บทที่ 5
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n

5.1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n

โดยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n จะอยู่ในรูป

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \qquad (1)$$

ซึ่งถ้า $f(x) \neq 0$ จะเรียกว่า (1) เป็นสมการไม่เป็นแบบเอกพันธ์ แต่ถ้า $f(x) = 0$ จะเรียกว่า (1) เป็นสมการแบบเอกพันธ์ และ a_i มี $i = 0, 1, \ldots, n$ อาจเป็นตัวแปรหรือค่าคงตัว ทั้งนี้ $a_0 \neq 0$

5.1.1 การหาคำตอบของสมการแบบเอกพันธ์

ในกรณีที่ $f(x) = 0$ และ a_i เป็นค่าคงตัว นั่นคือสมการ (1) อยู่ในรูปของสมการแบบเอกพันธ์

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \qquad (2)$$

จะมีวิธีการและหลักการหาคำตอบดังต่อไปนี้

ขั้นแรก กำหนดให้สมการ (2) มีคำตอบในรูป $y = e^{kx}$, k เป็นค่าคงตัว

ขั้นที่สอง เนื่องจาก $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการ (2) ดังนั้นเมื่อแทนค่า $y = e^{kx}$ ในสมการ (2) จะได้ว่า $e^{kx}(a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) = 0$ หรือใช้ e^{kx} หารตลอดได้ เพราะว่า $e^{kx} \neq 0$ จะได้ $(a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) = 0 \qquad (3)$

สมการ (3) เรียกว่า สมการช่วย

ขั้นที่สาม หารากของสมการหรือค่า k จากสมการ (3)

ขั้นที่สี่ แทนค่า k ที่ได้ในขั้นแรกคือ

$$y = e^{kx}$$

จะทำให้ได้ว่า

$$y = e^{kx} \quad \text{เป็นคำตอบของสมการ (2)}$$

และเนื่องจากค่าของ k ที่หาได้มี 3 กรณี จึงต้องพิจารณากรณีต่างๆ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 รากเป็นค่าจริงและไม่ซ้ำกัน นั่นคือ แก้สมการ (3) ได้ค่า k เป็นจำนวน n ค่า และไม่ซ้ำกัน เป็น k_1 , k_2 ,..., k_n ซึ่งเมื่อแทนคำตอบ $y = e^{kx}$ จะได้ชุดฟังก์ชันคำตอบ

$$y_1 = e^{k_1x} , \quad y_2 = e^{k_2x} ,..., \; y_n = e^{k_nx}$$

ทำให้ได้คำตอบทั่วไปของสมการ (3) แบบเอกพันธ์ในรูปคำตอบประกอบเชิงเส้นคือ

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

โดยที่ c_i (i = 1, 2 , ... , n) เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 1

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

วิธีทำ

ให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการ แทนค่าในสมการได้สมการช่วย

$$k^2 + 3k - 4 = 0$$

หรือ $(k + 4)(k - 1) = 0$ (แยกตัวประกอบ)

แสดงว่า $k + 4 = 0 \longrightarrow k_1 = -4$

หรือ $k - 1 = 0 \longrightarrow k_2 = 1$

เป็นค่าจริงและไม่ซ้ำกันมีชุดฟังก์ชันคำตอบ คือ

$$y_1 = e^{k_1x} = e^{-4x} \quad \text{และ}$$

$$y_2 = e^{k_2x} = e^{x}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-4x} + c_2e^{x} \qquad \#$$

กรณีที่ 2 รากเป็นค่าจริง และซ้ำกัน นั่นคือ แก้สมการ (3) ได้ค่า k เป็นจำนวน n ค่า และซ้ำกัน เป็น $k_1 = k_2 = ... = k_n$ ซึ่งเมื่อแทนในคำตอบ $y = e^{kx}$ จะได้ชุดคำตอบฟังก์ชันซ้ำกัน n ฟังก์ชัน ในกรณีเช่นนี้มีทฤษฎีบทพิสูจน์ไว้ว่าสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n ที่สมการช่วยมีรากซ้ำกันจำนวน n ราก คำตอบทั่วไปของสมการจะอยู่ในรูป

$$y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + ... + c_nx^{n-1})e^{kx} \qquad (5)$$

โดยที่ k เป็นรากจริงที่ซ้ำกัน n ครั้ง

ตัวอย่าง 2 จงหาคำตอบของสมการ $y'' - 4y' + 4y = 0$

วิธีทำ

ให้ $y = e^{kx}$ แทนค่าในสมการได้สมการช่วย

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

แยกตัวประกอบได้ $(k - 2)(k - 2) = 0$

แสดงว่า $k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = 2$

หรือ $k - 2 = 0 \rightarrow k_2 = 2$

k เป็นรากเป็นค่าจริง และซ้ำกัน 2 รากคือ $k_1 = k_2 = 2$ มีชุดฟังก์ชันคำตอบคือ $y_1 = y_2 = e^{2x}$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการตาม (5) คือ

$$y_c = (c_1+c_2x)\,e^{2x} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 3

จงหาคำตอบของสมการ $y''' - 3'' + 3y' - 1 = 0$

วิธีทำ

ให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบแทนในสมการได้สมการช่วย

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

หรือ $(k - 1)(k - 1)(k - 1) = 0$

แสดงว่า $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ รากจริงซ้ำกัน 3 ครั้ง

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการตาม (5) คือ

$$y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\, e^x \qquad \#$$

กรณีที่ 3 รากเป็นค่าจินตภาพ นั่นคือ เมื่อหาคำตอบของสมการ (3) ได้ค่า $k = a \pm bi$ (a , b เป็นจำนวนจริง และ $b \neq 0$) และได้ชุดคำตอบทั่วไปในรูป

$$y_c = c_1e^{(a+bi)x} + c_2e^{(a-bi)x} \tag{5}$$

ซึ่งโดยปกติจะใช้สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)

$$e^{\pm bxi} = \cos bx \pm i \sin bx \tag{6}$$

เปลี่ยนคำตอบรูปจินตภาพใน (5) เป็นคำตอบในรูปของฟังก์ชัน cos bx กับ sin bx นั่นคือ เมื่อใช้ (6) ใน (5)

จะได้ว่า

$$y_c = e^{ax}[(c_1 + c_2) \cos b_x + i\,(c_1 - c_2) \sin b_x]$$

หรือ

$$y_c = e^{ax}(A \cos b_x + B \sin b_x)$$

(7)

(ในที่นี้ $A = c_1 + c_2$ และ $B = i(c_1 - c_2)$)

ตัวอย่าง 4

ให้หาคำตอบของสมการ $y'' + y' + y = 0$

วิธีทำ

ให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการแทนในสมการโจทย์ได้สมการช่วย

$$k^2 + k + 1 = 0$$

หารากของสมการช่วยโดยใช้สูตรการหารากสมการกำลังสอง

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ที่มี $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ในกรณีนี้สมการ $k^2 + k + 1 = 0$ มีค่า $a = 1$, $b = 1$ และ $c = 1$ ดังนั้น

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

หรือ $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \; (i = \sqrt{-1})$

ดังนั้นโดยใช้ (7) จะได้คำตอบของสมการในรูป

$$y_c = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \qquad \#$$

ข้อสังเกต

ในกรณีที่สมการช่วยมีรากค่า k เป็นจำนวนจินตภาพซ้ำกัน n ราก คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n แบบเอกพันธ์ จะมีรูปแบบคำตอบทำนองเดียวกันกับที่สมการช่วยมีรากค่า k เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน n ราก นั่นคือ

$$y_c = e^{ax}[(A_1 + A_2x + ... + A_nx^{n-1}) \cos b_x + (B_1 + B_2x + ... + B_nx^{n-1}) \sin bx]$$

ตัวอย่าง 5

ให้หาคำตอบของสมการ $y'''' - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$

วิธีทำ

ให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการแทนในสมการโจทย์ได้สมการช่วย

$$k^4 - 8k^3 + 42k^2 - 104k + 169 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการเป็นจำนวนจินตภาพซ้ำกัน 2 ราก

$$k_{1,2} = 2 \pm 3i \text{ และ } k_{3,4} = 2 \pm 3i$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y_c = e^{2x}[(A_1 + A_2x)\cos 3x + (B_1 + B_2x)\sin 3x] \qquad \#$$

ข้อสังเกต

ในคณิตศาสตร์ประยุกต์ จะพบสมการอันดับสองรูป

$$y'' + m^2y = 0 \qquad \text{และ} \qquad (8)$$

$$y^2 - m^2y = 0 \qquad (9)$$

สมการ (8) มีรากจินตภาพ

$$k_{1,2} = \pm mi$$

จะมีคำตอบเป็น

$$y_c = A\cos mx + B\sin mx$$

ส่วนสมการ (9) มีสมการช่วยในรูป

$$k^2 - m^2 = 0$$

$$k_{1,2} = \pm m$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y_c = c_1e^{mx} + c_2e^{-mx}$$

ในกรณีนี้ถ้าเลือก $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$y_c = \frac{1}{2}(e^{mx} + e^{-mx}) = \sinh mx$$

แต่เนื่องจาก sinh mx และ cosh mx เป็นฟังก์ชันคำตอบเป็นอิสระเชิงเส้นดังนั้นคำตอบรูปทั่วไปของสมการ (9) คือ

$$y_c = A \cosh mx + B \sinh mx \qquad (10)$$

แบบฝึกหัด 5.1.1

ให้แก้สมการต่อไปนี้

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $y'' + 4y' + 8y = 0$
5. $y'' + 6y' + 9y = 0$
6. $y'' - 4y' + 3y = 0$
7. $8y'' + 4y' + y = 0$
8. $4y'' + 4y' + y = 0$
9. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$
10. $y''' - y'' - y' + y = 0$
11. $y^{IV} - 6y''' + 19y'' - 26y' + 18y = 0$
12. $y^{IV} + y''' + y'' = 0$
13. $y'' + 16y = 0 \quad y(0) = 2 , y'(0) = -2$
14. $y'' + 6y' + 5y = 0 \quad y(0) = 0 , y'(0) = 3$
15. $y''' + 12y'' + 36y' = 0 \quad y(0) = 0 , y'(0) = 1 , y''(0) = -7$

5.2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการหาคำของสมการอันดับสองในรูป

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{หรือ}$$

$$y'' + py' + qy = g(x) \qquad (1)$$

โดยมี $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{b}{a}$ และ $g = \frac{f(x)}{a}$

ในการหาคำตอบของสมการ (1) มีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องคือ

ทฤษฎีบท 1

ถ้า y_1 และ y_2 เป็นคำตอบของสมการ (1) แล้ว ผลต่างระหว่างสองคำตอบของสมการ (1) จะเป็นคำตอบของสมการ

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (2)$$

นั่นคือ $(y_1 - y_2)$ เป็นคำตอบของสมการ (2)

ทฤษฎีบท 2

ถ้า y_p เป็นคำตอบของสมการ (1) และ y_1 กับ y_2 เป็นคำตอบอิสระเชิงเส้นของสมการ (2) แล้ว $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (1)

การหาคำตอบของสมการที่ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

สมการรูป

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

ซึ่ง a,b และ c เป็นค่าคงตัวมีวิธีการหาคำตอบได้หลายวิธี แต่ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล หรือ $\sin kx_1$, $e^{mx} \sin kx$, $e^{mx} \cos kx$ มีวิธีหาคำตอบที่สะดวก คือ วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ แต่ถ้าฟังก์ชัน f(x) เป็นแบบอื่น จะใช้วิธีแปรตัวพารามิเตอร์ ในที่นี้จะยกตัวอย่างก่อนแล้วจึงสรุปเป็นหลักการต่อไป

1. วิธีเทียบประสิทธิ์

ตัวอย่าง 1 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

วิธีทำ

ขั้นแรก หา y_c จากสมการ $y'' - 3y' - 4y = 0$ โดยให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการได้สมการช่วย

$$k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$(k + 1)(k - 4) = 0$$

แสดงว่า $k + 1 = 0 \longrightarrow k = -1$

หรือ $k - 4 = 4 \longrightarrow k = 4$

ดังนั้น $y_1 = e^{-x}$ และ

$y_2 = e^{4x}$ ได้คำตอบประกอบ

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} \qquad (1)$$

ขั้นที่สอง หา y_p จากสมการ $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ โดยให้ $y_p = Ax^2 + Bx + C$ เป็นคำตอบเฉพาะของสมการ ดังนั้นจะต้องหาค่า A ,B และ C โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ดัง ต่อไปนี้ ซึ่งตามวิธีการจะหา y_p' และ y_p'' แล้วแทนค่า y_p , y_p' และ y_p'' ในสมการโจทย์ได้

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 4x^2$$

หรือ

$$(Ax^2 + Bx + C)'' - 3(Ax^2 + Bx + C)' - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

$$2A - 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

จัดเทอมที่มีกำลังสองของ x เท่ากันจะได้

$$-4Ax^2 - (6A + 4B)x + (2A + 3B - 4c)x^0 = 4x^2 \qquad (x^0 = 1)$$

แสดงว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม x^2 , x และ x^0 ของด้านซ้ายมือเท่ากับด้านขวามือ นั่นคือ

$$-4A = 4 \qquad (2)$$

$$-6A-4B = 0 \qquad (3)$$

$$2A + 3B - 4C = 0 \qquad (4)$$

แก้สมการ (2) ได้

$$A = \frac{4}{-4} = -1$$

แทนค่า A = -1 ใน (3) หาค่า B ได้

$$B = \frac{3}{2}$$

และแทนค่า A,B ใน (4) หาค่า C ได้

$$C = -\frac{13}{8}$$

ดังนั้นแทนค่า A,B และ C ที่ได้นี้ในคำตอบเฉพาะ

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

จะได้ $$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8} \qquad (5)$$

ขั้นที่สาม ได้คำตอบทั่วไปจากการรวมคำตอบ y_c และ y_p ด้วยกันคือ

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 2 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

วิธีทำ

ขั้นแรก หาคำตอบ y_c ของสมการ $y'' - 3y' - 4y = 0$ ได้

(คำตอบของ y_c เหมือนในตัวอย่างที่ 1)

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$$

ขั้นที่สอง หา y_p จากสมการ $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

ให้ $y_p = Ae^{-x}$ เป็นคำตอบของสมการ

หา y_p' และ y_p'' แล้วแทนในสมการโจทย์และจัดเทอมจะพบว่า

$$0 = e^{-x} \tag{12}$$

หาค่า A ไม่ได้ แสดงว่าการกำหนดค่า $y_p = Ae^{-x}$ ยังไม่ถูกต้อง สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าคำตอบที่กำหนด $y_p = Ae^{-x}$ ซ้ำกับคำตอบ y_c ของสมการเอกพันธ์ ($y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$) ดังนั้นเมื่อแทนค่าคำตอบที่กำหนดให้ทางด้านซ้ายมือของสมการ ผลลัพธ์จึงเป็นศูนย์ทำให้ไม่สามารถเทียบสัมประสิทธิ์หาค่า A ได้

ในกรณีแบบนี้ ตามหลักการต้องกำหนด y_p ใหม่ โดยคูณคำตอบ y_p ที่กำหนดในตอนแรกด้วย x^m ซึ่ง m เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยที่สุดเช่น 1 หรือ 2 หรือ 3 ฯลฯ ที่ทำให้ค่า y_p ที่กำหนดให้แตกต่างคำตอบของ y_c จากนั้นจึงหาคำตอบ y_p ตามหลักการเทียบประสิทธิ์เดิมต่อไป

ดังนั้นสำหรับตัวอย่างนี้ กำหนด y_p ใหม่เป็น

$$y_p = Axe^{-x}$$ (แตกต่างจาก y_c และ m= 1)

หา y_p' และ y_p'' แล้วแทนในสมการโจทย์ได้

$$-5Ae^{-x} = e^{-x}$$

เทียบประสิทธิ์ได้

$$-5A = 1$$ หรือ

$$A = -\frac{1}{5}$$ แทนค่าได้ y_p คือ

$$y_p = -\frac{1}{5}xe^{-x}$$

ขั้นที่สาม หาคำตอบทั่วไป

$$y = y_c + y_p$$

นั่นคือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{5}xe^{-x} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 3 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \sin x$$

วิธีทำ

ขั้นแรก หา y_c จากสมการ $y'' + y = 0$

ให้ $y = e^{kx}$ แทนในสมการ $y'' + y = 0$ ได้

สมการช่วย

$$k^2 + 1 = 0$$

หรือ $k = \pm i$ รากเป็นค่าจินตภาพ

ดังนั้น $y_c = A\cos x + B\sin x$

ขั้นที่สอง กำหนดให้ $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$ เป็นคำตอบเฉพาะหา y_p'' แล้ว แทนค่า y_p กับ y_p'' ในสมการ

$y'' + y = \sin x$ ได้ $2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x = \sin x$

ขั้นที่สาม เทียบประสิทธิ์เทอม $\sin x$ และ $\cos x$ ได้

$-2A = 1$ แสดงว่า $A = -\frac{1}{2}$

$2B = 0$ แสดงว่า $B = 0$

ขั้นที่สี่ แทนค่า A และ B ใน

$y_p = x(A\cos x + B\sin x)$ ได้

$y_p = x(-\frac{1}{2}\cos x) = -\frac{x}{2}\cos x$

ขั้นที่ห้า ได้คำตอบทั่วไป $y = y_c + y_p$

นั่นคือ $y = A\cos x + B\sin x - \frac{x}{2}\cos x$ #

ตัวอย่าง 4 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

วิธีทำ

ขั้นแรก หา y_c ให้ $y = e^{kx}$ เป็นคำตอบของสมการ $y''' - y' = 0$ แทนค่า $y = e^{kx}$ ในสมการ $y''' - y' = 0$ ได้

$(k^3 - k)\, e^{kx} = 0$ หรือ

$k(k - 1)(k + 1) = 0$ แสดงว่า

$k_1 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ ได้

$$y_c = c_1e^{0x} + c_2e^{x} + c_3e^{--x} = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$$

ขั้นที่สอง หา y_p ของสมการ $y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$ ให้ $y_p = Axe^{-x} + Be^{2x}$ เป็นคำตอบของสมการหา y'_p และ y'''_p แล้วแทนค่าในสมการโจทย์ได้

$$2Ae^{-x} + 6Be^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

ขั้นที่สาม เทียบประสิทธิ์เทอม e^{-x} และ e^{2x} ได้

$2A = 4$ และ

$6B = 3$ แสดงว่า

$A = \frac{4}{2} = 2$ และ

$B = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ขั้นที่สี่ แทนค่า A และ B ที่ได้ในคำตอบ y_p ได้

$$y_p = 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

ขั้นที่ห้า หาคำตอบทั่วไป $y = y_p + y_p$ ได้

$$y = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}\, e^{2x} \qquad \#$$

สรุป วิธีการหาคำตอบ y_p โดยวิธีเทียบประสิทธิ์มีหลักเกณฑ์ที่สำคัญคือ

1. กำหนดให้ y_p สอดคล้องกับเทอมของ f(x)
2. คำตอบ y_p ที่กำหนดให้ในข้อ 1 ต้องไม่ซ้ำกับคำตอบ y_c
3. ถ้า y_p ที่กำหนดให้สอดคล้องกับเทอมของ f(x) เกิดซ้ำกับคำตอบ y_c ให้ใช้ x^m ซึ่ง m เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยที่สุดคูณกับ y_p และทำให้ y_p ต่างจาก y_c
4. ถ้าเทอมของ f(x) มีแต่ฟังก์ชัน sin bx หรือ cos bx อย่างใดอย่างหนึ่ง การกำหนด y_p ต้องให้เพิ่มเทอม cosbx หรือ sinbx ไว้ด้วย
5. ถ้าเทอมของ f(x) เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง n ให้กำหนด
   $y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$
6. ถ้าเทอมของ f(x) เป็นฟังก์ชันย่อย ๆ เช่น

   $$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

   จะสามารถหา y_p ได้ในรูป

   $$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + ... + y_{p_n}$$

เพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ

เช่น ถ้า $f(x) = 2 \sin x + 3x^2 - 4e^{-2x} + 8e^x - 6$

อาจจะให้ $y_{p_1} = A \sin x + B \cos x$

$$y_{p_2} = Cx^2 + Dx + E$$

$$y_{p_2} = Cx^2 + Dx + E$$

$$y_{p_4} = Ge^x$$

ดังนี้เป็นต้น

2. วิธีแปรตัวพารามิเตอร์

การหาคำตอบของสมการที่ไม่เป็นแบบเอกพันธ์ นอกจากจะใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ตามที่กล่าวมาแล้ว อีกวิธีหนึ่งซึ่งสำคัญและมีประโยชน์คือ วิธีแปรตัวพารามิเตอร์

ในการหาคำตอบของสมการอันดับสองรูป

$$y'' + py' + gy = g(x)$$

มีทฤษฎีสำคัญที่เกี่ยวข้องคือ

ทฤษฎี ถ้า p(x) , g(x) และ g(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) และถ้า $y_1(x)$ กับ $y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการ

$$y'' + py' + gy = 0$$

แล้วจะได้ว่าคำตอบของสมการ

$$y'' + py' + gy = g(x)$$

คือ

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(t)g(t)\,dt}{w(y_1,y_2)(t)} + y_2(x)\int^x \frac{y_1(t)g(t)\,dt}{w(y_1,y_2)(t)}$$

ในที่นี้ t เรียกว่า ตัวแปรหุ่น (dummy variable) และ x เป็นตัวแปรอิสระ

ตัวอย่าง 1 ให้หาคำตอบเฉพาะของสมการ

$$y'' + y = \sec x$$

วิธีทำ สมการแบบเอกพันธ์ที่สอดคล้องสมการโจทย์คือ

$$y'' + y = 0$$

ซึ่งมีสมการช่วยในรูป

$k^2 + 1 = 0$ ได้

$k_{1,2} = \pm i$ เป็นรากจินตภาพมีคำตอบ y_c คือ

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ แสดงว่า

$y_1(x) = \cos x$ และ

$y_2(x) = \sin x$ ดังนั้นตามทฤษฎีจะได้ว่า

$$y_p(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(t)g(t)dt}{w(y_1,y_2)(t)} + y_2(x)\int^x \frac{y_1(t)g(t)dt}{w(y_1,y_2)(t)}$$

ในที่นี้ $w(y_1, y_2)(x) = w(\cos x, \sin x)$

$$\text{ซึ่ง } w(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 s + \sin^2 x$$

$$= 1$$

ดังนั้น

$$y_p(x) = -\cos x \int^x \frac{\sin t \sec t\, dt}{1} + \sin x \int^x \frac{\cos t \sec t\, dt}{1}$$

$$y_p(x) = -\cos x \int^x \frac{\sin t}{\cos t} dt + \sin x \int^x 1\, dt$$

$$y_p(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$ #

ตัวอย่าง 2 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \tan x$$

วิธีทำ สมการแบบเอกพันธ์ที่สอดคล้องสมการโจทย์คือ $y'' + y = 0$ ซึ่งมีสมการช่วยในรูป

$$k^2 + 1 = 0$$

$k_{1,2} = \pm i$ เป็นรากจินตภาพมีคำตอบ y_c คือ

$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$ แสดงว่า

$y_1 = \cos x$ และ

$y_2 \quad = \quad \sin x$

ดังนั้นตามทฤษฎีจะได้ว่า

$$y_p = -y_1(x) \int^x \frac{y_2(t)g(t)dt}{w(y_1, y_2)(t)} + y_2(x) \int^x \frac{y_1(t)g(t)dt}{w(y_1, y_2)(t)}$$

ในที่นี้ $w(y_1, y_2)(x) = w(\cos x, \sin x)$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= 1$$

ดังนั้น

$$y_p(x) = -\cos x \int^x \frac{\sin t \tan t \, dt}{1} + \sin x \int^x \frac{\cos t \tan dt}{1}$$

$$y_p(x) = -\cos x\,(\ln |\sec x + \tan x| - \sin x) - \sin x \cos x$$

$$y_p(x) = -\cos x\,(\ln |\sec x + \tan x|)$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปที่ต้องการคือ

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x(\ln |\sec x + \tan x|) \qquad \#$$

ตัวอย่าง 3 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad , \quad x > 0$$

แนวคิด สมการแบบเอกพันธ์ที่สอดคล้องกับสมการโจทย์คือ

$$y'' - 2y' + y = 0$$

ซึ่งมีสมการช่วยในรูป

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$k_{1,2} = \pm 1$ เ ป็นรากจริงซ้ำกันมีคำตอบ y_c คือ

$y_c = c_1e^x + c_2xe^x$ แสดงว่า

$$y_1 = e^x$$

$y_2 = xe^x$ ดังนั้นตามทฤษฎีจะได้ว่า

$$y_p = -e^x \int^x \frac{te^t(\frac{e^t}{t})\,dt}{w(y_1,y_2)(t)} + xe^x \int^x \frac{e^t(\frac{e^t}{t})\,dt}{w(y_1,y_2)(t)}$$

ในที่นี้ $w(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & te^t + e^t \end{vmatrix}$

$$= e^{2t}$$

ดังนั้น

$$y_p = -e^x \int^x \frac{e^{2t}dt}{e^{2t}} + xe^x \int^x \frac{e^{2t}dt}{te^{2t}}$$

$$y_p = -e^x(x) + xe^x \ln|x|$$

ได้คำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$y = y_c + y_p$ หรือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + xe^x \ln x$$

$$y = c_1e^x + c_3xe^x + xe^x \ln x \quad (c_3 = c_2 - 1)$$ #

แบบฝึกหัด 5.1.2

ตั้งแต่ข้อ 1-10 ให้ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์หาคำตอบทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ถ้าสมการกำหนดเงื่อนไขเริ่มแรก ให้ใช้เงื่อนไขเหล่านั้นหาค่าของ c_1 , c_2 ,... ของคำตอบทั่วไปด้วย

1. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$
2. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$
3. $y'' + y = 3\sin 2x + x\cos x$
4. $y'' + 2y' + y = e^{x}\cos$
5. $y'' + k^{2}y = \cos kt$, $k \neq k_0$
6. $y'' - 3y' = 2x^{2} + 1$
7. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 4\cos x$
8. $y'' - y' - 2y = 2x$ เงื่อนไข $y(0) = 0$, $y(0) = 1$
9. $y'' + 4y = x^{2} + 3e^{x}$ เงื่อนไข $y(0) = 0$, $y(0) = 2$
10. $y'' - 2y' + y = xe^{x} + 4$ เงื่อนไข $y(0) = 1$, $y(0) = 1$

ให้ใช้วิธีแปรตัวพารามิเตอร์หาคำตอบทั่วไปของสมการต่อไปนี้

11. $y'' + y = \sec^{3} x$
12. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sec x$
13. $y'' + 4y = 4\cot 2x$
14. $xy'' - y' = \frac{4}{x}$ ให้ $y_1 = 1$ และ $y_2 = x^{2}$ เป็นคำตอบของสมการ $xy - y = 0$
15. $y'' + 9y = 9\sec^{2} 3x$
16. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^{2}}$

17. $y'' + 4y = 3\operatorname{cosec} 2x$

18. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

19. ให้ $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sin x$ และ $y_2 = x^{\frac{1}{2}} \cos x$ เป็นคำตอบของสมการ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 0 \quad , \quad x > 0$$

จงหาคำตอบของสมการ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 3x^{\frac{3}{2}} \sin x \quad , \quad x > 0$$

20. จงแสดงให้เห็นว่า $y_1 = x$ และ $y_2 = e^x$ เป็นคำตอบของสมการ

$$(1 - x) y'' + xy' - y = 0$$

$$(1 - x) y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2 e^{-x}$$

5.3 สมการออยเลอร์

สมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรจะใช้วิธีอนุกรมกำลัง หรือวิธีเชิงตัวเลขในการหาคำตอบ แต่ในบางครั้งการหาคำตอบสมการ อาจใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรและเทคนิคที่เรียนมาแล้วได้ ดังเช่น สมการเชิงอนุพันธ์ของออยเลอร์ต่อไปนี้

สมการออยเลอร์อันดับสองคือ

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 , \qquad (1)$$

ในที่นี้ a , b , c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$

สมการออยเลอร์อันดับสามคือ

$$a_0x^3y''' + a_1x^2y'' + a_2xy' + a_3y = 0 , \qquad (2)$$

ซึ่ง a_0 , a_1 , a_2 , a_3 เป็นค่าคงตัวและ $a_0 \neq 0$

โดยทั่วไป สมการออยเลอร์อันดับที่ n คือ

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \qquad (3)$$

สมการออยเลอร์มีชื่อเรียกอีกแบบหนึ่งว่าสมการออยเลอร์-โคชี

5.3.1 การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองของออยเลอร์

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะกรณี $x > 0$ และสมการอันดับสองรูป

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

ให้ $y = x^k$ เป็นคำตอบของสมการ , k เป็นค่าคงตัว

หา y' และ y'' และแทนค่าในสมการได้

$$ax^2k(b - 1)x^{k-2} + bxkx^{k-1} + cx^k = 0 \text{ หรือ}$$

$$[ak(k - 1) + bk + c]\, x^k = 0 \text{ หรือ}$$

$$ak^2 + (b - a)\, k + c = 0$$

จะเห็นได้ว่าเป็นสมการกำลังสอง และรากของสมการมีได้ 3 กรณีคือ

1) กรณีที่ 1 รากเป็นจำนวนจริง และไม่ซ้ำกัน

2) กรณีที่ 2 รากเป็นจำนวนจินตภาพ

3) กรณีที่ 3 รากเป็นจำนวนจริงและซ้ำกัน

1) กรณีที่ 1 รากเป็นจำนวนจริงและไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่าง 1 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$2x^2y'' + 7xy' - 3y = 0 \quad , \quad x > 0$$

วิธีทำ ให้ $y = x^k$ เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้น $y' = kx^{k-1}$ และ $y'' = k(k-1)x^{k-2}$ แทนค่าในโจทย์ได้

$[2k(k-1) + 7k - 3]\, x^k = 0$ หรือ

$2k^2 + 5k - 3 = 0$ แยกตัวประกอบได้

$(2k-1)(k+3) = 0$ แสดงว่ารากของสมการคือ

$k_1 = \frac{1}{2}$ และ $k_2 = -3$ เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน

ได้ $y_1 = x^{\frac{1}{2}}$ และ $y_2 = x^{-3}$ เป็นชุดคำตอบ และคำตอบทั่วไปคือ

$$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-3} \qquad \#$$

2) กรณีที่ 2 รากเป็นจำนวนจินตภาพ

ในกรณีนี้ถ้า $ak^2 + (b-a)k + c = 0$ มีรากเป็นจำนวนจินตภาพ $\alpha \pm \beta i$ แสดงว่า $x^{\alpha+\beta i}$ และ $x^{\alpha-\beta}$ เป็นคำตอบเชิงซ้อน เพื่อให้ได้คำตอบเป็นจำนวนจริง สามารถใช้ความสัมพันธ์

$$a^b = e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} \quad , \quad a > 0$$

ดังนั้น

$$x^{\alpha+\beta i} = e^{(\alpha+\beta i)\ln x} = e^{\ln x^{(\alpha+\beta i)}} = e^{\ln x^{\alpha}} \cdot x^{\beta i}$$

$$= e^{\ln x^{\alpha} + \ln x^{\beta i}} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{\beta i \ln x}$$

$$= e^{\alpha \ln x} [\cos(\beta \ln x) + i \sin (\beta \ln x)]$$

$$= x^{\alpha} [\cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)]$$

ในทำนองเดียวกัน

$$x^{\alpha-\beta i} = x^{2} [\cos (\beta \ln x) - i\sin(\beta \ln x)]$$

เพราะว่า $x^{\alpha+\beta i}$ และ $x^{\alpha-\beta i}$ เป็นคำตอบของสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นเอกพันธ์ ดังนั้น คำตอบประกอบเชิงเส้นของ $x^{\alpha+\beta i}$ และ $x^{\alpha-\beta i}$ คือ

$$\frac{1}{2} x^{\alpha+\beta i} + \frac{1}{2} x^{\alpha-\beta i} = x^{\alpha}\cos (\beta \ln x) \text{ และ}$$

$$\frac{1}{2i} x^{\alpha+\beta i} - \frac{1}{2i} x^{\alpha-\beta i} = x^{\alpha}\sin (\beta \ln x)$$

เป็นคำตอบของสมการด้วย

ตัวอย่าง 2 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$2x^{2}y'' + xy' + y = 0 \quad , \quad x > 0$$

วิธีทำ ให้ $y = x^{k}$ เป็นคำตอบของสมการ ดังนั้น

$y' = kx^{k-1}$ และ $y'' = k(k-1)x^{k-2}$ แทนค่าในสมการโจทย์ได้

$[2k(k-1) + k + 1]\, x^{k} = 0$ หรือ

$2k^{2} - k - 1 = 0$ ได้รากของสมการ

$k_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{7i}{4}$ ได้คำตอบทั่วไปคือ

$$y = \left[c_1 \cos\left(\frac{7}{4}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{7}{4}\ln x\right)\right] x^{\frac{1}{4}}$$

3) กรณีที่ 3 รากเป็นจำนวนจริงและซ้ำกัน ในกรณีนี้แสดงว่าสมการ

$$ak^2 + (b - a)\,k + c = 0$$

มีค่าของ $(b-a)^2 - 4ac = 0$

ดังนั้นจะได้รากซ้ำกันคือ

$$k_1 = k_2 = \frac{a-b}{2a}$$

แสดงว่าคำตอบของสมการ คือ $x^{k_1} = x^{k_2}$

เพื่อหาคำตอบอีกคำตอบหนึ่งของสมการจะสามารถใช้วิธีลดอันดับสมการได้ดังนี้

ให้ $y = vx^{k_1}$ แทนค่าในสมการ $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ ได้

$$ax^2[v''x^{k_1} + 2v'x^{k_1-1} + vk_1(k_1-1)\,x^{k_1-2}] + bx\,[v'x^{k_1} + vk_1x^{k_1-1}] + cvx^{k_1} = 0$$

หรือ $av''x^{k_1+2} + v'(2k_1a+b)\,x^{k_1+1} = 0 \qquad (\because\ x^{k_1} = 0)$

ใช้ x^{k_1+1} หารตลอดได้

$$av''x + v'(2k_1a + b) = 0$$

หรือ $axv'' + av' = 0 \qquad (\because\ k_1 = k_2 = \frac{a-b}{2a})$

ใช้ a หารตลอด และแทนค่า $z = v'$ จะได้

$$xz' + z = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งหาคำตอบได้ $z = \frac{c_1}{x}$

หรือ $\frac{dv}{dx} = \frac{c_1}{x}$

ดังนั้น $v = c_1\ln x + c_2$ แทนค่ากลับใน $y = vx^{k_1}$

ได้ $y = (c_1\ln x + c_2)\,x^{k_1}$ #

ตัวอย่าง 3 ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad , \quad x > 0$$

แนวคิด ให้ $y = x^k$ เป็นคำตอบของสมการ

หา $y' = kx^{k-1}$ และ $y'' = k(k-1)x^{k-2}$ แทนในสมการโจทย์ได้

$(k^2 - 2k + 1)\, x^k = 0$ หรือ

$k^2 - 2k + 1 = 0$ หรือ

$(k - 1)(k - 1) = 0$ แสดงว่า

$k_1 = k_2 = 1$ ดังนั้นได้คำตอบทั่วไปคือ

$y = c_1 x\ln x + c_2 x$ #

สรุป สมการออยเลอร์ $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$

กรณีที่ 1 ถ้า k_1 และ k_2 เป็นรากจริง และ $k_1 \neq k_2$ แล้ว $y = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2}$ เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 2 ถ้า k_1 และ k_2 เป็นรากจินตภาพ $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ แล้ว

$y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)]$ เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 3 ถ้า k_1 และ k_2 เป็นรากจริง และ $k_1 = k_2$ แล้ว $y = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_1}\ln x$

5.3.2 วิธีการหาคำตอบของสมการออยเลอร์

นอกจากวิธีการหาคำตอบโดยให้ $y = x^k$ ดังได้กล่าวมาแล้ว ยังมีวิธีการหาคำตอบของสมการออยเลอร์อีกวิธีหนึ่งคือ ให้ $x = e^t$ ซึ่งจะเปลี่ยนสมการออยเลอร์ให้เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว จากนั้นจึงหาคำตอบตามวิธีที่อธิบายไว้แล้วต่อไป

ตัวอย่าง 4 ให้หาคำตอบของสมการ $x^2y'' - xy' + y = \ln x$ (1)

แนวคิด ให้ $x = e^t$ หรือ $\ln x = t\ln e = t$ $(\ln e = 1)$

ใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right) - \frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

แทนค่า y' และ y'' ในสมการ (1) ได้

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t \qquad (2)$$

เป็นสมการนอันดับสองมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวซึ่งสมการช่วยคือ

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

มีคำตอบคือ

$$y_c = c_1e^t + c_2te^t$$

และใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์หาคำตอบ y_p ของสมการ (1) ในรูป y_p = At B หา y_p' และ y_p'' แทนใน (1) และเทียบสัมประสิทธิ์ได้ A = 1 และ B = 2 ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ $y = y_c + y_p$ หรือ $y = (c_1 + c_2t)e^t + t + 2$ หรือ $y = c_1x + c_2x \ln x + \ln x + 2$ ($x = e^t$ และ $t = \ln x$)

แบบฝึกหัด 5.3

ให้หาคำตอบทั่วไปของสมการออยเลอร์ต่อไปนี้ และถ้ากำหนดเงื่อนไขมาให้ จงหาค่า c_1 และ c_2 ด้วย

1. $x^2y'' - xy' - y = 0$
2. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

3. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

4. $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

5. $x^2y'' + xy' + y = 0$

6. $9x^2y'' + 15xy' + 2y = 0$

7. $x^2y'' - 2y = 0$

8. $xy'' + y = 0$

9. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

10. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

11. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

12. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$

13. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

14. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

15. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

16. $x^2y'' + 3xy' = 0$; $y(1) = 0$, $y'(1) = 4$

17. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$; $y(2) = 32$, $y'(2) = 0$

18. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

19. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; $y(1) = 5$, $y'(1) = 3$

20. $x^3y''' - 6y' = 0$; $y(1) = 1$, $y''(1) = 2$, $y'''(1) = 3$