ถ้าให้ในกล่องมีดินสอ 2 แท่ง โดยที่แท่งหนึ่งแหลมและมีสีน้ำเงิน อีกแท่งหนึ่งเป็นสีแดงและทู่ เมื่อมีคำกล่าวว่า "มีดินสอแท่งหนึ่งในกล่องเป็นสีแดง และมีดินสอแท่งหนึ่งในกล่องแหลม" เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ ....

$$\exists x\ [P(x)] \wedge \exists x\ [Q(x)]$$

F_{10}

จากคำตอบใน F_9 รวมความได้ว่า ดินสอแท่งหนึ่งในกล่องทั้งเป็นสีแดงและแหลม เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$	ใช่ไหม(1) เพราะเหตุใด(2)
$(\exists x\ [P(x)]) \wedge (\exists x\ [Q(x)])$	ทำให้เกิดผลเชิงตรรกศาสตร์ (logically imply) เป็น
$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$	หรือไม่(3) และ
$\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$	ทำให้เกิดผลเชิงตรรกศาสตร์ เป็น
$(\exists x\ [P(x)] \wedge \exists x\ [Q(x)])$	หรือไม่(4)

---

1. ใช่
2. ....
3. ....
4. ....

F_{11}

ข้อความ $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$ ก็น่าสนใจ หมายความว่า เซตความจริงของ $P(x) \rightarrow Q(x)$ คือ ทั้งหมดใน U ดังนั้น เซตความจริงของ $\sim P(x) \vee Q(x)$ คือ ทั้งหมดใน U ด้วย

ทำให้ $\sim P \cup Q = U$ เมื่อ $P \subset Q$

ดังนั้น $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$ ทำให้เกิดผลเป็น ....

$$\forall x\ [\sim P(x)] \vee \forall x\ [Q(x)]$$

F_{12}

นักศึกษาได้ทราบทฤษฎีที่ได้เรียนในมัธยมปลายมาบ้างแล้ว ซึ่งละตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (universal quantifiers) ดังเช่น คุณสมบัติการสลับที่ ($\forall x \in R, \forall y \in R, x + y = y + x$) เขียนอยู่ในรูป :

1) $x + y = y + x$

2) ถ้า $x \in R$ และ $y \in R$ แล้ว $x + y = y + x$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างซึ่งแต่ละตัวบ่งปริมาณทั้งหมด ($\forall$) :

a) ถ้า n^2 เป็นเลขคู่ แล้ว n เป็นเลขคู่

b) $x + x = 2x$

c) ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

d) ถ้า $xy = 0$ แล้ว $x = 0$ หรือ $y = 0$

e) $x \in A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

ตัวบ่งปริมาณที่ละไว้ แปลประโยคในรูป $\forall x \in S, P(x)$ เป็น "ถ้า $x \in S$ แล้ว $P(x)$"

แบบฝึกหัด 2.8

1. จงแสดงเซตความจริงของ $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ ด้วยแผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)

2. จงพิสูจน์ หรือพิสูจน์ว่าเท็จ :

   2.1 $\exists x, P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow (\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x))$

   2.2 $(\exists x, P(x)) \wedge (\exists x, Q(x)) \Rightarrow \exists x, P(x) \wedge Q(x)$

3. ให้ U ประกอบด้วยดินสอทั้งหมดในกล่อง

   $P(x)$: x เป็นสีแดง

   $Q(x)$: x แหลม

   จงแปลข้อความ ตั้งแต่ ข้อ 1) ถึง 8) ใน F_6

4. จริงหรือเท็จ :

   4.1 $\forall x, P(x) \Leftrightarrow P(x)$

   4.2 $\forall x \in S, P(x) \leftrightarrow \forall x, x \in S \rightarrow P(x)$

5. จงให้ความสัมพันธ์ระหว่างเอกภพสัมพัทธ์ U เซตความจริง P และเซตความจริง Q ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   5.1 $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$

   5.2 $\exists x, P(x) \wedge Q(x)$

   5.3 $\forall x, P(x) \vee Q(x)$

   5.4 $\exists x, P(x) \vee Q(x)$

   5.5 vx, P(x)

   5.6 3x, P(x)

   5.7 vx, $P(x) \rightarrow Q(x)$

   5.8 $\forall x, P(x) \leftrightarrow Q(x)$

   5.9 vx, -P(x)

   5.10 $\exists x$, -P(x)

6. จงใช้แผนภาพเวนน์ และให้ U : คนทั้งหมดที่อาศัยอยู่

S : ผู้ที่สูบบุหรี่

D : ผู้ที่ดื่มเหล้า

6.1 แผนภาพเวนน์จะเป็นอย่างไร ถ้า :

6.1.1 ไม่มีผู้สูบบุหรี่เลย

6.1.2 ไม่มีผู้สูบบุหรี่ที่ดื่มเหล้า

6.1.3 บางคนที่สูบบุหรี่ดื่มเหล้า

6.1.4 ทุก ๆ คนที่สูบบุหรี่ดื่มเหล้า

6.1.5 ทุก ๆ คนสูบบุหรี่

6.2 ข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

6.2.1 ถ้าผู้สูบบุหรี่ทุกคนเป็นคนดื่มเหล้า แล้วผู้ที่ไม่ดื่มเหล้า และไม่สูบบุหรี่ทุกคนเป็นคนไม่สูบบุหรี่ ______

6.2.2 ถ้าคนที่สูบบุหรี่ทุกคนเป็นคนดื่มเหล้า แล้วฉันดื่มเหล้า หรือฉันไม่สูบบุหรี่___

6.2.3 ถ้าชายคนหนึ่งไม่เป็นทั้งคนดื่มเหล้าและสูบบุหรี่ แล้วเขาไม่เป็นคนดื่มเหล้า หรือเขาไม่สูบบุหรี่ ______

2.9 **ประโยชน์ของตรรกศาสตร์** (Useful Points of Logic)

F_1

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ที่ใช้เสมอ และการนำทฤษฎีไปใช้ นักศึกษาต้องจำชื่อของทฤษฎีให้ได้

ทฤษฎีต่อไปเป็นสัจนิรันดร์ (tautology) ดังเช่นทฤษฎีที่ 4 :

P ทำให้เกิดผล $P \vee Q$ เขียนได้ว่า

$P \rightarrow (P \vee Q)$ ซึ่งเป็นสัจนิรันดร์

F_2

สัจนิรันดร์เบื้องต้น (Basic Tautologies) 2 ประการมีดังนี้ :

1. $P V - P$	the excluded middle
2. $\sim(P \, A \sim P)$	non-contradiction

F_3

การแจงเหตุไปสู่ผลเชิงตรรกศาสตร์ (Some Logical Implication) มีดังต่อไปนี้ :

3. $P \Rightarrow P \wedge P$	
4. $P \Rightarrow P \vee Q$	addition rule (กฎการเพิ่ม)
5. $P \wedge Q \Rightarrow P$	substraction rule (กฎการเอาออก)
6. $\mathbf{P \; A \; (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q}$	modus ponens (การแจงผลตามเหตุ)
7. $(P \rightarrow Q) \; A \; (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	syllogism (ตรรกบท)
8. $(P \vee Q) \wedge \sim Q \Rightarrow P$	law of disjunction (กฎการเลือก)
9. $\sim P \rightarrow (Q \wedge \sim Q) \Rightarrow P$	proof by contradiction (การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง)
10. $Q \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	
11. $-P \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	
12. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow [(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)]$	

F_4

ความสมมูลทางตรรกศาสตร์ (Some Logical Equivalences) มีดังต่อไปนี้

13. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ contraposition (ข้อความแย้งสลับที่)

14. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

15. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

16. $[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

17. $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$

18. $[P \rightarrow (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge \sim Q) \rightarrow R]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{19. } (P \wedge Q) \Leftrightarrow Q \wedge P \\ \text{20. } (P \vee Q) \Leftrightarrow Q \vee P \end{array}\right\}$$ commutative laws (กฎการสลับที่)

$$\left.\begin{array}{l} \text{21. } [P \wedge (Q \wedge R)] \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \\ \text{22. } P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \end{array}\right\}$$ associative law (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)

$$\left.\begin{array}{l} \text{23. } P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ \text{24. } P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{array}\right\}$$ distributive law (กฎการกระจาย)

F_5

ทฤษฎีที่เกี่ยวกับตัวบ่งปริมาณ มีดังต่อไปนี้ :

25. $\forall x\, [P(x)] \Leftrightarrow \forall y\, [P(y)]$

26. $\exists x\, [P(x)] \Leftrightarrow \exists y\, [P(y)]$

27. $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x\, [P(x)]) \wedge (\forall x\, [Q(x)])$

28. $\exists x\, [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow (\exists x\, [P(x)]) \wedge (\exists x\, [Q(x)])$

29. $\forall x\, [P(x) \vee Q(x)] \Leftarrow (\forall x\, [P(x)]) \vee (\forall x\, [Q(x)])$

30. $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow (\exists x\, [P(x)]) \vee (\exists x\, [Q(x)])$

31. $(\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists x\, [P(x)]) \Rightarrow \exists x\, [Q(x)]$

32. $\exists x, \forall y\, [P(x, y)] \Rightarrow \forall y, \exists x\, [P(x, y)]$

33. $\forall x, \forall y\, [P(x, y)] \Leftrightarrow \forall y, \forall x\, [P(x, y)]$

34. $\exists x, \exists y\, [P(x, y)] \Leftrightarrow \exists y, \exists x\, [P(x, y)]$

F_6

ทฤษฎีของนิเสธ (The Negation Theorems) มีดังต่อไปนี้

35. $\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$ double negation (นิเสธสองชั้น)

$$\left.\begin{array}{l} \text{36. } \sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q \\ \text{37. } \sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q \end{array}\right\}$$ De Morgan's Laws (กฎของเดอ มอร์กอง)

38. $\sim(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge -\quad Q$

39. $\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$

40. -vx [P(x)] $\Leftrightarrow$ 3x [-P(x)]

41. - 3 x [P(x)] $\Leftrightarrow$ vx [-P(x)]

แบบฝึกหัด 2.9

1. จงใช้ตารางค่าความจริงแสดงถึงทฤษฎีบทที่ 6, 7, 8, 9, 23, 24, 36, 37, 38, 39

2. จงแสดงถึงทฤษฎีบท 28 และ 29 และ
   จงให้ตัวอย่างแสดงว่าทำไมทั้งสองทฤษฎีนี้ไม่เป็นความสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (logical equivalences)

3. จงแสดงถึงทฤษฎีบท 31

2.10 นิเสธของข้อความ (Negating Statement)

F_1

นิเสธของข้อความประกอบ หรือข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ ซึ่งเป็นประโยคในทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีนิเสธ (negation theorems) ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 2.9 สามารถแสดงได้ดังเช่น

พิจารณาทฤษฎีบท 40 และ 41 กล่าวว่า $\forall x \in U\,[P(x)]$ เป็นเท็จ แสดงว่า เซตความจริงของ $P(x)$ ไม่ใช่ทั้งหมดของ U หมายความว่า มีสมาชิก u บางตัวของ U ซึ่ง $P(u)$ เป็น ....

เท็จ

F_2

จาก F_1 จึงได้ $\exists x\,[\sim P(x)]$ ดังทฤษฎีบท 40 (F_6 ของหัวข้อ 2.9) ทฤษฎีบท 41 ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

F_3

ในการแสดงถึงประโยชน์ของทฤษฎีนิเสธ พิจารณาได้ดังต่อไปนี้ : นิเสธของ $\forall x \in R,\ \exists n \in N\,[n < x \wedge x < n + 1]$

เขียนแทนด้วย $\sim(\forall x \in R, \exists n \in N\,[n < x \wedge x < n + 1])$

$\Leftrightarrow\ \exists x \in R, \sim\exists n \in N\,[n < x \wedge x < n + 1]$ (ทฤษฎีบท 40)

$\Leftrightarrow\ \exists x \in R, \forall n \in N\,[\sim(n < x \wedge x < n + 1)]$ (ทฤษฎีบท 41)

$\Leftrightarrow$ .... (ทฤษฎีบท 36)

$\exists x \in R,\ \forall n \in N\ [n \geqslant x \vee x \geqslant n + 1]$

แบบฝึกหัด 2.10

1. จงใช้ทฤษฎีบท 35-41 ทำนิเสธต่อไปนี้ให้เป็นรูปอย่างง่าย

   1.1 $\sim \forall x \in R, \exists y \in R, (x < y \wedge x + y = 1)$

   1.2 $\sim \forall x, [P(x) \rightarrow Q(x)]$

   1.3 $\sim \forall x \in R, \forall y \in R, [x.y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0]$

   1.4 $\sim \exists x, P(x) \wedge Q(x)$

   1.5 $\sim \exists x, \forall y, P(x) \vee P(y)$

   1.6 $\sim \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

   1.7 $\sim \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \forall y, |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

   1.8 $\sim \forall x, \forall y, x \odot y = y \odot x$

   1.9 จงเขียนนิเสธของข้อความ "สำหรับแต่ละ x ใน R มี y บางตัวใน R ซึ่ง $x.y = 1$"

   1.10 จงเขียนนิเสธของข้อความ "สำหรับแต่ละ x ถ้า x อยู่ในเซต A แล้ว x อยู่ในเซต B ด้วย"

2. อย่าลืมว่า z เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ $\exists k \in Z, z = 2k$ จงใช้ทฤษฎีบท 41 เขียนความหมายของ "z ไม่เป็นเลขคู่"

3. ฟังก์ชัน f **เป็นฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ x และทุก ๆ y ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $f(x) \leqslant f(y)$ คำกล่าวที่กล่าวว่า f **ไม่** เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หมายความว่าอย่างไร

คำตอบ

1. 1.1 $\exists x \in R, \forall y \in R, x \geqslant y \vee x + y \neq 1$

   1.2 $\exists x, P(x) \wedge \sim Q(x)$

   1.3 $\exists x, \exists y, xy = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$

   1.4 $\forall x, \sim P(x) \vee \sim Q(x)$

   1.5 $\forall x, \exists y, \sim P(x) \wedge \sim P(y)$

   1.6 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$

   1.7 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \exists y, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$

   1.8 $\exists x, \exists y, x \odot y \neq y \odot x$

1.9 มี x บางตัว ใน R ซึ่งแต่ละ y ใน R, $x.y \neq 1$

1.10 มี x บางตัว ซึ่ง x อยู่ใน A และ x ไม่เป็นสมาชิกของ B

2. "z ไม่เป็นเลขคู่" หมายความว่า $\forall k \in Z, z \neq 2k$

3. f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ มี x บางตัว และมี y บางตัว ซึ่ง $x \leqslant y$ และ $f(x) > f(y)$

2.11 ข้อโต้แย้งเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Argument)

F_1

ข้อโต้แย้งทางตรรกศาสตร์ คือ เซต $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ ของประโยคเชิงตรรกศาสตร์ เรียกว่า **สมมุติฐาน** (hypotheses) และข้อความ C เรียกว่า **ข้อยุติ** (the conclusion) ข้อโต้แย้งนี้แทนด้วย :

$$\begin{array}{ll} & H_1 \\ & H_2 \\ & \vdots \\ & H_n \\ \therefore & C \end{array}$$

F_2

กล่าวได้ว่าข้อโต้แย้ง**สมเหตุสมผล** (Valid) ก็ต่อเมื่อข้อความร่วม $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ ของสมมุติฐาน ทำให้เกิดข้อยุติ C :

$$\begin{array}{ll} & H_1 \\ & H_2 \\ & \vdots \qquad \text{สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ } H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_3 \Rightarrow C \\ & H_n \\ \therefore & C \end{array}$$

F_3

กล่าวได้ว่า ข้อโต้แย้งสมเหตุสมผล ถ้าทุก ๆ สมมุติฐานเป็นจริง แล้วข้อยุติ จะต้องเป็นจริงด้วย

นั่นคือ

$$\begin{array}{ll} & H_1 \\ & H_2 \\ & \vdots \\ & H_n \\ \hline \therefore & C \end{array}$$

สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์

F_4

กล่าวได้ว่า ข้อโต้แย้ง (argument) **ไม่สมเหตุสมผล** (invalid) ก็ต่อเมื่อมันไม่เป็นไปดัง F_3 (not valid) หรือ กล่าวว่าข้อโต้แย้งไม่สมเหตุสมผล เมื่อทุก ๆ สมมุติฐานเป็นจริง และข้อยุติ (conclusion) เป็นเท็จ

F_5

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

บิ๋มจะเป็นหมอ หรือเป็นวิศวกร ถ้าบิ๋มเป็นวิศวกรแล้ว บิ๋มต้องไปทำงานที่เขื่อน บิ๋มไม่เป็นหมอ เพราะฉะนั้น บิ๋มต้องไปทำงานที่เขื่อน

ข้อโต้แย้งข้างบนนี้อยู่ในรูป ....

$$\begin{array}{l} D \vee E \\ E \rightarrow F \\ \sim D \\ \hline \therefore F \end{array}$$

F_6

ตารางค่าความจริงข้างล่างนี้ แสดงว่า $(D \vee E) \wedge (E \rightarrow F) \wedge \sim D$ ทำให้เกิดผล E เพราะฉะนั้น E เป็นจริง เมื่อไรก็ตามที่ $D \vee E$, $E \rightarrow F$ และ $\sim D$ เป็นจริงทั้งหมด

นั่นคือ ข้อโต้แย้งนี้สมเหตุสมผล

	D	E	F	$D \vee E$	$E \rightarrow F$	$\sim D$	F
	T	T	T	T	T	F	T
	T	T	F	T	F	F	F
	T	F	T	T	T	F	T
	T	F	F	T	T	F	F
สังเกต :	F	T	T	T	T	T	T
	F	T	F	T	F	T	F
	F	F	T	F	T	T	T
	F	F	F	F	T	T	F

F_7

พิจารณาข้อโต้แย้ง :

ถ้านิดไม่สูบบุหรี่ แล้วชีวิตเขาจะยืนยาว

นิดสูบบุหรี่ เพราะฉะนั้น ชีวิตเขาไม่ยืนยาว

ข้อโต้แย้งนี้เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น ....

$$\begin{array}{l} \sim S \rightarrow D \\ \underline{S \qquad} \\ \therefore \sim D \end{array}$$

F_8

ตารางค่าความจริงข้างล่างนี้ แสดงว่า (สังเกตกรณีที่ 1) เป็นไปได้ที่ $\sim S \rightarrow D$ และ S เป็นจริง ในขณะที่ $\sim D$ เป็นเท็จ ดังนั้น $(\sim S \rightarrow D) \wedge S$ **ไม่** ทำให้เกิดผล $\sim D$ เพราะฉะนั้น ข้อโต้แย้งนี้ไม่สมเหตุสมผล

	S	D	$\sim S \rightarrow D$	S	$\sim D$
สังเกต : →	T	T	T	T	F
	T	F	T	T	T
	F	T	T	F	F
	F	F	F	F	T

จะเห็นได้ว่านี่ (ตาราง) เป็น**วิธีหนึ่ง**ที่ใช้ตรวจสอบว่าข้อโต้แย้งว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

F_9

วิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล (valid) โดยใช้ตารางดัง F_8 **นี้ไม่ได้ผลจริง** (impractical) **นัก** ในกรณีที่สมมุติฐาน (hypotheses) มีเป็นจำนวนมาก ทำให้จำนวนของส่วนประกอบที่เกี่ยวข้องมีจำนวนมาก ๆ ไปด้วย (ถ้ามีข้อความ หรือประพจน์ย่อยที่เกี่ยวข้อง 10 ประพจน์ แล้วตารางค่าความจริงจะประกอบด้วย 1024 กรณี) จึงมี**อีกทางหนึ่ง**ที่จะแสดงได้ว่า ข้อโต้แย้งสมเหตุสมผล คือ **การพิสูจน์หาความสมเหตุสมผลของมัน** โดยอาศัยทฤษฎีทางตรรกศาสตร์

F_{10}

โดยทั่วไป สมมติว่า แต่ละสมมุติฐานเป็นจริง แล้วใช้ทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ พิสูจน์ให้ได้ว่าเงื่อนไขเป็นจริงด้วย

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาข้อโต้แย้ง

$$\begin{array}{ll} & D \vee E \\ & E \rightarrow F \\ & \underline{\sim D} \\ \therefore & F \end{array}$$

พิสูจน์

ความสมเหตุสมผลของมันได้ดังนี้

DVE	กำหนดให้
DVE ทำให้เกิดผล $E \vee D$	กฎการสลับที่ (commutative law)
แต่ $\sim D$	กำหนดให้
ดังนั้น $E \vee D$ และ $\sim D$	กฎของการเลือก (law of disjunction)
ทำให้เกิดผล E	
$E \rightarrow F$	กำหนดให้
เพราะฉะนั้นเกิดผล F	กฎการแจงเหตุตามผล (modus ponens)

F_{11}

การพิสูจน์ใน F_{10} แสดงด้วย**แผนภาพ** ดังนี้ :

โดยกฎการสลับที่   โดยกฎการเลือก   โดยการแจงเหตุตามผล

$D \vee E$ กำหนดให้ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{c} E \vee D \\ \hline \sim D \end{array}\right\}$ กำหนดให้ $\Rightarrow$ E

$\left.\begin{array}{c} E \rightarrow F \end{array}\right\}$ กำหนดให้ $\Rightarrow F$

F_{12}

อีกรูปหนึ่งของการพิสูจน์ คือ **รูปเชิงเส้น** (linear form) แสดงได้ดังนี้

	1.	$D \vee E$	กำหนดให้
$\therefore$	2.	$E \vee D$	1, กฎการสลับที่
	3.	$\sim D$	กำหนดให้
$\therefore$	4.	E	2, 3 กฎของการเลือก
	5.	$E \rightarrow F$	กำหนดให้
$\therefore$	6.	F	4, 5 การแจงเหตุตามผล

F_{13}

ตัวอย่างที่ 2   พิจารณาข้อโต้แย้ง

$$\begin{array}{l} \sim(P \wedge \sim Q) \\ Q \rightarrow \sim R \\ S \wedge R \\ \hline \therefore \ \sim P \vee T \end{array}$$

พิสูจน์

	$\sim(P \wedge \sim Q)$	กำหนดให้
จึงได้	$\sim P \vee \sim(\sim Q)$	โดยกฎของเดอ มอร์กอง
เพราะฉะนั้น	$\sim P \vee Q$	โดยกฎของนิเสธสองชั้น
และ	$Q \rightarrow \sim R$	กำหนดให้
	$\sim(\sim R) \rightarrow \sim Q$	โดยข้อความแย้งสลับที่

ซึ่งสมมูลกับ $R \to \sim Q$ นิเสธสองชั้น

$S \wedge R$ กำหนดให้

จึงได้ R โดยการเอาออก (subtraction)

$R \wedge (R \to \sim Q)$ ทำให้เกิดผล

$\sim Q$ โดยการแจงเหตุตามผล

และ $[\sim P \vee Q] \wedge (\sim Q)$ ทำให้เกิดผล

$\sim P$ โดยกฎของการเลือก

เพราะฉะนั้น $\sim P \to (\sim P \vee T)$ โดยกฎการเพิ่ม (addition)

F_{14}

เขียนแผนภาพของการพิสูจน์ ใน F_{13} ได้ดังนี้ :

$$\left.\begin{array}{l} \sim(P \wedge \sim Q) \overset{1}{\Rightarrow} \sim P \vee \sim(\sim Q) \overset{2}{\Rightarrow} \sim P \vee Q \\ \left.\begin{array}{l} Q \to \sim R \overset{3}{\Rightarrow} (\sim R) \to \sim Q \overset{4}{\Rightarrow} R \to \sim Q \\ S \wedge R \overset{5}{\Rightarrow} R \end{array}\right\} \overset{6}{\Rightarrow} \sim Q \end{array}\right\} \overset{7}{\Rightarrow} \sim P \overset{8}{\Rightarrow} \sim P \vee T$$

เหตุผล

1. เดอ มอร์กอง
2. นิเสธสองชั้น
3. ข้อความแย้งสลับที่
4. นิเสธสองชั้น
5. การเอาออก
6. การแจงเหตุตามผล
7. กฎของการเลือก
8. การเพิ่ม

F_{15}

การพิสูจน์รูปเชิงเส้น :

1. $\sim(P \wedge \sim Q)$	กำหนดให้
2. $\sim P \vee \sim(\sim Q)$	1, เดอ มาร์กอง
3. $\sim P \vee Q$	2, นิเสธสองชั้น
4. $Q \rightarrow \sim R$	กำหนดให้
5. $\sim(\sim R) \rightarrow \sim Q$	4, ข้อความแย้งสลับที่
6. $R \rightarrow \sim Q$	5, นิเสธสองชั้น
7. $S \wedge R$	กำหนดให้
8. $\therefore R$	7, กฎของการเอาออก
9. $\sim Q$	6, 8 การแจงเหตุตามผล
10. $\sim P$	3, 9 กฎของการเลือก
11. $\sim P \vee T$	10, กฎการเพิ่ม

แบบฝึกหัด 2.11

ข้อ 1-6 เป็นการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้อโต้แย้ง
จงเติมเหตุผลและขั้นตอนที่หายไปในช่องว่าง

1. สมมุติฐาน (hypothesis) : $P \rightarrow Q$, $\sim Q \vee S$, $\sim S$

   ข้อยุติ (conclusion) : $\sim P$

   พิสูจน์

   1) $\sim S$ กำหนดให้
   2) $\sim Q \vee S$ เป็น ....
   3) $\therefore \sim Q$ โดย ....

   ---

   4) $P \rightarrow Q$ ....
   5) $\therefore \sim Q \rightarrow \sim P$ ....

   ---

   6) $\therefore \sim P$ จาก 3) และ 5) โดย..............................

2. สมมุติฐาน : $P \leftrightarrow Q$, $R \rightarrow Q$, R

   ข้อยุติ : P

   พิสูจน์

   1) R เป็น ....
   2) $R \rightarrow Q$ ....
   3) $\therefore$ .... โดยการแจงเหตุตามผล (Modus Ponens)

   ---

   4) $P \leftrightarrow Q$ ....
   5) $\therefore (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ....
   6) $\therefore Q \rightarrow P$ ....

   ---

   7) $\therefore P$ จาก 3) และ 6) โดย ....

3. สมมติฐาน : $\sim P \vee Q$, $\sim R \rightarrow \sim Q$, P

   ข้อยุติ : R

พิสูจน์

1) $\sim P \vee Q$	กำหนดให้
2) P	กำหนดให้
3) $\therefore$..........	โดย ....
4) - R - r - Q	....
5) $\therefore$ $Q \rightarrow R$	....
6) $\therefore$ R	โดย ....

4. **สมมุติฐาน** : $\sim P \vee Q$, - R - r - Q

ข้อยุติ : $P \rightarrow R$

พิสูจน์

1) $\sim P \vee Q$	....
2) $\therefore$..........	โดยทฤษฎีบท 15
3) - R - , - Q	
4) $\therefore$..........	โดยข้อความแย้งสลับที่ (contraposition)
5) $\therefore$ $P \rightarrow R$	จาก 2) และ 4) โดย ....

5. **สมมุติฐาน** : $P \rightarrow (Q \wedge R)$, $S \vee P$, $Q \vee S \rightarrow T$

ข้อยุติ : T

พิสูจน์

1) $S \rightarrow Q \vee S$	....
2) $Q \vee S \rightarrow T$	....
3) $\therefore$	โดยตรรกบท (syllogism)
4) $P \rightarrow Q \wedge R$	....
5) $Q \wedge R \rightarrow Q$	....
6) $\therefore$ $P \rightarrow Q$	....
7) $Q \rightarrow Q \vee S$	....
6) $\therefore$ $P \rightarrow Q \vee S$	....

9) $Q \vee S \rightarrow T$ ....

10) $\therefore P \rightarrow T$ ....

---

11) $\therefore$ .... จาก 3) และ 10) โดยแจงกรณี (proof of coses)

12) .... กำหนดให้

13) $\therefore$ .... การแจงผลตามเหตุ

6. สมมุติฐาน : $P \rightarrow Q \wedge R,\ S \vee P,\ Q \vee S \rightarrow T,\ \sim T$

ข้อยุติ : $Q \wedge \sim Q$

พิสูจน์

1) $Q \vee S \rightarrow T$ ....

2) .... โดยข้อความแย้งสลับที่

3) $\sim T$ ....

4) $\therefore \sim(Q \vee S)$ ....

5) $\therefore$ .... โดย เดอ มอร์กอง

6) $\therefore \sim S$ ....

7) $S \vee P$ ....

8 $\therefore P$ ....

9) $\therefore$ .... โดยการแจงผลตามเหตุ (Modus ponens)

10) $\therefore Q$ ....

---

11) $\therefore \sim Q$ จาก 5) โดย ....

---

12) $\therefore Q \wedge \sim Q$ จาก 11) และ 5)

จากข้อ 7-9 จงแสดงการพิสูจน์ว่าข้อโต้แย้งแต่ละข้อไม่สมเหตุสมผล (invalid) **โดยแสดงจากสมมุติฐาน ที่ถือว่าเป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อยุติ** (conclusion) **เป็นเท็จ**

7. สมมุติฐาน : $Q,\ P \rightarrow Q$

ข้อยุติ : P

พิสูจน์

ให้ P เป็น..

ให้ Q เป็น...จริง..

ในกรณีนี้สมมุติฐาน Q และ $P \rightarrow Q$ เป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อยุติ P เป็นเท็จ

ดังนั้น $Q \wedge (P \rightarrow Q)$ ไม่แจงเหตุไปสู่ผล P เพราะฉะนั้นข้อโต้แย้งไม่สมเหตุสมผล (invalid)

8. สมมุติฐาน : $P \rightarrow \sim Q, P \rightarrow R, Q$

ข้อยุติ : R

พิสูจน์

ให้ R เป็น ....

ให้ P เป็น ....

ให้ Q เป็น ....

ในกรณีนี้สมมุติฐานเป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อยุติเป็นเท็จ

ดังนั้นข้อโต้แย้งไม่สมเหตุสมผล

9. สมมุติฐาน : $\sim Q, P \rightarrow Q$

ข้อยุติ : $R \vee P$

พิสูจน์

ให้ P เป็น ....

ให้ Q เป็น ....

ให้ R เป็น ....

ข้อ 10-16 จงพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของข้อโต้แย้งที่กำหนดให้ หรือความไม่สมเหตุสมผล ในกรณีที่สมมุติฐานเป็นจริงทั้งหมด แต่ข้อยุติเป็นเท็จ

10. $P \rightarrow Q \vee R$

$Q \rightarrow (R \rightarrow T)$

$\sim T$

$\therefore \sim P$

11. $P \vee Q$

$Q \leftrightarrow (P \rightarrow R)$

$R \vee (Q \wedge T)$

$T \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$

$\therefore \sim R$

12. $\sim Q \rightarrow \sim P$

$Q \rightarrow \sim R$

P

$\sim (\sim R \wedge S)$

$\therefore \sim S$

13. $\sim (A \vee B)$

$\therefore \sim A$

14. ถ้า Δ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วมันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า Δ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าก็ต่อเมื่อ มันเป็นสามเหลี่ยมมุมเท่า ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเท่ากันแล้ว สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ใน Δ ABC, $<A = <B = 30°$ เพราะฉะนั้น Δ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมเท่า

15; 9 เป็นตัวคูณของ 4 หรือ 5 เป็นตัวคูณของ 2, 5 ไม่เป็นตัวคูณของ 2 เพราะฉะนั้น 9 ไม่เป็นตัวคูณของ 4

16. ถ้าฉันเข้าชั้นเรียนในเวลา 8 โมง (C) แล้ว ฉันจะต้องตื่นเวลา 7.45 น. (G) ถ้าฉันไปงานปาร์ตี้คืนนี้ (P) แล้วฉันจะอยู่จนถึงตี 3 (U) ถ้าฉันยังคงอยู่จนถึงตี 3 และตื่นนอนเวลา 7.45 น. แล้วฉันจะนอนได้น้อยกว่า 5 ชั่วโมง (S) ฉันไม่อยากนอนน้อยกว่า 5 ชั่วโมง ฉันไม่อยากพลาดการเรียนตอน 8 โมง ดังนั้น ฉันไม่สามารถไปงานปาร์ตี้ (เขียนในเทอมของ C, G, P, U และ S ก่อนที่จะวิเคราะห์ข้อโต้แย้ง)

2.12 **นิยาม** (Definition)

F_1

นิยาม คือกระบวนการกำหนดชื่อ เพื่อให้เกิดแนวคิด (concept) นิยามเป็นการอธิบายคำอย่างสั้น ๆ แต่สามารถจำแนกแยกแยะได้ ดังเช่น

ให้ z เป็นสมาชิกของ Z ของจำนวนเต็มทั้งหมด กล่าวว่า z **เป็นเลขคู่** ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $z = 2m$ นี่เป็นการกำหนดชื่อของจำนวน ที่อยู่ในรูป $z = 2m$ เมื่อ $m \in Z$

กล่าวว่า "z เป็นเลขคู่" เป็นการอธิบายอย่างสั้น ๆ แน่นอนว่า "มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $z = 2m$"

นิยามนี้เป็นการกำหนดและจำแนกจำนวนเต็ม : ทุก ๆ จำนวนเต็มเป็นเลขคู่ หรือไม่เป็นเลขคู่

F_2

ทุก ๆ นิยามอยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ เพื่อให้มองเห็นการจำแนก และ**ข้อความแย้งสลับที่ของมัน**อยู่ในรูป $\sim P \leftrightarrow \sim Q$ ($\sim P \leftrightarrow \sim Q$ สมมูลกับ $P \leftrightarrow Q$) ดังตัวอย่างข้อความแย้งสลับที่ของนิยามข้างบนนี้ คือ :

z **ไม่เป็นเลขคู่** ก็ต่อเมื่อแต่ละจำนวน $m, z \neq 2m$

แบบฝึกหัด 2.12

จงเขียนนิยามต่อไปนี้ในรูปข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive form)

1) จงแปลเป็นสัญลักษณ์เชิงตรรกศาสตร์

2) แล้วจัดให้เป็นรูปนิเสธอย่างง่าย

และ 3) สุดท้าย จงแปลกลับเป็นข้อความ (ไม่ใช่สัญลักษณ์)

1. ฟังก์ชัน f **เป็นฟังก์ชันเพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ x และทุก ๆ y ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $f(x) \leqslant f(y)$

   (หมายเหตุ : ให้ iff แทน if and only if)

   1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ..........

   2) f **ไม่**เป็นฟังก์ชันเพิ่มก็ต่อเมื่อ..........

   3) f **เป็นฟังก์ชันเพิ่มไม่**ก็ต่อเมื่อ..........

คำตอบ

1) $\forall x, \forall y, (x \leqslant y \rightarrow f(x) \leqslant f(y))$

2) $\exists x, \exists y, (x \leqslant y \wedge f(x) > f(y))$

3) ฟังก์ชัน f **เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม** ก็ต่อเมื่อมีจำนวน x และ y ซึ่ง $x \leqslant y$ และ $f(x) > f(y)$

2. ℓ **เป็นลิมิตของลำดับ** (sequence) $< x_n >$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนนับ k ซึ่ง สำหรับทุก ๆ $n > k$, $| x_n - \ell | < \varepsilon$

   1) ℓ เป็นลิมิตของ $< x_n >$ ก็ต่อเมื่อ

   ....

   2) ℓ **ไม่**เป็น ลิมิตของ $< x_n >$ ก็ต่อเมื่อ

   ....

   3) ℓ ไม่เป็นลิมิตของลำดับ $< x_n >$ ก็ต่อเมื่อ

   ....

คำตอบ

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in N, \forall n > k, | x_n - \ell | < \varepsilon$

2) $\exists \varepsilon > 0, \forall k \in N, \exists n > k, | x_n - \ell | \geqslant \varepsilon$

3) ℓ ไม่เป็นลิมิตของลำดับ $< x_n >$ ก็ต่อเมื่อมีบาง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง สำหรับแต่ละ $k \in N$ มีบาง $n > k$ ซึ่ง $| x_n - \ell | \geqslant \varepsilon$

3. เซต A **อยู่ในเซต** B ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ x ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

1) A อยู่ใน B ก็ต่อเมื่อ..

2) A ไม่อยู่ใน B ก็ต่อเมื่อ ....

3) A ไม่อยู่ใน B ก็ต่อเมื่อ ....

....

คำตอบ

1) $\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$

2) $\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$

3) A ไม่อยู่ใน B ก็ต่อเมื่อ มีบาง x ซึ่ง $x \in A$ แต่ $x \notin B$

4. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ x เป็นสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ กล่าวว่า x เป็นสมาชิกของผลผนวก (union) ของ A กับ B ก็ต่อเมื่อ $x \in A$ หรือ $x \in B$

1) x เป็นสมาชิกของ ผลผนวกของ A กับ B ก็ต่อเมื่อ..

....

2) x **ไม่**เป็นสมาชิกของผลผนวกของ A กับ B ก็ต่อเมื่อ..

....

3) x **ไม่**เป็นสมาชิกของผลผนวกของ A กับ B ก็ต่อเมื่อ....................................

....

คำตอบ

1) $x \in A \vee x \in B$

2) $x \notin A \wedge x \notin B$

3) $x \notin A$ และ $X \notin B$

5. $f : A \rightarrow B$ **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง** ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $x \in A$ และสำหรับทุก ๆ $y \in A$ ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$

6. $f : A \rightarrow B$ **ไปทั่วถึง** (onto) y ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $y \in Y$ มีบาง $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = y$

7. ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\in > 0$ มีบาง $\delta > 0$ ซึ่ง ทุก ๆ x ถ้า $| x-a | < \delta$ แล้ว $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$

2.13 วิธีการพิสูจน์ (Method of Proof)

F_1

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการพิสูจน์หลาย ๆ วิธี เพื่อแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นหรือไม่เป็นทฤษฎี วิธีการเหล่านี้คือ การพิสูจน์ทางตรง (direct proof) การพิสูจน์โดยข้อความแย้งสลับที่ (proof by contraposition) พิสูจน์โดยการขัดแย้ง (proof by contradiction) พิสูจน์ของการมีอยู่และความเป็นอย่างเดียว (proof of existence and uniqueness) และพิสูจน์ว่าเท็จโดยการยกตัวอย่าง (disproof by counter example)

โดยใช้นิยามที่กำหนดไว้เด่นชัด

F_2

คุณสมบัติของระบบคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย สัจพจน์

สัจพจน์ (axioms) คือข้อความเชิงตรรกศาสตร์ที่ยอมรับว่าเป็นจริง โดยข้อตกลง

การพิสูจน์ (proof) คือการแสดงว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นหรือไม่เป็นการแจงเหตุไปสู่ผล (logically implied) โดยใช้สัจพจน์ ถ้าสัจพจน์ภายใต้ข้อความร่วม เป็นตัวทำให้เกิดข้อความที่กำหนดให้แล้ว ข้อความนั้นเรียกว่า **ทฤษฎี** (theorem) ของระบบ ดังเช่น :

ให้ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_K$ แทนสัจพจน์ แล้ว T เป็นทฤษฎี ก็ต่อเมื่อ (iff) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots, \wedge A_K \Rightarrow T$

F_3

คุณสมบัติที่น่าสนใจของระบบคณิตศาสตร์ คือประโยคเงื่อนไข : ถ้า P แล้ว Q การพิสูจน์ว่า ประโยค $P \rightarrow Q$ เป็นทฤษฎีนั้น จะเกี่ยวข้องกับสัจพจน์ร่วม $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K$ ทำให้เกิดผล (logically implies) $P \rightarrow Q$

นั่นคือต้องแสดงการพิสูจน์นี้ให้ได้ว่า $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ เป็นสัจนิรันดร์ ซึ่งสมมูลกับ $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K \wedge P) \rightarrow Q$ โดยทฤษฎีที่...... (F_4 ของหัวข้อ 2.9)

ทฤษฎีที่ 16

F_4

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์เงื่อนไข $P \rightarrow Q$ โดยปรกติ กำหนดให้ P เป็นสัจพจน์ชั่วคราว และพิสูจน์ว่า Q เป็นทฤษฎี (นั่นคือ แสดงให้ได้ว่า $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K \wedge P \Rightarrow Q$) วิธีการนี้เรียกว่า **วิธีของการพิสูจน์ทางตรง** (method of direct proof) ซึ่งได้ใช้ในการพิสูจน์ส่วนแรกของทฤษฎีบทประกอบ (lemma) 1.4.1 (F_5 ของหัวข้อ 1.4)

F_5

อีกวิธีหนึ่งของการพิสูจน์ว่าประโยคเงื่อนไข $P \rightarrow Q$ เป็นทฤษฎี โดยการพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่ $\sim Q \rightarrow \sim P$ เรียกว่า **พิสูจน์โดยข้อความแย้งสลับที่** (proof by contraposition) เป็นการพิสูจน์โดยทางตรง ให้ $\sim Q$ เป็นสิ่งกำหนดให้ แล้วพิสูจน์ว่า $\sim P$ เป็นทฤษฎี : $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$ ได้ใช้วิธีนี้พิสูจน์ส่วนที่สองของทฤษฎีบทประกอบ 1.4.1 แล้ว

F_6

การพิสูจน์ว่าข้อความ T เป็นทฤษฎี โดยแสดงให้ได้ว่านิเสธของ T กับสัจพจน์ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K \wedge \sim T \Rightarrow P \wedge \sim P)$

นั่นคือ ทราบว่า $P \wedge \sim P$ **เป็นจริง** เมื่อไรก็ตามที่ $\sim T$ **เป็นจริง** : $\sim T \Rightarrow P \wedge \sim P$

แต่เพราะว่า $P \wedge \sim P$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\sim T$ ไม่เป็นจริง

เพราะฉะนั้น T เป็นทฤษฎี

การพิสูจน์ทฤษฎีโดยแสดงว่า นิเสธของมันทำให้เกิดการขัดแย้ง เรียกว่า **การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง** (proof by contradiction) ดังตัวอย่าง คือ การพิสูจน์ทฤษฎี $\sqrt{2} \notin Q$ (บทแทรก 1.5.1)

F_7

ตัวอย่าง ของการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง ดังทฤษฎีต่อไปนี้ : $\forall x \in R\,[\,x \geq 0 \rightarrow \frac{1}{x} \geq 0\,]$

นิเสธของทฤษฎี คือ : $\exists x \in R\,[\,x \geq 0 \wedge \frac{1}{x} < 0\,]$

โดยเอา $\frac{1}{x}$ คูณ $x \geq 0$ ทั้งสองข้าง

ได้ $1 \leq 0$ (เพราะว่า $\frac{1}{x} < 0$)

แต่ความเป็นจริงแล้ว $0 < 1$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง $(0 < 1) \wedge \sim (0 > 1)$

ดังนั้นทฤษฎีเป็นจริง

F_8

ในการตัดสินว่าข้อความทั้งหมด : $\forall x\,[\,P(x)\,]$ ไม่เป็นทฤษฎี โดยการแสดงว่า มี x บางตัว ซึ่ง $\sim P(x)$ เรียกว่า **พิสูจน์ว่าเท็จด้วยตัวอย่างค้าน** (disproof by counterexample)

ตัวอย่าง

พิจารณาการเดา (conjecture) เกี่ยวกับจำนวนจริงต่อไปนี้ ถ้า $x^2 - 1 = 0$ แล้ว $x = 1$ (ละตัวบ่งปริมาณทั้งหมดไว้) ทดลองหา x ซึ่ง $x^2 - 1 = 0$

แต่ถ้า $x \neq 1$ เช่นให้ $x = -1$ แล้ว พิสูจน์การเดาว่าเป็นเท็จ โดยการใช้ตัวอย่างค้าน

ดังนั้น $\forall x[x^2 - 1 = 0$ แล้ว $x = 1]$ เป็น............

เท็จ

F_9

ทฤษฎีซึ่งกล่าวถึงการมีอยู่ของสิ่งของบางอย่าง เรียกว่า**ทฤษฎีบทการมีอยู่** (an existence theorem)

ดังตัวอย่างต่อไปนี้ : มีจำนวนเฉพาะที่มากกว่า $2^{1,000,000}$

ทางหนึ่งที่จะพิสูจน์ทฤษฎีนี้ได้ โดยแสดงให้ได้ว่ามีจำนวนบางจำนวนสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ วิธีการพิสูจน์ที่ไม่สมบูรณ์แบบนัก ถ้ามันเป็นไปได้ ดังเช่น มันเป็นการยากที่จะหาว่าใครเคยพบจำนวนเฉพาะที่มากกว่า $2^{1,000,000}$

มีอีกทางหนึ่งที่จะพิสูจน์ทฤษฎีในลักษณะนี้ได้ โดยแสดงว่าสัจพจน์ เป็นผลให้เกิดสิ่งที่จะมี (ปราศจากการผลิตขึ้นมา)

นั่นคือ เมื่อไม่มีใครเคยพบจำนวนเฉพาะที่มากกว่า $2^{1,000,000}$ แต่โดยทฤษฎีกฎหลักมูลทางเลขคณิต ทำให้สรุปได้ว่ามีจำนวนเฉพาะที่มากกว่า $2^{1,000,000}$

F_{10}

ทฤษฎีความเป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness theorem) กล่าวว่า เป็นไปไม่ได้ที่ของสองสิ่งซึ่งแตกต่างกัน สอดคล้องกับคุณสมบัติที่กำหนดให้

สมมติว่ามีวัตถุ ℓ_1 และ ℓ_2 ทั้งสองสิ่งต่างก็สอดคล้องกับคุณสมบัติที่กำหนดให้ แล้วต้องแสดงให้ได้ว่า $\ell_1 = \ell_2$

ตัวอย่าง ของการพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบทความเป็นอย่างเดียว :

จำนวนเต็มใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ $2x + 3 = 0$ จะต้องมีเพียงตัวเดียว

พิสูจน์

สมมติว่า ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นจำนวนที่ต้องการ

แล้ว $2\ell_1 + 3 = 0$

และ $2\ell_2 + 3 = 0$

ดังนั้น $2\ell_1 + 3 = 2\ell_2 + 3$

$2\ell_1 = 2\ell_2$ (คุณสมบัติการตัดออก)

$\ell_1 = \ell_2$

แบบฝึกหัด 2.13

1. สมมติว่า $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ เป็นสัจพจน์ จงอธิบายว่าทำไมข้อโต้แย้งแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์ของเงื่อนไข $R \rightarrow S$:

1.1

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \\ \sim S \\ \hline \therefore \sim R \end{array}$$

1.2

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \\ R \\ \hline \therefore S \end{array}$$

1.3

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \\ \\ \\ A_n \\ R \\ \sim S \\ \hline \therefore T \wedge \sim T \end{array}$$

2. ถ้า T_1 เป็นทฤษฎีภายในระบบของสัจพจน์ที่กำหนดให้ $\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ และถ้า T_1 ทำให้เกิดผลเชิงตรรกศาสตร์ T_2 แล้ว ทำไม T_2 จึงเป็นทฤษฎีด้วย

3. จงให้ตัวอย่างค้าน (counter example) แต่ละการเดา (conjectures) ต่อไปนี้

   3.1 ให้ $n \in N$ และให้ $z \in Z$ ถ้า n เป็นตัวประกอบของ z^2 แล้ว n เป็นตัวประกอบของ z

   3.2 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $x^2 = y^2$ แล้ว $x = y$

   3.3 $\forall x \in R, x = \sqrt{x^2}$

   3.4 $\forall x \in R, \exists y \in R, xy = 1$

   3.5 $\forall n \in N, \exists m \in N, m < n$

   3.6 $\forall x \in Z, \forall y \in Z, x < y \vee y < x$

4. กล่าวว่า e **เป็นเอกลักษณ์การบวก** (additive identity) ก็ต่อเมื่อ แต่ละ x, $e + x = x = x + e$

   4.1 จงแสดงว่ามีเอกลักษณ์การบวกใน R

   4.2 จงแสดงว่าเอกลักษณ์การบวกใน R เป็นได้เพียงอย่างเดียว (Unique)

5. กล่าวว่า x **เป็นไอเดมโพเทนต์** (idempotent) ก็ต่อเมื่อ $x^2 = x$

   5.1 จงแสดงว่ามีไอเดมโพเทนต์เดียวเท่านั้นใน N (มีสองสิ่งที่จะใช้ในที่นี้)

   5.2 จงแสดงว่าไม่มีไอเดมโพเทนต์เดียวเท่านั้นใน Z

6. จำนวนนับ n **เป็นโวลคอมเมน** ก็ต่อเมื่อ $3n^2 = (1^2)(2^3)(3^4) \ldots\ldots (8^9)(9^{10})$

   6.1 จงแสดงว่าถ้ามีจำนวนโวลคอมเมน แล้วมีเพียงอย่างเดียวเท่านั้น (unique)

   6.2 จำนวนที่ว่านี้มีหรือ

7. จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเฉพาะที่ใหญ่กว่า $2^{1,000,000}$ สมมติว่าไม่มี แล้วจะมีจำนวนเฉพาะจำนวนจำกัด (ทำไม) ให้ $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมด และให้ $m = p_1 p_2 \ldots\ldots p_{n-1}$ จะเห็นว่า m ไม่สามารถมีจำนวนเฉพาะใด ๆ เป็นตัวประกอบได้ (ทำไม) ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีพื้นฐานทางเลขคณิต (Fundamental of Arithmetic) (ทำไม)

2.14 รูปแบบของการพิสูจน์
(The Fomat of a Proof)

F_1

คำอธิบายรูปแบบของการพิสูจน์ โดยใช้นิยาม ซึ่งได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้ว

ตัวอย่าง

ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R, f **เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one) ก็ต่อเมื่อ

$\forall x \in R, \forall y \in R\ [\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y\ ]$

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งจะเขียนการพิสูจน์ได้อย่างไร

สังเกตรูปเชิงตรรกศาสตร์ของนิยามข้างบน แล้วเขียนรูปแบบการพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้ :

ให้ $x \in R,\ y \in R$

สมมติว่า $f(x) = f(y)$

(ส่วนนี้ของข้อโต้แย้งขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้) สรุปได้ว่า $x = y$

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า $\forall x \in R, \forall y \in R\ [\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y\ ]$ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (โดยนิยาม)

F_2

โครงร่างของการพิสูจน์

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 4$ (เมื่อ $x \in R$) เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์

ให้ $x \in R$ และ $y \in R$

สมมติว่า $f(x) = f(y)$

แล้ว $2x-4 = 2y-4$

$2x = 2y$

ดังนั้น $x = y$

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า $\forall x, \forall y\ [\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y\ ]$ จึงสรุปได้ว่า f เป็น หนึ่งต่อหนึ่ง

โดยนิยาม

F_3

นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซต กล่าวว่า A **เท่ากับ** B ก็ต่อเมื่อ $(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)$

นิยาม เป็นตัวแนะรูปแบบของการพิสูจน์ว่า เซต S และ T เท่ากัน :

สมมติว่า $x \in S$

(etc.)

สรุปได้ว่า $x \in T$

$\therefore\ x \in S \to x \in T$

ต่อไปสมมติว่า $x \in T$

(etc.)

สรุปได้ว่า $x \in S$

$\therefore\ x \in T \to x \in S$

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า $x \in S \to x \in T$ และ $x \in T \to x \in S$

เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า S เท่ากับ T โดยนิยาม

F_4

ตัวอย่าง

ให้ S เป็นรากของสมการ $a^2\text{-}5a+6 = 0$ ให้ $T = \{2, 3\}$ เขียนรายละเอียดของการพิสูจน์ว่า S เท่ากับ T ได้ดังต่อไปนี้

พิสูจน์

ให้ $x \in S$

แล้ว $x^2\text{-}5x+6 = 0$

แล้ว $(x\text{-}2)(x\text{-}3) = 0$

ดังนั้น $x = 2$ หรือ $x = 3$

กล่าวได้ว่า $x \in T$

$\therefore\ x \in S \to x \in T$

สมมติว่า $x \in T$

แล้ว $x = 2$ หรือ $x = 3$

ดังนั้น $(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$ และ $(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$

กล่าวได้ว่า $x \in S$

$\therefore x \in T \rightarrow x \in S$

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า ถ้า $x \in S \rightarrow x \in T$ และ $x \in T \rightarrow x \in S$

จึงสรุปได้ว่า S เท่ากับ T **โดยนิยาม**

แบบฝึกหัด 2.14

1. **นิยาม :** ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing) ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in R, \forall y \in R, (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$

   1.1 จงให้โครงร่างของแบบสำหรับการพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

   1.2 จงเขียนการพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $f(x) = 3x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

   แนะ : $x < y$ หมายความว่า $y = x + p$ เมื่อ p เป็นจำนวนบวก ถ้า p เป็นจำนวนบวกแล้ว

   $3p$ เป็นจำนวนบวก