมแรง

   1.5 วันนี้ฝนไม่ตกและลมไม่แรง

   1.6 ถ้ามีแดดแล้วฝนไม่ตก

   1.7 ไม่เป็นความจริงที่ว่าแดดออกและฝนตก

   1.8 จงแปลข้อต่อไปนี้เป็นข้อความ

   1.8.1 $W \wedge \sim R$

   1.8.2 $\sim R \wedge \sim S$

   1.8.3 $(W \wedge C) \rightarrow (Q \vee R)$

   1.8.4 $\sim W \leftrightarrow S$

   1.8.5 $\sim (W \rightarrow S)$

   1.8.6 $S \vee C$

2. จงพิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

   "ถ้า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้ว $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว"

   2.1 จงเขียนบทกลับ (converse)

   2.2 จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive)

   2.3 จงเขียนตัวผกผัน (inverse)

2.5 **ตารางค่าความจริง** (Truth Table)

F_1

พิจารณาค่าความจริงของข้อความเชิงประกอบ ที่เกิดจากการเชื่อมข้อความเดี่ยว เช่น ตัวเชื่อมการเลือก $P \vee Q$ เกิดจากข้อความเดี่ยว หรือข้อความอย่างง่าย P และ Q

ข้อความ $P \vee Q$ จะมีค่าความจริงถึง 4 กรณี :

กรณีที่ 1 P เป็นจริง และ Q เป็นจริง

กรณีที่ 2 P เป็นจริง และ Q เป็นเท็จ

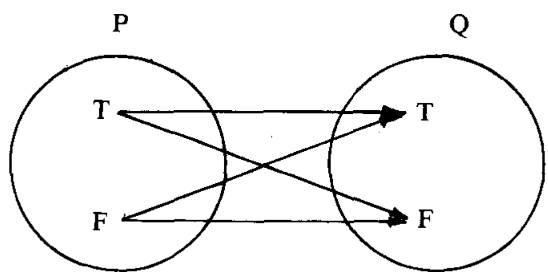
กรณีที่ 3 P เป็นเท็จ และ Q เป็นจริง

กรณีที่ 4 P เป็นเท็จ และ Q เป็นเท็จ

ให้ T : จริง

F : เท็จ

ทั้งสี่กรณีนี้ เกิดจาก ผลคูณคาร์ทีเซียน ดังรูป



อย่าลืมว่า แต่ละประพจน์ มีค่าความจริงได้ 2 อย่างคือ T กับ F

ดังนั้น สองประพจน์ จะเกิดกรณีต่าง ๆ ถึง 4 กรณี

ถ้าเป็นสามประพจน์ จะเกิดกรณีต่าง ๆ ถึง .... กรณี

8

F_2

จาก F_1 ในกรณีที่ 1 $P \vee Q$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 $P \vee Q$ เป็นจริง

กรณีที่ 3 $P \vee Q$ เป็นจริง

ทราบได้จากนิยามของตัวเชื่อมการเลือก ใน F_3 ของหัวข้อ 2.4

ดังนั้น กรณีที่ 4 $P \vee Q$ เป็น ....

เท็จ

F_3

จาก F_2 เขียนเป็น**ตารางค่าความจริงของ** $P \vee Q$ ได้ดังนี้ :

	P	Q	$P \vee Q$
กรณีที่ 1	T	T	T
กรณีที่ 2	T	F	T
กรณีที่ 3	F	T	T
กรณีที่ 4	F	F	F

หมายเหตุ ค่าความจริงอยู่ใต้ตัวเชื่อมทุกตัว

F_4

ตารางค่าความจริงของนิเสธ

P	$\sim P$
T	**F**
F	**T**

F_5

ตารางค่าความจริงของ $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$:

	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
กรณีที่ 1 :	T	T	T	T	T	T
กรณีที่ 2 :	T	F	F	T	F	F
กรณีที่ 3 :	F	T	F	T	T	F
กรณีที่ 4 :	F	F	F	F	T	T

วิธีใช้ตาราง

เช่น ในการหาค่าความจริงของ $P \rightarrow Q$ เมื่อ P เป็นเท็จ และ Q เป็นจริง ดูได้จากแถวที่ 3 (กรณี 3) หลักที่มีหัวเป็น $P \rightarrow Q$ ปรากฏว่าเป็น T ดังนั้น $P \rightarrow Q$ เป็นจริงสำหรับกรณีนี้ (อย่าลืมว่า $P \rightarrow Q$ ได้นิยามไว้แล้วใน F_5 ของหัวข้อ 2.4)

ดังนั้น เมื่อ P เป็นเท็จ และ Q เป็นเท็จ แล้ว $P \leftrightarrow Q$ เป็น .... (ดูจากตาราง)

จริง

F_6

หมายเหตุ ตารางของนิเสธ (negation) นั้น ไม่ได้รวมอยู่ในตารางเดียวกัน ดังเช่นตัวเชื่อมอื่น เพราะนิเสธใช้ในการปฏิเสธข้อความมีเพียง 2 บรรทัด (แถว)

F_7

จะเห็นว่า ประโยคเชิงประกอบที่ประกอบด้วยสองข้อความ แยกกรณีต่าง ๆ ได้เป็น :

	P	Q
กรณีที่ 1	T	T
กรณีที่ 2	T	F
กรณีที่ 3	F	T
กรณีที่ 4	F	F

ดังนั้น ตารางค่าความจริง สำหรับสามข้อความ P, Q, R แสดงได้ดังนี้ .... (ลองเขียนรูปแล้วใช้ผลคูณคาร์ทีเซียน)

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

F_8

ตัวอย่าง จงจัดกลุ่มนิพจน์ $\sim P \wedge (P \vee Q) \rightarrow Q$ แล้วหาค่าความจริงทุก ๆ กรณี

วิธีทำ

โดยใช้ความรู้จาก F_{10} ของหัวข้อ 2.4 จึงจัดกลุ่มได้

$$[(\sim P) \wedge (P \vee Q)] \rightarrow Q$$

การหาค่าความจริงของนิพจน์นี้ คิดจากข้างในก่อนแล้วจึงคิดข้างนอกของกลุ่มสัญลักษณ์

ดังนั้น ตอนแรก จึงหาค่าความจริงของแต่ละวงเล็บ แล้วหาค่าความจริงของตัวเชื่อม $\wedge$ สุดท้ายหาค่าความจริงของ $\rightarrow$ ข้อความประกอบนี้ เกิดจากสองข้อความย่อย จึงแสดงด้วยตารางดังนี้ :

	P	Q	$\sim P$	$\wedge$	$P \vee Q$	$\rightarrow$	Q
กรณีที่ 1	T	T					
กรณีที่ 2	T	F	F	F	T	T	F
กรณีที่ 3	F	T					
กรณีที่ 4	F	F					
			1	2	1	3	2

สังเกตกรณีที่ 2 (P จริง และ Q เท็จ) ในกรณีนี้นิพจน์ $[(\sim P) \wedge (P \vee Q)] \rightarrow Q$ เป็นจริง ดังได้แสดงไว้ในหลักที่ 3 หาได้โดยใช้ตารางค่าความจริงหานิเสธ ตัวเชื่อมการเลือก ตัวเชื่อมการร่วม และแบบเงื่อนไข จึงได้ตารางที่เรียบร้อย เป็น ....

ตัวเลขที่อยู่ใต้หลัก แสดงถึงอันดับของการดำเนินการ

	P	Q	$\sim P$	$\wedge$	$P \vee Q$	$\rightarrow$	Q
กรณีที่ 1	T	T	F	F	T	T	T
กรณีที่ 2	T	F	F	F	T	T	F
กรณีที่ 3	F	T	T	T	T	T	T
กรณีที่ 4	F	F	T	F	F	T	F
			1	2	1	3	2

ข้อสังเกตกรณีที่ 2 (P จริง และ Q เท็จ) ได้หาค่าไว้แล้ว ปรากฏว่า นิพจน์ $\sim P \wedge (P \vee Q) \rightarrow Q$ เป็นจริงดังหลัก 3 โดยใช้ตารางความจริงของนิเสธ ตัวเชื่อมการเลือก ตัวเชื่อมการร่วม และ แบบมีเงื่อนไข ดังข้างบนนี้ ตัวเลขที่อยู่ข้างล่างของหลัก แสดงถึงอันดับในการดำเนินการให้สำเร็จ

I

แบบฝึกหัด 2.5

จงเขียนตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของข้อต่อไปนี้

1. $(P \wedge Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim R)$
2. $\sim R \leftrightarrow (P \vee Q)$

2.6 **ความขัดแย้ง** (Absurdities) **ความไม่แน่นอน** (Contingencies) **และสัจนิรันดร์** (Tautology)

F_1

ข้อความเชิงประกอบที่มีค่าความจริง เป็นจริงทุกๆ กรณี เรียกว่า **สัจนิรันดร์** (Tautology)
เช่น $P \vee \sim P$ มีค่าความจริง ดังตาราง

P	P	$\vee$	$\sim P$
T	T	T	F
F	F	T	T
	1	2	1

เพราะฉะนั้น

$P \vee \sim P$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ เป็น .... เพราะ ....

สัจนิรันดร์

มีค่าความจริง (ใต้ $\leftrightarrow$)

เป็นจริงทุกกรณี

F_2

ข้อความเชิงประกอบซึ่งเป็นเท็จทุก ๆ กรณี เรียกว่า **ความขัดแย้ง** (absurdity)
เช่น $P \wedge \sim P$ เป็นความขัดแย้ง

ประโยคใดที่อยู่ในรูป $P \wedge -P$ **เรียกว่า ความขัดแย้งกัน** (contradiction)

ดังนั้น $(P \wedge Q) \wedge \sim(P \vee Q)$ **เป็น**.......... **เพราะ** ....

ความขัดแย้ง

มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี

F_3

ข้อความเชิงประกอบที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ หรือความขัดแย้ง เรียกว่า ความไม่แน่นอน (contingency)

เช่น $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ **เป็น ความไม่แน่นอน**

ดังนั้น $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ **เป็น**........... **เพราะ** ....

ความไม่แน่นอน

มีค่าความจริง เป็นจริงบ้าง เท็จบ้าง

แบบฝึกหัด 2.6

จงตัดสินว่า แต่ละข้อต่อไปนี้ เป็น สัจนิรันดร์ (tautology) ความขัดแย้ง (absurdity or contradictory) หรือ ความไม่แน่นอน (contingency) โดยการใช้ตารางค่าความจริง

1. $(P ' Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$
2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$
3. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [P \text{ A } Q \rightarrow R]$
4. $(P \wedge Q) \wedge \sim (P \vee Q)$

2.7 ความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Equivalence) และการแจกแจงเหตุสู่ผลเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Implication)

F_1

ให้ α และ β เป็นข้อความเชิงประกอบ กล่าวได้ว่า α **ทำให้เกิดผล** β (α Logically implies β) ก็ต่อเมื่อ β เป็นจริง เมื่อไรที่ α เป็นจริง "α ทำให้เกิดผล β" หมายความว่า เป็นไป**ไม่ได้**ที่มี α เป็นจริง และ β เป็นเท็จ

จึงกล่าวเป็นนิยามได้ดังนี้ :

α **ทำให้เกิดผล** β ก็ต่อเมื่อ $\alpha \rightarrow \beta$ เป็นสัจนิรันดร์ (tautology)

F_2

พิจารณาข้อความ $P \wedge (P \rightarrow Q)$ กับข้อความ Q จะเห็นว่า ค่าความจริงของ Q เป็นจริงในทุก ๆ กรณีที่ $P \wedge (P \rightarrow Q)$ เป็นจริง :

P	Q	$P \wedge (P \rightarrow Q)$	Q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	F

เพราะฉะนั้น $P \wedge (P \to Q)$ **ทำให้เกิดผลเป็น** Q

และ $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$ **เป็นสัจนิรันดร์**

ดังนั้น $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$ **เป็น** I......... **เพราะ** ....

การแจงเหตุไปสู่ผล หรือ $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)]$

เป็นตัวทำให้เกิดผล $P \to R$

เพราะ $(P \to R)$

เป็นจริง ในทุก ๆ กรณีที่ $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)]$

เป็นจริง หรือกล่าวว่า $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$

เป็นสัจนิรันดร์

F_3

ถ้าให้ $\alpha \Rightarrow \beta$ แทนการแจงเหตุ α ไปสู่ผล β [$(\alpha \to \beta)$ เป็นข้อความเชิงประกอบ ในขณะที่ $\alpha \Rightarrow \beta$ เป็นข้อความ**เกี่ยวกับ**ข้อความเชิงประกอบ $\alpha \to \beta$]

ในที่นี้ α และ β เป็นข้อความเชิงประกอบ กล่าวได้ว่า α **สมมูล** (logically equivalent) กับ β ก็ต่อเมื่อ α แจงเหตุไปสู่ผล β **และ** β แจงเหตุไปสู่ผล (logically implies) α

ดังนั้น "α สมมูลกับ β" หมายความว่า α เป็นจริง เมื่อไรก็ตามที่ β เป็นจริง ในทางกลับกัน β เป็นจริง เมื่อไรก็ตามที่ α เป็นจริง จึงเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้ :

α **สมมูลกับ** β ก็ต่อเมื่อ $\alpha \Leftrightarrow \beta$ เป็นสัจนิรันดร์ และใช้สัญลักษณ์ $\alpha \Leftrightarrow \beta$ แทน α **สมมูล**กับ β

F_4

ตัวอย่าง พิจารณาข้อความ $P \to Q$ และข้อความ $\sim P \vee Q$ จากตารางค่าความจริง จะเห็นว่า แต่ละข้อความเป็นจริง เมื่อไรก็ตามที่อีกข้อความหนึ่งเป็นจริง :

P	Q	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

นั่นคือ $P \rightarrow Q$ สมมูลกับ $\sim P \vee Q$ และสังเกตได้ว่า $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ เป็น ....

สัจนิรันดร์ (tautology)

แบบฝึกหัด 2.7

1. คู่ใดต่อไปนี้เป็นความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (logically equivalent)

   $P \rightarrow Q$ (เงื่อนไข)

   $Q \rightarrow P$ (บทกลับ)

   $\sim P \rightarrow \sim Q$ (ตัวผกผัน)

   $\sim Q \rightarrow \sim P$ (ข้อความแย้งสลับที่)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$\sim P \rightarrow \sim Q$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

2. จงแสดงว่า $\sim P \wedge \sim Q$ **ไม่**เป็นความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $\sim(P \wedge Q)$:

3. จงแสดงว่า $\sim P \vee \sim Q$ เป็นความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $\sim(P \wedge Q)$:

4. **จงใช้ตารางค่าความจริงพิสูจน์** (prove) **หรือพิสูจน์ว่าเท็จ** (disprove) **สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้**

4.1 $(P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

4.2 $Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

4.3 (P A Q) $\Rightarrow$ Q

4.4 Q $\Rightarrow$ (P A Q)

4.5 (P v Q) $\Rightarrow$ Q

4.6 Q $\Rightarrow$ P v Q

P	Q	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

5. สมมติว่า α และ β เป็นความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์แต่ละชุด มีส่วนประกอบ (component) ได้มากที่สุด คือ P, Q, R สมมติตารางความจริงดังข้างล่างนี้

P	Q	R	α	β
T	T	T	T	F
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

จริงหรือเท็จ :

5.1 $\alpha \Leftrightarrow \beta$ __________

5.2 $\beta \Leftrightarrow$ a __________

5.3 ***a*** $\Leftrightarrow \beta$ ____________

6. กำหนดให้ * เป็นตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ (logical connective) โดย

P	Q	P * Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

จริงหรือเท็จ :

6.1 $P * Q \Rightarrow -(P \ A \ Q)$ __________

6.2 $\sim(P \wedge Q) \Rightarrow P * Q$ __________

6.3 $P * Q \Leftrightarrow \sim(P \leftrightarrow Q)$ __________

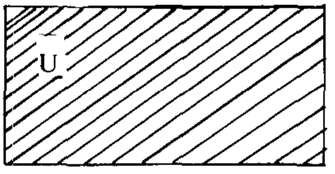
2.6 การทวนสอบของทฤษฎีตัวบ่งปริมาณ (The Verification of Quantifier Theorems)

F_1

ประโยคที่อยู่ในรูป $\sim P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$ และ $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ เรียกว่า **ประโยคเชิงประกอบเปิด** (open compound sentences)

วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเซตความจริงของประโยคเชิงประกอบเปิด กับเซตความจริงของส่วนประกอบ (components) ของมัน ด้วยแผนภาพเวนน์ (Venn diagrams) และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต (ดูบทที่ 3)

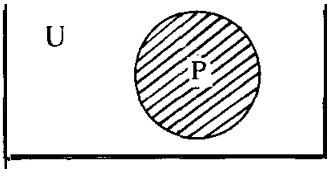
ให้ส่วนภายใน (interior) ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ (universal set) สำหรับ x ดังนั้น รูปที่แทนเอกภพสัมพัทธ์ คือ .... เมื่อให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์



เอกภพสัมพัทธ์สำหรับ x

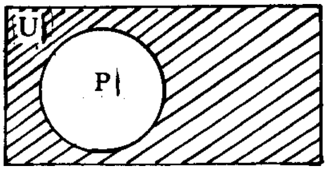
F_2

ให้บริเวณภายในของ P แทนเซตความจริงของประโยคเปิด P(x) :



. เซตความจริงสำหรับ P(x)

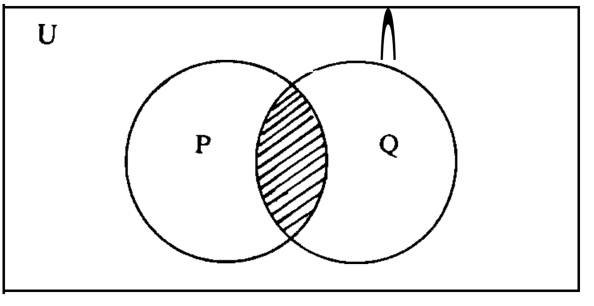
ดังนั้น เซตความจริงสำหรับ $\sim P(x)$ คือ ส่วนเติมเต็ม (คอมพลีเมนต์) ของ P ใน U แสดงด้วยรูปเป็น ....



เซตความจริงสำหรับ $\sim P(x)$

F_3

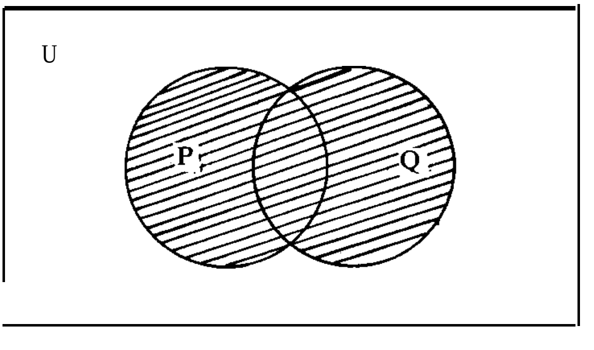
ถ้าบริเวณ Q แทนเซตความจริงสำหรับ Q(x) แล้วเซตความจริงสำหรับประโยคเปิดร่วม $P(x) \wedge Q(x)$ จะแทนด้วยส่วนตัดของ P กับ Q ดังนี้



เซตความจริง สำหรับ $P(x) \wedge Q(x)$

F_4

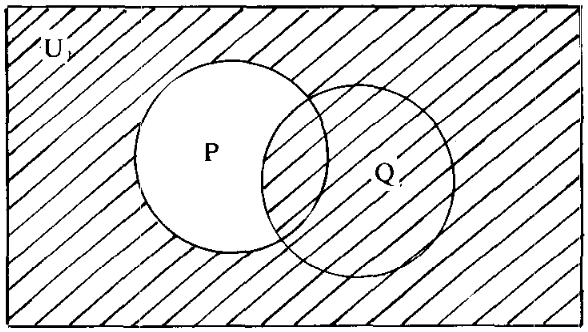
เซตความจริงสำหรับ $P(x) \vee Q(x)$ คือ ผลผนวก (union) ของ P กับ Q ดังนี้



เซตความจริงสำหรับ $P(x) \vee Q(x)$

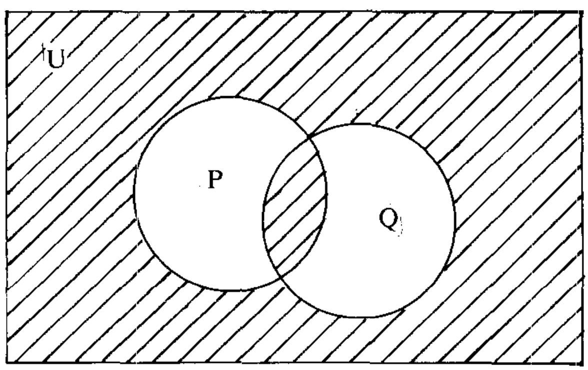
F_5

ในการหาเซตความจริงสำหรับ $P(x) \rightarrow Q(x)$ โดยใช้ความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (logically equivalent) ที่อยู่ในรูป $\sim P(x) \vee Q(x)$ ดังรูป



เซตความจริงของ $P(x) \rightarrow Q(x)$

ดังนั้น เซตความจริงของ $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ แสดงด้วยรูปได้เป็น ....



เซตความจริงของ $P(x) \leftrightarrow Q(x)$

F_6

ประโยคเชิงประกอบเปิด (open compound sentence) ในตัวแปร x ตัวเดียว ที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้เป็นข้อความเชิงตรรกศาสตร์ :

1) $\forall x \, [\sim P(x)]$
2) $\forall x \, [P(x) \wedge Q(x)]$
3) $\forall x \, [P(x) \vee Q(x)]$
4) $\forall x \, [P(x) \rightarrow Q(x)]$
5) $\forall x \, [P(x) \leftrightarrow Q(x)]$
6) $\exists x \, [\sim P(x)]$
7) $\exists x \, [P(x) \wedge Q(x)]$
8) $\exists x \, [P(x) \vee Q(x)]$
9) $\exists x \, [P(x) \rightarrow Q(x)]$
10) $\exists x \, [P(x) \leftrightarrow Q(x)]$

F_7

พิจารณาค่าความจริงของสองสามข้อความข้างต้น (ใน F_6) ในพจน์ของเซตความจริงของส่วนประกอบ P และ Q

ข้อความ $\sim \exists x\,[P(x)]$ **เมื่อ P แทนเซตว่าง หมายความว่า คอมพลีเม้นต์ของ P คือ สมาชิกทั้งหมดของ U ดังนั้นเซตความจริงของ** $\sim P(x)$ **คือ สมาชิกทั้งหมดของ U จึงได้เป็น** $\forall x\,[\sim P(x)]$

จึงตั้งเป็นทฤษฎีเชิงตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$\boxed{\sim \exists x\,[P(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[\sim P(x)]}$$

F_8

พิจารณา $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$ กล่าวได้ว่า **ข้อความนี้สมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ** $(\forall x\,[P(x)] \vee \forall x\,[Q(x)])$ แปลในเชิงความสัมพันธ์ทางเซต ได้ว่า **ข้อความแรก หมายถึง** $P \cup Q = U$ **ในขณะที่ข้อความหลัง หมายถึง** $P = U$ **หรือ** $Q = U$

ดังนั้น $P = U \vee Q = U$ **ทำให้เกิดผล** $P \cup U$ **(แต่เป็นบทกลับไม่ได้) จึงตั้งเป็นทฤษฎีได้ว่า ....**

$$(\forall x\,[P(x)]) \vee (\forall x\,[Q(x)]) \Rightarrow \forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$$

F_9

สามารถแสดงได้ว่าทฤษฎีที่ได้จาก F_8 ไม่สมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (ไม่สามารถเขียนเป็น $\Leftrightarrow$) ได้จากตัวอย่าง

เมื่อ $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$ **เป็นจริง แต่** $(\forall x\,[P(x)]) \vee (\forall x\,[Q(x)])$ **เป็นเท็จ ดังเช่น :**

ให้เอกภพสัมพัทธ์ เป็นกล่องดินสอกล่องหนึ่ง

$P(x)$: x **เป็นสีแดง**

$Q(x)$: x **แหลม**

แล้ว $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$ **หมายถึง ดินสอทุก ๆ แท่งในกล่องเป็นสีแดงหรือแหลม ในขณะที่** $(\forall x\,[P(x)] \vee (\forall x\,[Q(x)])$ **หมายถึง ดินสอทุก ๆ แท่งในกล่องเป็นสีแดง หรือดินสอทุก ๆ แท่งในกล่องแหลม**