บทที่ 1
แนวคิดพื้นฐาน
(Preliminary Concepts)

1.1 บทนำ

F_1

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานซึ่งคุ้นเคยกันอยู่แล้วในเรื่องสัญลักษณ์ของเซตและการจำแนกจำนวนจริง

1.2 เซต

F_1

ทุก ๆ สิ่งในทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับวัตถุ (สิ่งของ จำนวน หรือจุด) เรียกว่า **สมาชิก** กลุ่มของวัตถุ เรียกว่า **เซต**

F_2

การกำหนดชื่อเซตจะกำหนดหรือไม่กำหนดก็ได้ ถ้าชื่อเซตเป็นภาษาอังกฤษ ให้ใช้ตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ... เป็นต้น ส่วนสมาชิกถ้าเป็นภาษาอังกฤษ ให้ใช้ตัวเขียนเล็ก เช่น a, b, c, ... เป็นต้น สมาชิกแต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค อยู่ภายในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา ดังนั้น ถ้า A เป็นเซตของตัวอักษรในภาษาอังกฤษ 5 ตัวแรก แล้ว A คือ ....

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

F_3

แต่ละเซตจะต้องมีความชัดเจน หมายถึง สามารถบอกได้ว่า สมาชิก x อยู่หรือไม่อยู่ในเซต Y

ถ้า x อยู่ใน Y แล้ว เขียนแทนด้วย $x \in Y$ อ่านว่า x เป็นสมาชิกของ Y
ดังนั้น จาก F_2 จะเห็นว่า e อยู่ใน A เขียนแทนด้วย ....

$e \in A$

F_4

ถ้า x ไม่อยู่ใน Y แล้ว เขียนแทนด้วย $x \notin Y$ อ่านว่า x ไม่เป็นสมาชิกของ Y
ดังนั้น จาก F_3 จะเห็นว่า p ไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย ....

$p \notin A$

F_5

ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ X เป็นสมาชิกของ Y ด้วยแล้ว กล่าวได้ว่า X เป็นเซตย่อยของ Y เขียนแทนด้วย $X \subset Y$

ดังนั้น ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
และ $B = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
แล้ว ....

$A \subset B$

1.3 **จำนวนนับ** (Natural Numbers)

F_1

จำนวนที่ใช้ในการนับ คือ 1, 2, 3, . . .
ให้ N **แทนเซตของจำนวนนับ ดังนั้น** $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

ข้อสังเกต $0 \notin N$

F_2

จำนวนนับเป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ
i) เป็นจำนวนที่มากกว่า 1

ii) ตัวประกอบของมัน คือ ตัวมันเอง และ 1 เท่านั้น

เช่น 13 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะว่า ตัวประกอบของ 13 คือ 1 และ 13

9 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะว่า 3 เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ 9

ดังนั้น เซตของจำนวนนับ ที่เป็นจำนวนเฉพาะสิบตัวแรก คือ ....

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

F_3

คุณสมบัติ 2 ประการของจำนวนนับ ซึ่งมีประโยชน์มาก มีดังต่อไปนี้

1) การอุปมานทางคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) กล่าวว่า ถ้าเซตย่อย S ของ N มีคุณสมบัติ 2 ประการ ดังข้างล่างนี้ แล้ว $S = N$:

i) $1 \in S$

ii) ถ้า $k \in S$ แล้ว $k + 1 \in S$

F_4

2) ทฤษฎีพื้นฐานของเลขคณิต (The Fundamental Theorem of Arithmetic) กล่าวว่า จำนวนนับทุกจำนวนที่มากกว่า 1 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะได้ เช่น

$4 = 2 \times 2$

$15 = 3 \times 5$

$28 = 2 \times 2 \times 7$ เป็นต้น

1.4 จำนวนเต็ม (Integers)

F_1

เซตของจำนวนเต็ม แทนด้วย Z ประกอบด้วย จำนวนนับทั้งหมด ผลต่างของจำนวนนับทั้งหมด และศูนย์

ดังนั้น เซตของ Z คือ ....

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

F_2

ข้อสังเกต $N \subset Z$

ข้อสมมติ (Assumptions) ต่อไปนี้ เป็นจริง

ข้อสมมติ 1 จำนวนเต็มสอดคล้องกับคุณสมบัติทางพีชคณิตเหล่านี้คือ คุณสมบัติการสลับที่ และการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ คุณสมบัติการกระจาย ผลบวก และผลคูณของจำนวนเต็ม 2 จำนวน เป็นจำนวนเต็ม เป็นต้น

เช่น $-1 \in Z$, $3 \in Z$

$-1 + 3 \in Z$ และ $(-1)(3) \in Z$

ดังนั้น $4 + (-5) =$ .... (การสลับที่)

และ $[(3 \times (-5)] \times 4 =$ .... (การเปลี่ยนกลุ่ม)

-5 + 4

3 x (-5 x 4)

F_3

x เป็น**จำนวนเต็มคู่** ก็ต่อเมื่อบางตัวของ $k \in Z$ ซึ่ง $x = 2k$

และ x เป็น**จำนวนเต็มคี่** ก็ต่อเมื่อ $x = 2k + 1$ สำหรับบางตัวของ $k \in Z$

ดังนั้น เซตของจำนวนเต็มคี่ คือ $\{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$

และ เซตของจำนวนเต็มคู่ คือ ....

$\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$

F_4

ข้อสมมติ 2 จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็มคู่หรือจำนวนเต็มคี่ ไม่มีจำนวนเต็มใดเลยที่เป็นทั้งจำนวนคู่และจำนวนคี่

F_5

ทฤษฎีบทประกอบ (Lemma) **1.4.1**

จำนวนเต็ม z เป็นเลขคู่ก็ต่อเมื่อ z^2 เป็นเลขคู่

พิสูจน์

ประการแรกแสดงให้ได้ว่า ถ้า z เป็นเลขคู่ แล้ว z^2 เป็นเลขคู่ :

สมมติให้ z เป็นเลขคู่

แล้ว $z = 2k$ สำหรับ k บางตัว ซึ่ง $k \in Z$

ดังนั้น $z^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

เพราะว่า $2k^2 \in Z$

เพราะฉะนั้น z^2 เป็นเลขคู่

นั่นคือ ถ้า z เป็นเลขคู่ แล้ว z^2 เป็นเลขคู่ ต่อไปแสดงให้ได้ว่า ....

ถ้า z^2 เป็นเลขคู่ แล้ว z เป็นเลขคู่

F_6

โดยการสมมติให้ z ไม่เป็นเลขคู่ แล้วหาทางพิสูจน์ให้ได้ว่า ....

z^2 ไม่เป็นเลขคู่

F_7

สมมติว่า z ไม่เป็นเลขคู่

ดังนั้น z เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $z = 2k + 1$ สำหรับ k บางตัวซึ่ง $k \in Z$

$z^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

และ $(2k^2 + 2k) \in Z$

จึงได้ z^2 เป็นเลขคี่

นั่นคือ z^2 ไม่เป็นเลขคู่

F_8

จาก F_7 แสดงว่า ถ้า z ไม่เป็นเลขคู่ แล้ว z^2 ไม่เป็นเลขคู่

หรือกล่าวว่า ถ้า z^2 เป็นเลขคู่ แล้ว z เป็นเลขคู่

F_9

จาก F_5 และ F_7 สรุปได้ว่า จำนวนเต็ม z เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ z^2 เป็นเลขคู่

F_{10}

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทประกอบสามารถเขียน : 2 เป็นตัวประกอบหนึ่งของ z ก็ต่อเมื่อ 2 เป็นตัวประกอบหนึ่งของ z^2

ดังนั้น ทฤษฎีบทประกอบเป็นกรณีพิเศษของทฤษฎีบททั่ว ๆ ไป

F_{11}

ทฤษฎีบท 1.4.1 จำนวนเฉพาะ p เป็นตัวประกอบหนึ่งของจำนวนเต็ม z ก็ต่อเมื่อ p เป็นตัวประกอบหนึ่งของ z^2

พิสูจน์ (ทฤษฎีนี้เป็นผลสืบเนื่องมาจากทฤษฎีพื้นฐานของเลขคณิต)

1.5 **จำนวนตรรกยะ** (The Rational Numbers)

F_1

กลุ่มของอัตราส่วนของจำนวนเต็มกับจำนวนนับ เรียกว่า **เซตของจำนวนตรรกยะ** เขียนแทนด้วย Q เช่น

. $-2/1, -1/1, 0/1, 1/1, 2/1, \ldots, -3/2, -2/2, -1/2, 0/2, 1/2, 2/2, 3/2, \ldots$

ข้อสังเกต $-3/1$ และ $3/-1$ แทนจำนวนตรรกยะจำนวนเดียวกัน

ดังนั้น Z มีความสัมพันธ์อย่างไรกับ Q

$Z \subset Q$

F_2

คุณสมบัติที่สำคัญของจำนวนตรรกยะ : จำนวนตรรกยะทุกจำนวนสามารถเขียนในรูปลดทอน (reduced form) ได้ เช่น

3/9 แทนด้วย 1/3 เป็นต้น

F_3

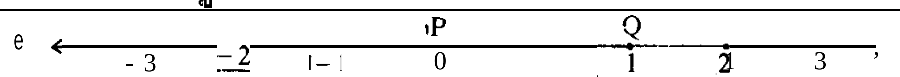
ทฤษฎีบท 1.5.1 ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้วจะมีจำนวนนับ m และ n ซึ่ง $x = m/n$ และ 1 เป็นจำนวนนับจำนวนเดียวเท่านั้นที่เป็นตัวประกอบร่วมของ m และ n

ทฤษฎีนี้ เป็นผลสืบเนื่องของทฤษฎีพื้นฐานของเลขคณิต

F_4

เซตของจำนวนเต็มแทนด้วยจุดซึ่งเรียงกันอย่างเป็นระเบียบบนเส้นตรง ℓ โดยเลือกจุด P และ Q สองจุดที่แตกต่างกันบน ℓ ให้ P อยู่ทางซ้ายของ Q และกำหนดจำนวนเต็มศูนย์ที่ P

ใช้ P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีพอควร หาจุดปลาย Q และต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงเซกเมนต์ที่ n ซึ่งแต่ละเซกเมนต์มีความยาวเท่ากับ PQ จำนวนเต็มลบก็หาได้เช่นเดียวกันในทิศทางที่ตรงกันข้าม ดังนั้นลักษณะของรูปคือ ....



F_5

แต่ละสมาชิก z ของ Z แทนด้วยจุด P_z ของ ℓ

ถ้า x น้อยกว่า y แล้ว P_x จะอยู่ทางซ้ายของ P_y

ข้อสังเกต ทุก ๆ จุดบนเส้นตรง ℓ ไม่สามารถกำหนดด้วยจำนวนเต็ม

F_6

ในทำนองเดียวกัน สามารถกำหนดจุดบางจุดที่สอดคล้องกับจำนวนตรรกยะบนเส้นตรง ℓ ได้

ให้ P และ Q เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง ℓ

และให้ ศูนย์ อยู่ที่ P

สมมติว่า x เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น x เกิดจาก ....

นั่นคือ x = ...

อัตราส่วนของจำนวนเต็ม z กับจำนวนนับ

$$x = \frac{z}{n}$$

F_7

ถ้า z เป็นจำนวนบวก กำหนด x ด้วยจุดบน ℓ ได้โดยเริ่มต้นที่จุด P และทำเครื่องหมายปลายต่อปลาย (ในทิศทางของQ) เซกเมนต์ที่ z เท่ากับความยาวของ $\overline{PQ}$ หารด้วย n

ถ้า z เป็นจำนวนลบ ก็หาได้เช่นเดียวกันแต่ในทิศทางตรงกันข้าม

F_8

ข้อสังเกต วิธีนี้จะได้จำนวนตรรกยะ x สอดคล้องกับจุด P_x บนเส้นตรง ℓ

และ ถ้า s น้อยกว่า t แล้ว P_s จะอยู่ทางซ้ายของ P_t

ดังนั้น กระบวนการนี้ช่วยให้จำนวนตรรกยะจัดเรียงกันอย่างเป็นระเบียบ

F_9

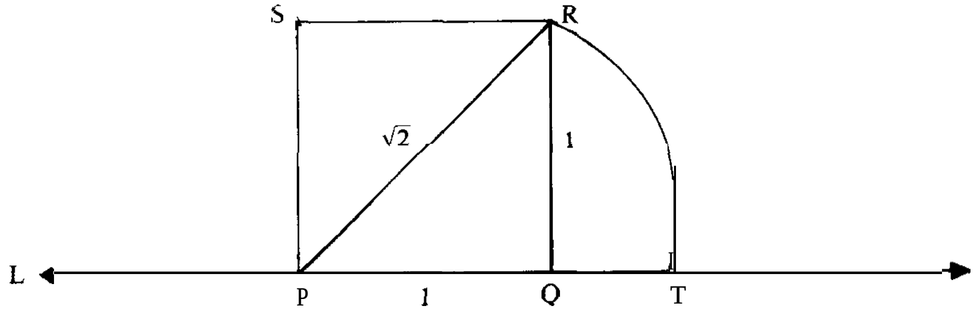
เซตของจำนวนตรรกยะไม่สามารถแทนทุก ๆ จุดบนเส้นจำนวนได้ แต่จำนวนตรรกยะที่กำหนดให้สามารถแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวน และมีจุดอีกมากมายบนเส้นจำนวนที่ไม่อาจแทนด้วยจำนวนตรรกยะ

F_{10}

ในการหาจุด T บนเส้นตรง ℓ หาได้โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส PQRS แล้วใช้ P เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี PR เขียนส่วนโค้งให้ตัดเส้นตรง ℓ ที่ T

เซกเมนต์ $\overline{PT}$ ยาวเท่ากับเส้นทแยงมุม $\overline{PR}$

ดังนั้นรูปที่ได้คือ .... (กำหนดความยาวของด้านประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ด้วย)



F_{11}

จากทฤษฎีของปีทาโกรัส ได้ $\overline{PT} = 2$

ให้จำนวนตรรกยะ q สอดคล้องกับจุด T แล้ว

$q^2 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

F_{12}

ทฤษฎีบท 1.5.2 ไม่มีจำนวนตรรกยะ q ใด ๆ ซึ่งทำให้ $q^2 = 2$

พิสูจน์ สมมติให้มีจำนวนตรรกยะ q บางตัว ซึ่งทำให้

$q^2 = 2$

1) ถ้า $q = m/n$ ที่ซึ่ง 1 เป็นตัวประกอบร่วมเพียงตัวเดียวเท่านั้นของ m และ n

จึงได้ $2 = m^2/n^2$

เพราะฉะนั้น $2n^2 = m^2$

ดังนั้น m^2 เป็นจำนวน ....

เต็มคู่

F_{13}

2) เพราะฉะนั้น m เป็นจำนวนเต็มคู่ (ทฤษฎีบทประกอบ 1.4.1)

จึงให้ $m = 2k$ สำหรับบาง k ซึ่ง $k \in Z$

แล้ว $m^2 = 4k^2$

ดังนั้น $2n^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2$ และ $k^2 \in Z$

นั่นคือ n^2 เป็นจำนวน ....

เต็มคู่

F_{14}

3) ดังนั้น n เป็นเลขคู่ด้วย (ทฤษฎีบทประกอบ 1.4.1)

เพราะฉะนั้น 2 เป็นตัวประกอบร่วมของ m และ n (จาก 2) และ 3))

ซึ่งขัดแย้งกับข้อ 1)

นั่นคือ q ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

F_{15}

ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า มีอย่างน้อยหนึ่งจุด (จุด T) บนเส้นตรง ℓ ซึ่งไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะได้

จึงเกิดบทแทรก แสดงให้เห็นว่า มีจุดอีกมากมายนับไม่ถ้วนบนเส้นตรง ℓ ที่ไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะได้

(ให้ $\sqrt{2}$ แทนความยาวของ $'\overline{PT}$)

F_{16}

บทแทรก 1.5.1 ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้ว $q\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สมมติว่า q เป็นจำนวนตรรกยะ และ $q \neq 0$

1) ให้ $q = z_1/n_1$ เมื่อ $z_1 \in Z$ และ $n_1 \in N, z_1 \neq 0$ พิสูจน์โดยการขัดแย้ง

สมมติว่า $q\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น $q\sqrt{2} =$ .... เมื่อ $z_2 \in Z, n_2 \in N$

F_{17}

2) จาก $q\sqrt{2} = z_2/n_2$

เพราะฉะนั้น $(z_1/n_1)\sqrt{2} = z_2/n_2$ (จาก 1) และ 2))

$\sqrt{2} = n_1/z_1 \,.\, z_2/n_2$

นั่นคือ $\sqrt{2} \notin Q$

F_{18}

จากบทแทรก ทำให้ทราบว่าไม่มีจำนวนใดในจำนวนต่อไปนี้ที่เป็นจำนวนตรรกยะ :

$$\{\ldots, -\frac{3}{1}\sqrt{2}, -\frac{2}{1}\sqrt{2}, -\frac{1}{1}\sqrt{2}, \frac{1}{1}\sqrt{2}, \frac{2}{1}\sqrt{2}, \frac{3}{1}\sqrt{2}, \ldots, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{2}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{2}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \ldots, -\frac{3}{3}\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{3}{3}\sqrt{2}, \ldots\}$$

ดังนั้น เมื่อใช้เซกเมนต์ $'\overline{PT}$ เป็นช่วงหนึ่งของเส้นตรง และใช้วงเวียนรัศมีเดียวกันนี้ตัดเส้นตรง จะพบว่ามีจุดอีกมากมายซึ่งไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะได้

1.6 จำนวนจริง (The Real Numbers)

F_1

เซตของจำนวนจริงประกอบด้วยกลุ่มของจุดทุก ๆ จุดซึ่งเรียงติด ๆ กัน ทำให้กลายเป็นเส้นตรง

จุดทุก ๆ จุดบนเส้นตรง ℓ จะเรียงกันอย่างเป็นระเบียบ และมีเครื่องหมายประจำตัวของมัน

ให้เซตนี้แทนด้วย R

ดังนั้น Q และ R มีความสัมพันธ์กันคือ ....

$Q \subset R$

F_2

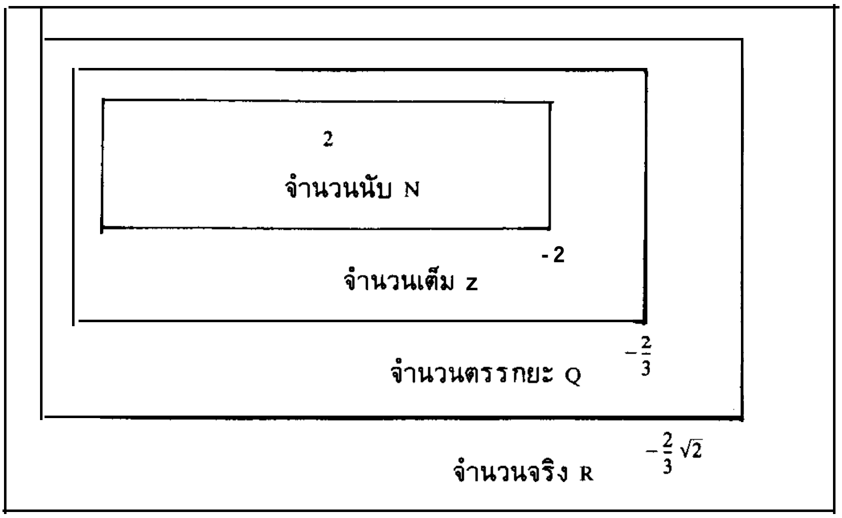
ให้ x เป็นจำนวนจริง กล่าวได้ว่า

x เป็นจำนวนอตรรกยะก็ต่อเมื่อ x ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ และมีจำนวนตรรกยะอีกมากมายบนเส้นตรง ℓ ซึ่งนับไม่ถ้วน

ข้อสังเกต   จำนวนจริงทุกจำนวน เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

F_3

สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ได้กล่าวถึงในบทนี้ด้วยแผนผังดังนี้



จึงสรุปได้ว่า ....

$N \subset Z \subset Q \subset R$

แบบฝึกหัด

1. จงระบุว่าจำนวนที่อยู่ทางซ้ายอยู่ในหรือไม่อยู่ในเซตข้างบนของตารางข้างล่างนี้

		N	Z	Q	R
ตัวอย่าง	-3	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
	$-2/-1$				
	$\sqrt{8}/\sqrt{2}$				
	$0/5$				
	$12/-3$				
	$3/-12$				
	$3-\sqrt{2}$				
	$\sqrt{5}$				
	π				
	i				

i เป็นจำนวนซึ่ง $i^2 = -1$

2. จงสังเกตว่าเซตของจำนวนเต็มเขียนได้เป็น

$$Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ทำไมจึงไม่สามารถเขียนเซตของจำนวนตรรกยะได้เช่นเดียวกับ Z

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว จะไม่มีจำนวนตรรกยะตัวถัดไปที่มากกว่า (แนะ : สมมติว่ามีจำนวนตรรกยะตัวถัดไปที่มากกว่า ให้เป็น r พิจารณา $q + r/2$)

4. จงใช้วงเวียนและไม้บรรทัด หาจุด W บนเส้นตรง ℓ ซึ่งมีความยาวของเซกเมนต์ $\overline{PW}$ เท่ากับ $\sqrt{3}$

5. จงใช้ทฤษฎีบท 1.5.1 พิสูจน์ว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

6. จงพิสูจน์บทแทรก : ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $q \neq 0$ แล้ว $q\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

7. จงอธิบายวิธีใช้บทแทรก และวงเวียน เพื่อหาจำนวนนับไม่ถ้วน บน ℓ ซึ่งไม่สามารถกำหนดด้วยจำนวนตรรกยะได้

8. สมาชิกตัวใดในเซตต่อไปนี้ ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}\}$$

9. จงพิสูจน์ว่า ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ จะมีจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งจำนวน และจำนวนอตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งจำนวน

10. จงพิสูจน์ว่า ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ จะมีจำนวนตรรกยะนับไม่ถ้วน และมีจำนวนอตรรกยะนับไม่ถ้วน

11. จงพิสูจน์ว่า ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ p เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว ทั้ง ap และ $a + p$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

12. จงแสดงว่า ผลบวกของจำนวนอตรรกยะสองจำนวน **ไม่**จำเป็นต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ