บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

4.1 บทนำ

ในการเรียนแคลคูลัส เราทราบวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว สมการซึ่งมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้อยู่ด้วย เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว

ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation)

ตัวอย่าง 1 1) $\frac{dy}{dx} - xy = 3$

2) $e^y dx - x^2 dy = 0$

3) $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + 3\frac{dy}{dt} + y = 0$

4) $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = \cos x$

5) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ตัวอย่าง 1-4 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ตัวอย่าง 5 และ 6 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

นิยาม อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการนั้น ถ้าอนุพันธ์สูงสุดในสมการนั้นเป็น n เรียกสมการนั้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

จากตัวอย่าง 1) , 2) , 5)	เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
ตัวอย่าง 3) , 6)	เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง
ตัวอย่าง 4)	เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสาม

นิยาม ระดับขั้น (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่เป็นจำนวนเต็มบวก

จากตัวอย่าง สมการ 3) มีระดับขั้นเท่ากับ 2 นอกนั้นเป็นสมการระดับขั้นหนึ่ง

ตัวอย่าง 2 สมการ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^{1/3}$

ยกกำลังสาม $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x}\right)^3 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ เป็นสมการระดับขั้น 3

สมการ $y'' = \sqrt{(1+y')^3}$

หรือ $y'' = (1+y')^{3/2}$

ยกกำลังสอง $(y'')^2 = (1+y')^3$ เป็นสมการระดับขั้น 2

4.2 ผลเฉลยของสมการ

นิยาม ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ ฟังก์ชันใดๆ ที่คล้องตามสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มี**ตัวคงค่า** (arbitrary constant) เรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) ถ้ามีการกำหนดตัวคงค่า เรียกผลเฉลยนั้นว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ตัวอย่าง 1 1) $y = ce^x$ เป็นผลเฉลยของ $y' = y$

2) $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

ของ $y'' + 4y = 0$ เพราะว่า

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

$$y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x = 0$

เมื่อกำหนด $y(0) = 2$ และ $y'(0) = -3$

วิธีทำ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x\,dx$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int 2x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + c_1$$

$$dy = (x^2 + c_1)dx$$

$$\int dy = \int (x^2 + c_1)dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$$

แทนค่า $y(0) = c_2 = 2$

$$y'(x) = x^2 + c_1$$

$$y'(0) = c_1 = -3$$

ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y = \frac{x^3}{3} - 3x + 2$

ตัวอย่าง 3 จงแสดงว่า $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y' - 6y = 0$$

วิธีทำ จาก

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

$$y' = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x}$$

$$y'' + y' - 6y = (4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x}) + (2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x}) - 6(c_1e^{2x} + c_2e^{-3x})$$

$$= 0$$

ดังนั้น $c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y'' + y' - 6y = 0$

การกำจัดตัวคงค่า

จากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวคงค่า ถ้ากำจัดตัวคงค่าโดยการหาอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระที่มีตัวคงค่า n ตัว จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

ตัวอย่าง 1 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ กำหนดให้

$$y = 5 - ce^{-2x}$$

วิธีทำ $y' = 2ce^{-2x}$

จากสมการที่กำหนดให้ $c = \dfrac{5-y}{e^{-2x}}$

แทนค่า c จะได้

$$y' = 2\left(\frac{5-y}{e^{-2x}}\right)e^{-2x}$$

$$y' = 10 - 2y$$

$$y' + 2y - 10 = 0$$

ตัวอย่าง 2 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ กำหนดให้

$$y = Ae^{2x} + Be^{-3x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \leftarrow$$

วิธีทำ ในที่นี้มีตัวคงค่า A และ B

ดังนั้นจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

$$y' = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \uparrow$$

$$y'' = 4Ae^{2x} + 9Be^{-3x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow$$

$\uparrow \times 2 - \rightarrow$; $2y' - y'' = -15Be^{-3x}$

$\leftarrow \times 4 - \rightarrow$; $4y - y'' = -5Be^{-3x}$

$$2y' - y'' = 3(-5Be^{-3x})$$

$$= 3(4y - y'')$$

$$2y'' + 2y' - 12y = 0$$

$$y'' + y' - 6y = 0$$

แบบฝึกหัด 4.1

จงบอกอันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์

1. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = x^2$
2. $\sqrt{y' + y} = \sin x$
3. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
4. $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2r}{ds^2} + 1}$
5. $(y'' - y)^{3/2} = 3y''$

จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

6. $y = x^{-2}$, $y' + 2y^{3/2} = 0$

7. $y = cx + 3c^{2}$, $3(y')^{2} + xy' - y = 0$

8. $y = 2e^{x} + 3xe^{x}$, $y'' - 2y' + y = 0$

จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

9. $y = 1 - ce^{-3x}$

10. $y^{2} = A(x - B)$

11. $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax$, a ตัวคงค่า

12. $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

4.3 สมการแบบแยกตัวแปรได้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่ง รูปทั่วไปคือ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

หรือ $M(x , y)\, dx + N(x , y)\, dy = 0$

ถ้าสามารถจัดสมการนี้ให้อยู่ในรูปของ

$$A(x)\, dx + B(y)\, dy = 0$$

โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว จะหาผลเฉลยโดยหาปริพันธ์ของสมการ

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$$

ผลเฉลยคือ $F(x) + G(y) = c$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{x^2}$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$\frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{x^2}$$

หาปริพันธ์ตลอด

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln |y-3| = -\frac{1}{x} + c_1$$

$$y - 3 = e^{-1/x} \bullet e^{c_1}$$

$$y = 3 + ce^{-1/x}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$dx + xy\, dy = y^2 dx + y\, dy$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$(1 - y^2)\, dx = y(1 - x)\, dy$$

$$\frac{dx}{1-x} - \frac{y}{1-y^2} dy = 0$$

หาปริพันธ์ตลอด

$$\int \frac{dx}{1-x} - \int \frac{y}{1-y^2} dy = k$$

$$-\ln |1 - x| + \frac{1}{2} \ln |1 - y^2| = \ln c_1$$

$$-2 \ln |1-x| + \ln |1-y^2| = 2 \ln c_1$$

$$\ln |1-y^2| - \ln (1-x^2) = \ln c$$

$$\ln \frac{(1-y^2)}{(1-x)^2} = \ln c$$

$$1 - y^2 = c(1 - x)^2$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ

วิธีทำ $e^x(y + 2)\, dx + 3(e^x - 1)\, dy = 0$

จัดสมการใหม่

$$\frac{e^x dx}{e^x - 1} + \frac{3}{y+2} dy = 0$$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1} dx + 3\int \frac{dy}{y+2} = c_1$$

$$\int \frac{d(e^x-1)}{e^x-1} + 3\int \frac{d(y+2)}{y+2} = c_1$$

$$\ln |e^x-1| + 3 \ln |y + 2| = \ln c$$

$$\ln |(e^x - 1)(y + 2)^3| = \ln c$$

$$(e^x - 1)(y + 2)^3 = c$$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$\sin^2 y\, dx + \cos^2 x\, dy = 0$$

เมื่อ $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{dy}{\sin^2 y} = 0$$

$$\int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 y dy = c$$

$$\tan x + (-\cot y) = c$$

$$\tan x - \frac{1}{\tan y} = c$$

$$\tan x \tan y - 1 = c \tan y$$

เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ แทนค่า

$$(\tan\frac{\pi}{4})(\tan\frac{\pi}{4}) - 1 = c(\tan\frac{\pi}{4})$$

$$c = 0$$

$$\tan x \tan y = 1$$

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(x + 1)^2 dx + y^4 dy = 0$
2. $xy' = y^2 - 6y + 9$
3. $y\, dy + \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$
5. $x^2(y + 1)\, dx + y^2(x - 1)\, dy = 0$
6. $x \ln x\, dy - ydx = 0$

7. $x \sin y\, dx + (x^2 + 1) \cos y\, dy = 0$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้

8. $(y + 2)\, dx + y(x + 4)\, dy = 0 \;,\; y(-3) = -1$

9. $\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \;,\; y(0) = \frac{1}{2}$

10. $\sin^2 y\, dx + \cos x\, dy = 0 \;,\; y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

4.4 สมการเอกพันธ์ (Homogeneous equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งไม่สามารถหาคำตอบโดยวิธีแยกตัวแปรได้ อาจจะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรใหม่แล้วหาคำตอบได้ถ้าสมการนั้นเป็นสมการเอกพันธ์

นิยาม ฟังก์ชัน f(x,y) เรียกว่า เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n ถ้า $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ตัวอย่าง 1 ฟังก์ชันใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ เพราะเหตุใด

1) $f(x , y) = y^3 - 3x^2 y$

2) $h(x , y) = \cos (\frac{x}{x+y}) +5$

3) $g(x , y) = \sqrt{xy} - \sin 2y$

วิธีทำ จากนิยามจะแทน x ด้วย kx แทน y ด้วย ky แล้วดึง k^n ออก

1)
$$\begin{aligned} f(kx , ky) &= (ky)^3 - 3(kx)^2(ky) \\ &= k^3 y^3 - 3k^3 x^2 y \\ &= k^3(y^3 - 3x^2 y) \\ &= k^3 f(x , y) \end{aligned}$$

ดังนั้น f(x , y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 3

2) $h (kx , ky) = \cos (\frac{kx}{kx+ky}) + 5$

$$= \cos\left(\frac{x}{x+y}\right) + 5$$

$$= k^{\circ} h(x , y)$$

ดังนั้น h(x , y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0

3) $g(kx , ky) = \sqrt{(kx)(ky)} - \sin 2ky$

$$= k\sqrt{xy} - \sin 2ky$$

$$\neq k\,(\sqrt{xy} - \sin 2y)$$

ดังนั้น g(x,y) ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

นิยาม สมการ $M(x , y)\, dx + N(x , y)\, dy = 0$ เรียกว่า สมการเอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ M(x , y) และ N(x , y) เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน

ตัวอย่าง 2 $y\, dx + (\sqrt{xy} - x)\, dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ เพราะว่า $M(x , y) = y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 1 และ $N(x , y) = \sqrt{xy} - x$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 1

ตัวอย่าง 3 $(x^2 + y^2)\, dx + (x^3 - 2xy^2)\, dy = 0$ ไม่เป็นสมการเอกพันธ์เพราะว่า

$M(x , y) = x^2 + y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2

$N(x , y) = x^3 - 2xy^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 3

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

สมการเอกพันธ์ $M(x , y)\, dx + N(x , y)\, dy = 0$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่ ให้ $y = vx$ v เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$dy = v\, dx + x\, dv$$

แทนค่า y และ dy ในสมการแล้วจะได้สมการแบบแยกตัวแปรได้

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y\,dx + (\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

แทนค่า $vx\,dx + (x\sqrt{v} - x)(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$xv\sqrt{v}\,dx + x^2(\sqrt{v} - 1)\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(\sqrt{v} - 1)}{v\sqrt{v}}\,dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v\sqrt{v}} = c_1$$

$$\ln|x| + \ln|v| - (-2)\,v^{-1/2} = c_1$$

$$\frac{2}{\sqrt{v}} = -\ln vxc$$

$$vxc = e^{-2/\sqrt{v}}$$

$$cy = e^{-2/\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$y = Ae^{-2\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(4x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

แทนค่า $(4x - vx)\,dx + (x + vx)(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$x(4 + v^2)\,dx + x^2(1 + v)\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 + v)}{4 + v^2}\,dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1}{v^2+4}\,dv + \int \frac{v}{v^2+4}\,dv = c_1$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\ln(v^2+4) = c_1$$

$$2\ln|x| + \arctan\frac{y}{2x} + \ln\frac{(y^2+4x^2)}{x^2} = c$$

$$\arctan\frac{y}{2x} + \ln(4x^2+y^2) = c$$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(x^3 + y^3)\,dx + xy^2 dy = 0$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

แทนค่า $(x^3 + v^3x^3)\,dx + x(v^2x^2)(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$(x^3 + 2x^3v^3)\,dx + v^2x^4 dv = 0$$

$$x^3(1 + 2v^3)\,dx + v^2x^4\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2}{1+2v^3}\,dv = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{6}\ln(1 + 2v^3) = c_1$$

$$\ln x^6 + \ln(1 + 2v^3) = \ln c$$

$$\ln x^6\left(\frac{1+2y^3}{x^3}\right) = c$$

$$x^6 + 2x^3y^3 = c$$

สมการเชิงเส้นไม่เป็นเอกพันธ์

สมการเชิงเส้นแต่ไม่เป็นเอกพันธ์อยู่ในรูป

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$$

เมื่อ a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 เป็นค่าคงตัว โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่จะเปลี่ยนสมการ

การหาผลเฉลยของสมการมี 2 กรณี

กรณี 1 ถ้า $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ให้ $x = X + h$

$y = Y + k$

เมื่อ h , k คล้องตามสมการ

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

แทนค่า x , y ในสมการ จะได้สมการเอกพันธ์

$$(a_1X + b_1Y)\, dX + (a_2X + b_2Y)\, dY = 0$$

ใช้วิธีหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ในตัวแปร X,Y แล้ว จึงแทนค่า $X = x-h$, $Y = y-k$

กรณี 2 ถ้า $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$

ให้ $Y = a_1x + b_1y$ จะได้ $\frac{dY}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$

หรือให้ $Y = a_2x + b_2y$ จะได้ $\frac{dY}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}$

หา $\frac{dy}{dx}$ ในเทอมของ $\frac{dY}{dx}$ แล้วแทนในสมการ จะได้สมการแบบแยกตัวแปรได้

ตัวอย่าง 7 จงหาผลเฉลยของ

$$(x + 2y - 5)\, dx - (2x + y - 4)\, dy = 0$$

วิธีทำ เทียบกับสมการ

$$(a_1x + b_1y + c_1)\, dx + (a_2x + b_2y + c_2)\, dy = 0$$

จาก $(x + 2y - 5)\, dx + (-2x - y + 4)\, dy = 0$

ในที่นี้ $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = -2$, $b_2 = -1$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

ให้ $x = X + h$, $y = Y + k$

เมื่อ h , k คล้องตามสมการ

$$h + 2k - 5 = 0$$

$$-2h - k + 4 = 0$$

แก้สมการจะได้ h = 1 , k = 2

ดังนั้น x = X + 1 , y = Y + 2

แทน x , y ในสมการจะได้

$$(X + 2Y)\,dX + (-2X - Y)\,dY = 0$$

ให้ $Y = VX$

$$dY = VdX + XdV$$

$$(X + 2VX)\,dX + (-2X - VX)(VdX + XdV) = 0$$

$$X(1-V^2)dX - X^2(V+2)dV = 0$$

$$\frac{dX}{X} - \frac{(V+2)}{1-V^2}dV = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{(V+2)}{(1-V)(V+1)}dV = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \left(\frac{3}{2(V-1)} - \frac{1}{2(V+1)}\right)dV = 0$$

$$\int \frac{dX}{X} + \frac{3}{2}\int \frac{d(V-1)}{V-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(V+1)}{V+1} = c_1$$

$$\ln|X| + \frac{3}{2}\ln|V - 1| - \frac{1}{2}\ln|V + 1| = c_1$$

$$2\ln|X| + 3\ln|V - 1| - \ln|V + 1| = c$$

$$\ln\left|\frac{X^2(V-1)^3}{V+1}\right| = c$$

$$\frac{X^2\left(\frac{Y}{X}-1\right)^3}{\left(\frac{Y}{X}+1\right)} = c$$

$$\frac{(Y-X)^3}{(Y+X)} = c$$

$$(y - x - 1)^3 = cy + x - 3$$

$$(x - y - 1)^3 + c(x + y - 3) = 0$$

ตัวอย่าง 8 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(x + 2y + 3)\,dx + (2x + 4y - 1)\,dy = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$

และ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

ให้ $Y = x + 2y$

$dY = dx + 2dy$

$dy = \frac{dY - dx}{2}$

แทนค่าในสมการ

$$(Y + 3)\,dx + (2Y - 1)\left(\frac{dY - dx}{2}\right) = 0$$

$$7dx + (2Y - 1)\,dY$$

$$7x + Y^2 - Y = c$$

$$7x + (x + 2y)^2 + (x + 2y) = c$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 2y = c$$

แบบฝึกหัด 4.3

จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$
2. $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = e^{y/x} + \frac{y}{x}$
4. $(x - y)\,dx + (x + 9y)\,dy = 0$
5. $(x^3 + y^3\,dx - 3xy^2\,dy = 0$
6. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}\,)\,dx - x\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$
7. $(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 6$

8. $(x - y - 1)\,dx + (x + 4y - 1)\,dy = 0$

9. $(3x - 7y + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$

10. $(3x - y + 1)\,dx - (6x - 2y - 3)\,dy = 0$

11. $(3x - y - 6)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = -2$

12. $(2x + 3y + 1)\,dx + (4x + 6y + 1)\,dy = 0$

4.5 สมการแบบแม่นตรง (Exact equations)

นิยาม สมการ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $u(x, y)$ ซึ่ง $du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$

ตัวอย่าง 1 สมการ $2xy\,dx + x^2 dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง

เพราะว่าถ้าให้ $u(x, y) = x^2 y$

จะเห็นว่า
$$\begin{aligned} du(x, y) &= d(x^2 y) \\ &= 2xy\,dx + x^2\,dy \end{aligned}$$

ผลเฉลยของสมการคือ $\int du(x,y) = c$

นั่นคือ $u(x, y) = x^2 y = c$

ในการตรวจสอบว่าสมการใดเป็นสมการแบบแม่นตรงจะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สมการ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรงก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $M(x, y)\,dy + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง โดยนิยามมีฟังก์ชัน $u(x, y)$ ซึ่ง

$$du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

แต่ du(x , y) = $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\,dy$

ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = M(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = N(x,y)$

และ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

แต่ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

กำหนดให้ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ จะแสดงว่า M(x , y) dx + N(x , y) dy = 0 เป็นสมการแบบแม่นตรง นั่นคือจะหา u(x , y) ซึ่ง $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ และ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$

การหา u(x , y) คล้องกับสมการ $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ หรือ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ สมการใดสมการหนึ่งทำได้ไม่ยาก แต่ในการหา u(x,y) ให้คล้องตามสองสมการ จะสมมติว่า มี u(x,y) ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y)$$

จะได้ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\partial x + \frac{d\phi}{dy}$

เราต้องการ $N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ ด้วย

ดังนั้น $N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\partial x + \frac{d\phi}{dy}$

หรือ $\frac{d\phi}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\partial x$

เนื่องจาก $\phi(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ดังนั้น $\frac{d\phi}{dy}$ เป็นฟังก์ชันไม่ขึ้นอยู่กับ x

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int_a^x M(x,y)\partial x] \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M\partial x$$

$$= \quad \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M\partial x$$

$$= \quad \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

นั่นคือ $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x$ ไม่ขึ้นอยู่กับ x

ให้ $\phi(y) = \int (N-\int \frac{\partial M}{\partial y}\partial x)\, dx$

แทนค่า $\phi(y)$ จะได้ u(x,y)

$$u(x,y) = \int M\partial x + \int (N-\int \frac{\partial M}{\partial y}\partial x)\, dy$$

ซึ่ง u(x,y) จะคล้องตาม $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ และ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$

ตัวอย่าง 2 จงตรวจสอบว่าสมการต่อไปนี้ สมการใดเป็นสมการแบบแม่นตรง

1) $2xy\, dx + x^2 dy = 0$

2) $(x + e^y)\, dx - xe^y dy = 0$

3) $(3x^2 + y \cos x)\, dx + (\sin x - 4y^3)\, dy = 0$

วิธีทำ 1) ในที่นี้ $M(x , y) = 2xy$

$N(x,y) = x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการ (1) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2) ในที่นี้ $M(x , y) = x + e^y$

$N(x , y) = -xe^y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \quad = \ -e^{y}$$

ดังนั้นสมการ (2) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

3) ในที่นี้ $M(x\ ,\ y) \ = \ 3x^2 + y\cos x$

$$N(x\ ,\ y) \ = \ \sin x - 4y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

การผลเฉลยของสมการแบบแม่นตรง ทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 โดยการจัดกลุ่มของตัวแปร เพื่อหาผลปริพันธ์ได้ทันที เนื่องจาก ถ้าสมการ $M(x\ ,\ y)dx + N(x\ ,\ y)\ dy \ = \ 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว จะมี $u(x\ ,\ y)$ ซึ่ง

$$du(x\ ,\ y) \ = \ M(x\ ,\ y)\ dx + N(x\ ,\ y)\ dy$$

เช่น $2xy\ dx + (x^2 - y)\ dy \ = \ 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง

$$(2xy\ dx + x^2dy) - y\ dy \ = \ 0$$

$$d(x^2y) - y\ dy \ = \ 0$$

หรือ

$$d(x^2y - \frac{y^2}{2}) \ = \ 0$$

$$x^2y - \frac{y^2}{2} \ = \ c$$

วิธีที่ 2 ใช้นิยามสมการแม่นตรงหา ถ้า $M(x\ ,\ y)\ dx + N(x\ ,\ y)\ dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง จะมี $u(x\ ,\ y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ = \ M(x,y) \ \text{ และ } \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

จะได้ $u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y)$ แล้วหา $\frac{\partial u}{\partial y}$ ให้เท่ากับ $N(x,y)$

หา $\phi(y)$ ได้ เช่น ตัวอย่างเดิมที่ใช้วิธีที่ 1 แล้ว

$2xy\ dx + (x^2 - y)\ dy \ = \ 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง

ดังนั้นจะมี $u(x,y)$ ซึ่ง $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = 2xy$ .... $\leftarrow$

และ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x , y) = x^2 - y$ .... $\uparrow$

จาก $\leftarrow$ จะได้ $u(x,y) = \int M\partial x + \phi(y)$

$$= \int 2xy\partial x + \phi(y)$$

$$= x^2y + \phi(y)$$

แล้วหา $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y + \phi(y))$

$$= x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

ซึ่งจะเท่ากับสมการ $\uparrow$

$$x^2 - y = x^2 + \frac{d\phi}{dy}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -y$$

$$\phi(y) = \int -y dy = -\frac{y^2}{2} + c_0$$

$$u(x,y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + c_0$$

ผลเฉลยของสมการคือ $u(x , y) = c_1$

$$x^2y - \frac{y^2}{2} + c_0 = c_1$$

$$x^2y - \frac{y^2}{2} = c$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของ $(y \cos xy + 1)\, dx + x \cos xy\, dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x , y) = y \cos xy + 1$

$$N(x , y) = x \cos xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos xy - xy \sin xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง

วิธีทำ โดยการจัดกลุ่มเทอม

$$(y\cos xy + 1)\,dy + x\cos xy\,dy = 0$$

$$(y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy) + dx = 0$$

$$\cos xy(y\,dx + x\,dy) + dx = 0$$

$$\cos xy\,d(xy) + dx = 0$$

หาปริพันธ์จะได้

$$\int \cos xy\,d(xy) + \int dx = c$$

$$\sin xy + x = c$$

วิธีที่ 2 จะหา u(x , y) ซึ่ง $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = y\cos xy + 1$

และ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = x\cos xy$

จาก $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\cos xy + 1$

$$u(x, y) = \int (y\cos xy + 1)\partial x + \phi(y)$$

$$= \int \cos xy\,\partial(xy) + \int \partial x + \phi(y)$$

$$= \sin xy + x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos xy + \frac{d\phi}{dy}$$

$$x\cos xy + \frac{d\phi}{dy} = x\cos xy$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 0$$

$$\phi(y) = c_0$$

$$u(x,y) = \sin xy + x + c_0$$

ผลเฉลยคือ $u(x, y) = c_1$

$$\sin xy + x + c_0 = c_1$$

$$\sin xy + x = c$$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของ $(x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$(2xy + 2y^2e^{2x})\,dx + (x^2 + 2ye^{2x})\,dy = 0$$

ในที่นี้ $M(x,y) = 2xy + 2y^2e^{2x}$

$$N(x,y) = x^2 + 2ye^{2x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 4ye^{2x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

สมการนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง

วิธีที่ 1 โดยการจัดกลุ่มเทอม

$$(2xy\,dx + x^2dy) + (2y^2e^{2x}dx + 2ye^{2x}dy) = 0$$

$$d(x^2y) + d(e^{2x}y^2) = 0$$

$$\int d(x^2y) + \int d(e^{2x}y^2) = c$$

$$x^2y + e^{2x}y^2 = c$$

วิธีที่ 2 เนื่องจากเป็นสมการแบบแม่นตรง มี $u(x, y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 2ye^{2x}$$

$$u(x, y) = \int (2xy + 2ye^{2x})\partial x + \phi(y)$$

$$= x^2y + ye^{2x} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + e^{2x} + \frac{d\phi}{dy} = x^2 + 2ye^{2x}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 2ye^{2x} - e^{2x}$$

$$\phi(y) = y^2e^{2x} - e^{2x}y$$

แทนค่า $\phi(y)$

$$u(x,y) = x^2y + ye^{2x} + y^2e^{2x} - ye^{2x}$$

$= x^2y + y^2e^{2x}$

ผลเฉลยคือ $x^2y + y^2e^{2x} = c$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของ

$(2x\cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(0) = 3$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = 2x\cos y + 3x^2y$

$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

สมการนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง

วิธีทำ โดยการจัดกลุ่มเทอม

$(2x\cos y\,dx - x^2\sin y\,dy) + (3x^2y\,dx + x^3dy) - 2y\,dy = 0$

$d(x^2\cos y) + d(x^3y) - d(y^2) = d(c)$

หาปริพันธ์ตลอดจะได้

$$x^2\cos y + x^3y - y^2 = c$$

เมื่อ $x = 0$, $y = 3$ จะได้ $c = -9$

ผลเฉลยคือ $x^2\cos y + x^3y - y^2 + 9 = 0$

วิธีทำ ให้ $u(x,y)$ คล้องตาม $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ และ $\frac{\partial u}{\partial y} = N$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2y$$

$$u(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2y)\partial x + \phi(y)$$

$$= x^2\cos y + x^3y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi}{dy} = x^3 - x^2\sin y - 2y$$

$$\frac{d\phi}{dy} = -2y$$

$\phi(y) = -y^2$

$u(x,y) = x^2\cos y + x^3y - y^2 = c$

เมื่อ $x = 0$, $y = 3$ จะได้ $c = -9$

ผลเฉลยคือ $x^2\cos y + x^3y - y^2 + 9 = 0$

แบบฝึกหัด 4.4

จงตรวจสอบว่าสมการใดต่อไปนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง และจงหาผลเฉลยของสมการแบบแม่นตรงด้วย

1. $(x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy = 0$
2. $(3x^2y + 1)\,dx - (x^3 + y)\,dy = 0$
3. $(x - 2xy - 3)\,dx - (x^2 + 3y - 1)\,dy = 0$
4. $(ye^{-x} - \sin x)\,dx - (e^{-x} + 2y)\,dy = 0$
5. $(2xy^4 + \sin y)\,dx + (4x^2y^3 + x\cos y)\,dy = 0$
6. $(y^2e^{xy^2} + 4x^3)\,dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)\,dy = 0$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้

7. $2xy\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0$, $y(1) = -1$
8. $(2xy + e^y)\,dx + (x^2 + xe^y)\,dy = 0$, $y(1) = \ln 2$
9. $\left(\frac{y}{x^2} - 3yx^2\right)dx - \left(x^3 + \cos y + \frac{1}{x}\right)dy = 0$, $y(2) = 0$

4.6 ตัวประกอบปริพันธ์ (Integrating Factors)

สมการ M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0 เมื่อ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ สมการนี้ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง เช่น สมการ 2ydx + xdy = 0 ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง แต่ถ้าคูณสมการด้วย x จะได้สมการ

$$2xy\,dx + x^2 dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแม่นตรง เราเรียกฟังก์ชันที่คูณสมการที่ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้วทำให้สมการใหม่เป็นสมการแบบแม่นตรงว่า ตัวประกอบปริพันธ์

นิยาม ถ้าสมการ $M(x , y)\,dx + N(x , y)\,dy = 0$
ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง แต่มี $\mu(x , y)$ ซึ่ง

$$\mu(x , y)M(x , y)\,dx + \mu(x , y)\,N(x , y)\,dy = 0$$

เป็นสมการแบบแม่นตรง แล้วเรียก $\mu(x , y)$ ว่า **ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ**

การหาตัวประกอบปริพันธ์

สมการ $M(x , y)\,dx + N(x , y)\,dy = 0$ ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง
แต่สมการ $\mu(x , y)M(x , y)\,dx + \mu(x , y)N(x , y)\,dy = 0$ เป็นสมการแบบแม่นตรง

ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y) M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y))$

หรือ $M(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu(x, y)\frac{\partial M}{\partial y} = N(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu(x, y)\frac{\partial N}{\partial x}$

$$\mu(x,y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$$

ในที่นี้จะพิจารณาเมื่อ $\mu(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว หรือฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

กรณี 1 ถ้า μ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{N}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln \mu) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ให้ $f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$$\frac{d}{dx}(\ln \mu) = f(x)$$

$$d(\ln \mu) = f(x)\,dx$$

$$\ln \mu = \int f(x)dx + c$$

$$\mu = ke^{\int f(x)dx}$$

กรณีที่ 2 ถ้า μ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dy}(\ln \mu) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ให้ $g(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

$$\mu = ke^{\int g(y)dy}$$

ทฤษฎีบท สมการ $M(x , y)\, dx + N(x , y)\, dy = 0$ ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ตัวประกอบปริพันธ์ คือ $\mu = e^{\int f(x)dx}$

ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว ตัวประกอบปริพันธ์คือ $\mu = e^{\int g(y)dy}$

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $(2x^2 + y)\, dx + (x^2y - x)\, dy = 0$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x,y) = 2x^2 + y$

$N(x,y) = x^2y - x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$$

สมการนี้ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

พิจารณา
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2y - x}(1 - (2xy - 1))$$
$$= \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)}$$

$$= -\frac{2}{x}$$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

ตัวประกอบปริพันธ์ คือ $\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$

$$= e^{-2\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x|^{-2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

คูณสมการด้วย $\frac{1}{x^2}$

$$(2 + \frac{y}{x^2})\,dx + (y - \frac{1}{x})\,dy = 0$$

สมการนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง เพราะว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(2 + \frac{y}{x^2}) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(y - \frac{1}{x})$$

จัดสมการใหม่

$$2dx + (\frac{y}{x^2}dx - \frac{dy}{x}) + ydy = 0$$

$$d(2x) + d\,(-\frac{y}{x}) + d\,(\frac{y^2}{2}) = d(c)$$

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{y}{x}dx + (y - \ln x)\,dy = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x,y) = \frac{y}{x}$

$$N(x,y) = y - \ln x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \text{แต่} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

พิจารณา $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{x}{y}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{y}$

ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$

คูณสมการด้วย $\frac{1}{y^2}$ จะได้

$$\frac{1}{xy}dx + (\frac{1}{y} - \frac{\ln x}{y^2})\,dy = 0$$

$$(\frac{1}{xy}dx - \frac{\ln x}{y^2}dy) + \frac{1}{y}dy = 0$$

$$d(\frac{\ln x}{y}) + d(\ln y) = d(c)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\frac{\ln x}{y} + \ln y = c$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = e^{2x} + y - 1$

วิธีทำ จัดสมการ $(e^{2x} + y - 1)\,dx - dy = 0$

$M(x,y) = e^{2x} + y - 1$

$N(x,y) = -1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

พิจารณา $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-1}(1 - 0) = -1$

ตัวประกอบปริพันธ์ คือ $e^{\int -dx} = e^{-x}$

คูณสมการด้วย e^{-x}

$$(e^{x} + ye^{-x} - e^{-x})\,dx - e^{-x}dy = 0$$

$$e^{x}dx + (ye^{-x}dx - e^{-x}dy) - e^{-x}dx = 0$$

$$d(e^{z}) + d(-ye^{-x}) + d(e^{-x}) = dc$$

$$e^{x} - ye^{-x} + e^{-x} = c$$

ในการหาตัวประกอบปริพันธ์ อาจจะใช้วิธีสังเกตกลุ่มเทอม โดยการจัดกลุ่มเทอม

<u>กลุ่มเทอม</u>	<u>ตัวประกอบปริพันธ์</u>	<u>อนุพันธ์แบบแม่นตรง</u>
x dy – y dx	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
x dy – y dx	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{-(ydx - xdy)}{y^2} = -d(\frac{x}{y})$
x dy – y dx	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\ (\ln\frac{y}{x})$
x dy – y dx	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\ (\arctan\frac{y}{x})$
x dy + y dx	$\frac{1}{(xy)^n}$	$\begin{cases} d[\ln(xy)] , & n = 1 \\ d[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}] , & n \neq 1 \end{cases}$
x dx + y dy	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$	$\begin{cases} d[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)] , & n = 1 \\ d[\frac{1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}], & n \neq 1 \end{cases}$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการ $x\,dy - y\,dx + (1 - x^2)\,dx = 0$

วิธีทำ ในสมการนี้มีกลุ่มเทอม $x\,dy - y\,dx$ ดังนั้นควรคูณสมการด้วย $\frac{1}{x^2}$ เนื่องจากเทอมที่เหลือคือ $(1 - x^2)\,dx$

$$\frac{(xdy - ydx)}{x^2} + \frac{(1 - x^2)}{x^2}dx = 0$$

$$d(\frac{y}{x}) + \frac{dx}{x^2} - dx = 0$$

$$d(\frac{y}{x}) - d(\frac{1}{x}) - dx = 0$$

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{x} - x \qquad = c$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการ $y\,dx + x(1 - 2x^2y^2)\,dy = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $(y\,dx + x\,dy) - 2x^3y^2dy = 0$

คูณสมการด้วย $\qquad \dfrac{1}{(xy)^3}$

$$\frac{ydx + xdy}{(xy)^3} - \frac{2}{y}dy = 0$$

$$d[-\frac{1}{2x^2y^2}] - 2\,d(\ln y) = d(c)$$

$$-\frac{1}{2x^2y^2} - 2\ln y = c$$

$$4\ln y = \ln c - \frac{1}{x^2y^2}$$

$$y^4 = ce^{-1/x^2y^2}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการ $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$(x\,dx + y\,dy) - (x\,dy - y\,dx) = 0$$

คูณสมการด้วย $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - \frac{(xdy - ydx)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$d[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)] - d(\arctan\frac{y}{x}) = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x} = c$$

$$\ln(x^2+y^2) = \ln c + 2\arctan\frac{y}{x}$$

$$x^2+y^2 = ce^{2\arctan\frac{y}{x}}$$

แบบฝึกหัด 4.5

จงหาตัวประกอบปริพันธ์แล้วหาผลเฉลยของสมการข้อต่อไปนี้

1. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
2. $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$
3. $(y^2 \cos x - y)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$
4. $(1 - xy)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$
5. $2y\,dx + (3 - x - 2)\,dy = 0$
6. $\frac{y}{x}\,dx + (y - \ln x)\,dy = 0$
7. $(y \cot x - 3e^{\cos x})\,dx + dy = 0$
8. $(\frac{y}{x} + \frac{2}{x})\,dx + (y - \ln x)\,dy = 0$

จงหาผลเฉลยของสมการโดยหาตัวประกอบปริพันธ์ใช้การสังเกตกลุ่มเทอม

9. $x\,dx + y\,dy = (x^2+y^2)dx$
10. $x\,dy - y\,dx = x^2 e^x dx$
11. $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$
12. $(x^3 y - y^2)\,dx - (x^4 + xy)\,dy = 0$
13. $y\,dx + x(1 - 3x^2 y^2)\,dy = 0$

4.7 สมการเชิงเส้น (Linear equations)

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเรียกว่า สมการเชิงเส้น ถ้าจัดอยู่ในรูป

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ วิธีหาผลเฉลยของสมการ ทำโดยจัดสมการใหม่

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$$

จากสมการ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

จะได้ $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$

$N(x,y) = 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x)$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

พิจารณา $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = P(x)$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว ดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์คือ $e^{\int P(x)dx}$ คูณสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์ จะได้

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)ye^{\int P(x)dx} = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx}) = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$$d\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}dx$$

หาปริพันธ์เทียบกับ x

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(x^4 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^3$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$P(x) = -\frac{2}{x}, \quad Q(x) = x^3$$

ตัวประกอบปริพันธ์คือ $e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$

$$= e^{-2\ln x}$$

$$= e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

คูณสมการด้วย $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = x$$

$$\frac{1}{x^2}y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^4}{2} + cx^2$$

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x+2}{x}\right)y = e^{-x}$$

วิธีทำ สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$P(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$Q(x) = e^{-x}$$

ตัวประกอบปริพันธ์คือ $e^{\int P(x)dx}$

$$= e^{\int \left(\frac{x+2}{x}\right)dx}$$

$$= e^{\int dx + 2\int \frac{dx}{x}}$$

$$= e^{x+2\ln x}$$

$$= e^{x} \bullet e^{\ln x^{2}} = x^{2}e^{x}$$

คูณสมการด้วย x^2e^x จะได้

$$\frac{d}{dx}(x^2e^xy) = x^2$$

$$x^2e^xy = \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \frac{xe^{-x}}{3} + \frac{ce^{-x}}{x^2}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(\cos^2 x - y\cos x)\, dx + (1 + \sin x)\, dy = 0$$

เมื่อ $y(0) = 3$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x - y\cos x}{1+\sin x}$

$$= \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}y$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\cos x}{1+\sin x}y = \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$e^{\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx} = e^{\int \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}}$$

$$= e^{\ln(1+\sin x)} = 1+\sin x$$

คูณสมการด้วย (1 + sin x)

$$\frac{d}{dx}((1+\sin x)y) = \cos^2 x$$

$$(1+\sin x)y = \int \cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{2}+C$$

$$= \frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{x}{2}+C$$

$$2(1+\sin x)y = \sin x\cos x + x + C$$

แทนค่า $y(0) = 3$

$$(2)(3) = C$$

ผลเฉลยคือ

$$2(1+\sin x)y = \sin x\cos x + x + 6$$

สมการแบร์นูลลี (Bernoulli Equation)

สมการแบร์นูลลี เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้เป็นสมการเชิงเส้นได้

นิยาม สมการในรูป

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เรียกว่า สมการแบร์นูลลี

ถ้า n = 0 จะได้สมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)$$

ถ้า n = 1 จะได้

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)y$$

หรือ $\frac{dy}{dx}+(P(x)-Q(x)) = 0$

ซึ่งหาผลเฉลยโดยการแยกตัวแปรได้

ถ้า $n \neq 1$ จากสมการจะได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$$

สมมุติตัวแปรใหม่ ให้ $v = y^{1-n}$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

แทนค่าในสมการ

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P(x)v = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

ให้ $P_1(x) = (1-n)P(x)$

$Q_1(x) = (1-n)Q(x)$

จะได้สมการเชิงเส้น

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{x}{y}$$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} - y = xy^{-1}$

เทียบกับสมการ $\frac{dy}{dx}+P(x)y = Q(x)y^n$

ในที่นี้ $n = -1$

ดังนั้นให้ $v = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$

หรืออาจจะจัดสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูป

$$y\frac{dy}{dx} - y^2 = x$$

แล้วให้ $v = y^2$

$$\frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

แทนค่าในสมการจะได้

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - v = x$$

$$\frac{dv}{dx} - 2v = 2x$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นตัวประกอบปริพันธ์ คือ e^{-2x}

คูณสมการด้วย e^{-2x}

$$\frac{d}{dx}(e^{-2x}v) = 2xe^{-2x}$$

$$e^{-2x}v = 2\int xe^{-2x}dx$$

$$= 2\left(-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right) + C$$

$$v(x) = -x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

$$y^2 = -x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของ

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2e^{2x}$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = e^{2x}$$

ให้ $v = y^{-1}$

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dv}{dx}$$

แทนค่าจะได้

$$-\frac{dv}{dx} + v = e^{2x}$$

$$\frac{dv}{dx} - v = -e^{2x}$$

ตัวประกอบปริพันธ์ คือ e^{-x} คูณสมการด้วย e^{-x}

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}v) = -e^{x}$$

$$e^{-x}v = -\int e^{x}dx$$

$$= e^{x}+C$$

$$v(x) = e^{2x} + Ce^{x}$$

$$y = \frac{1}{e^{2x}+Ce^{x}}$$

แบบฝึกหัด 4.6

จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
2. $x^4\frac{dy}{dx} + 2x^3y = 1$
3. $x^3\frac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)y = x^3$
4. $\frac{dy}{dx} + (\tan x)\, y = \cos x$
5. $y' = x^3 - 2xy$
6. $y' - 6x = 10 \sin 2x$
7. $y' + y = y^2e^x$
8. $y' - 2y \cot 2x = 1 - 2x \cot 2x - 2\operatorname{cosec} 2x$
9. $y' - y = xy^3$
10. $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้

11. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$

12. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$, $y(1) = 2$

4.8 การประยุกต์ทางเคมี

การประยุกต์ทางเคมีของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งนั้น ส่วนใหญ่เป็นเรื่องสารผสม การทำปฏิกิริยาของสารเคมีสองชนิด การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 ถังบรรจุน้ำเกลือขนาด 100 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 100 ปอนด์ ปล่อยน้ำเข้าถังด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที คนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังในอัตราเดียวกัน จงหาปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ หลังจาก 1 ชั่วโมง ผ่านไปจะมีเกลือเหลืออยู่เท่าใด

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณของเกลือในถังเมื่อเวลา t

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเกลือ = $\frac{dx}{dt}$

= อัตราของเกลือเข้าถัง - อัตราของเกลือออกจากถัง

อัตราของเกลือเข้าถัง = 0 ปอนด์/นาที

อัตราของเกลือออกจากถัง $= \left(\frac{x \text{ ปอนด์}}{100 \text{ แกลลอน}}\right)\left(\frac{5 \text{ แกลลอน}}{1 \text{ นาที}}\right)$

$= \frac{x}{20}$ ปอนด์ / นาที

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{x}{20}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{20}$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{20} + \ln c$$

เมื่อ $t = 0$, $x = 100$

$$\ln 100 = \ln c$$

$$c = 100$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{20} + \ln 100$$

$$\ln|x| - \ln 100 = -\frac{t}{20}$$

$$\ln\frac{x}{100} = -\frac{t}{20}$$

$$\frac{x}{100} = e^{-t/20}$$

ดังนั้นปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ $x(t) = 100e^{-t/20}$

เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง $t = 60$ นาที ปริมาณเกลือคือ

$$x(60) = 100e^{-60/20}$$

$$= 100e^{-3} \simeq 100\,(0.4979)$$

ปริมาณเกลือเหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง 49.8 ปอนด์

ตัวอย่าง 2 ถังบรรจุน้ำเกลือขนาด 50 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 5 ปอนด์ ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีเกลือแกลลอนละ 3 ปอนด์ ลงในถังด้วยอัตราเร็ว 2 แกลลอนต่อนาที คนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังในอัตราเดียวกัน จงหาปริมาณของเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ และจงหาว่ามีเกลือเหลืออยู่ในถังเท่าใด เมื่อเวลานานพอสมควร

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณของเกลือในถังเมื่อเวลา t

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเกลือ = $\frac{dx}{dt}$

= อัตราของเกลือเข้าถัง - อัตราของเกลือออกจากถัง

อัตราของเกลือเข้าถัง = (3 ปอนด์ / แกลลอน) (2 แกลลอน/นาที)

= 6 ปอนด์ / นาที

อัตราของเกลือออกจากถัง $= \left(\frac{x \text{ ปอนด์}}{50 \text{ แกลลอน}}\right)\left(\frac{2 \text{ แกลลอน}}{1 \text{ นาที}}\right)$

$= \frac{x}{25}$ ปอนด์ / นาที

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{x}{25} = \frac{150 - x}{25}$$

$$\frac{dx}{150 - x} = \frac{dt}{25}$$

$$\int \frac{dx}{150 - x} = \int \frac{dt}{25}$$

$$-\ln(150 - x) = \frac{t}{25} + \ln c_1$$

$$\ln(150 - x) = -\frac{t}{25} + \ln c$$

เมื่อ $t = 0$, $x = 5$

$$\ln 145 = \ln c$$

$$c = 145$$

$$\ln(150 - x) = -\frac{t}{25} + \ln 145$$

$$\ln \frac{(150 - x)}{145} = -\frac{t}{25}$$

$$\frac{150 - x}{145} = e^{-t/25}$$

$$x(t) = 150 - 145e^{-t/25}$$

ดังนั้นปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ คือ $x(t) = 150 - 145e^{-t/25}$

เมื่อเวลานานพอสมควร คือ เมื่อ $t \to \infty$

นั่นคือ $e^{-t/25} \to 0$

จะมีเกลือเหลืออยู่ 150 ปอนด์

ตัวอย่าง 3 ถังน้ำบรรจุน้ำเปล่า 20 แกลลอน ถ้าปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีเกลือละลายอยู่ 1.5 ปอนด์ต่อแกลลอน ลงไปในถังด้วยอัตราเร็ว 2 แกลลอนต่อนาที แล้วคนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังในอัตราเร็ว 3 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ ถ้าเวลาผ่านไป 10 นาที จะมีเกลืออยู่ในถังเท่าใด

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณของเกลือในถังเมื่อเวลา t

$$\frac{dx}{dt} = \text{อัตราของเกลือเข้าถัง} - \text{อัตราของเกลือออกจากถัง}$$

อัตราของเกลือเข้าถัง = (1.5 ปอนด์/แกลลอน)(2 แกลลอน/นาที)

= 3 ปอนด์/นาที

เมื่อเวลา t ให้ปริมาตรของน้ำเกลือในถังคือ v(t)

$$v(t) = 20 + 2t - 3t$$

$$= 20 - t \text{ แกลลอน}$$

ความเข้มข้นของเกลือเมื่อเวลา t = $\frac{x}{v(t)} = \frac{x}{20-t}$ ปอนด์/แกลลอน

อัตราของเกลือออกจากถัง = $(\frac{x}{20-t}$ ปอนด์ / แกลลอน)(3 แกลลอน / นาที)

$$= \frac{3x}{20-t} \text{ ปอนด์/นาที}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 - \frac{3x}{20-t}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{20-t}x = 3$$

สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นตัวประกอบปริพันธ์คือ $e^{\int \frac{3}{20-t}dt}$

$$= e^{-3\ln(20-t)}$$

$$= (20-t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}(x(20-t)^{-3}) = 3(20-t)^{-3}$$

$$x(20-t)^{-3} = \frac{3}{2}(20-t)^{-2} + c$$

$$x(t) = \frac{3}{2}(20-t) + c(20-t)^{3}$$

เมื่อ t = 0 , x = 0 แทนค่าจะได้

$$c = -\frac{3}{800}$$

ดังนั้น $x(t) = \frac{3}{2}(20-t) - \frac{3}{800}(20-t)^{3}$

เมื่อ t = 10 จะมีเหลืออยู่ในถัง

$$x(10) = 15-3.75 = 11.25 \text{ ปอนด์}$$

ตัวอย่าง 4 สารเคมี 2 ชนิด A และ B ทำปฏิกิริยาได้สารเคมีชนิดใหม่ C จากการทดลองพบว่า อัตราการเกิดของ C เป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของปริมาตรสาร A และ B ในขณะนั้น ในปฏิกิริยานี้ต้องใช้สาร A 2 ปอนด์ สำหรับสาร B 1 ปอนด์เสมอ ถ้าในขณะเริ่มต้นมีสาร A 10 ปอนด์และสาร B 20 ปอนด์ เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาทีได้สาร C 6 ปอนด์ จงหาปริมาณของสาร C เมื่อเวลาใดๆ

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณของสาร C เมื่อเวลา t ชั่วโมง

อัตราการเกิดของสาร C คือ $\frac{dx}{dt}$

ในการที่จะได้สาร C x ปอนด์ ใช้สาร A = $\frac{2x}{3}$ ปอนด์ และสาร B = $\frac{x}{3}$ ปอนด์ ดังนั้นในเวลา t ชั่วโมงจะมีสาร A เหลืออยู่ 10 - $\frac{2x}{3}$ ปอนด์ และมีสาร B เหลืออยู่ 0 - $\frac{x}{3}$ ปอนด์ จะสมการ

$$\frac{dx}{dt} \quad \alpha \quad (10-\frac{2x}{3})(20-\frac{x}{3})$$

$$\frac{dx}{dt} = k(10-\frac{2x}{3})(20-\frac{x}{3})$$

$$\frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \frac{2}{9}kdt$$

$$\int\frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \frac{2}{9}k\int dt$$

$$\frac{1}{45}\ln(\frac{60-x}{15-x}) = \frac{2}{9}kt + C_1$$

เมื่อ t = 0 , x = 0 จะได้

$$\frac{1}{45}\ln 4 = C_1$$

แทนค่า C_1

$$\ln(\frac{60-x}{15-x}) = \frac{2}{9}kt + \frac{1}{45}\ln 4$$

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{10kt}$$

เมื่อ $t = \frac{1}{3}$, $x = 6$

$$\frac{54}{9} = 4e^{10k/3}$$

$$e^{10k/3} = \frac{3}{2}$$

แทนค่า

$$\frac{60-x}{15-x} = 4\left(e^{10k/3}\right)^{3t}$$

$$= 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$$

$$x = \frac{15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะได้ $x \rightarrow 15$ ปอนด์

ตัวอย่าง 5 อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสารที่มีอยู่ในขณะนั้น ถ้าครึ่งหนึ่งของปริมาณสารได้ถูกสลายไปภายใน 1500 ปี จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3000 ปี มีสารเหลืออยู่กี่เปอร์เซ็นต์ และเวลานานเท่าใดจึงจะมีสารเหลืออยู่ $\frac{1}{10}$ ของสารเดิม

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณสารที่เหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป t ปี

จะเห็นว่า x มีค่าลดลงเมื่อ t เพิ่มขึ้น

ดังนั้น $$\frac{dx}{dt} \propto x$$

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนบวก

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

$$\ln x = -kt + \ln c$$

$$x = c\,e^{-kt}$$

เมื่อ $t = 0$ ให้ปริมาณสารเริ่มต้นเป็น x_0

$$x_0 = c$$

จะได้ $x = x_0 e^{-kt}$

เมื่อ $t = 1500$, $x = \frac{x_0}{2}$ แทนค่า

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-1500k}$$

$$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1500}}$$

$$x = x_0 (e^{-k})^{t} = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1500}}$$

เมื่อ $t = 3000$ จะได้

$$x = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3000}{1500}} = \frac{x_0}{4}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 3000 ปี มีสารเหลืออยู่ $\frac{1}{4}$ ของสารเริ่มต้นคิดเป็นเปอร์เซนต์ = $\frac{1}{4}\times 100$ = 25%

ถ้า $x = \frac{1}{10}x_0$ จะหา t

$$\frac{1}{10}x_0 = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1500}}$$

$$\frac{t}{1500} = \frac{\ln\frac{1}{10}}{\ln\frac{1}{2}}$$

$$t = 1500\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 4983$$

ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป 4983 ปี จะมีสารเหลืออยู่ $\frac{1}{10}$ ของสารเดิม

ตัวอย่าง 6 อัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสารที่มีอยู่ในขณะนั้น ถ้าในเวลา 12 ปี เรเดียมหายไป 0.5 % จงหาจำนวนร้อยละที่เรเดียม

วิธีทำ ให้ x เป็นปริมาณของเรเดียมที่เหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป t ปี

$$\frac{dx}{dt} = -kt$$

$$x = ce^{-kt}$$

เมื่อ t = 0 ให้เรเดียมเหลืออยู่ x_0

$$x_0 = c$$

$$x = x_0e^{-kt}$$

เมื่อ t = 12 เรเดียมหายไป 0.5% $= \frac{0.5}{100}x_0$

$$= 0.005x_0$$

ดังนั้นเรเดียมเหลืออยู่ $x = x_0 - 0.005x_0$

$$= 0.995x_0$$

แทนค่า $0.995x_0 = x_0e^{-12k}$

$$e^{-k} = (0.995)^{1/12}$$

$$x = x_0(e^{-k})^{t}$$

$$= x_0(0.995)^{t/12}$$

เมื่อ t = 1000

$$x = x_0(0.995)^{1000/12}$$

$$\simeq 0.658x_0$$

ดังนั้นเรเดียมหายไป $x_0 - 0.658x_0 = 0.342x_0$

คิดเป็นร้อยละ 34.2 ของสารเดิม

ในเวลา 1000 ปี เรเดียมหายไป 34.2 %

การประยุกต์ด้านอื่น

การเจริญเติบโตของสิ่งมีชีวิต

ในที่นี้ สิ่งมีชีวิตที่เกี่ยวข้องเป็นสิ่งมีชีวิตที่มีจำนวนมากๆ เช่น การเจริญเติบโตของเชื้อโรค ประชากร เป็นต้น

ตัวอย่าง 1 แบคทีเรียชนิดหนึ่งมีอัตราการเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่ปรากฏในขณะนั้น ถ้าจำนวนแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า ในเวลา 2 ชั่วโมง จงหาเวลาที่จำนวนแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็น 50 เท่าของจำนวนเริ่มแรก

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลา t ชั่วโมง

x_0 เป็นจำนวนแบคทีเรียเมื่อเริ่มแรก

$$\frac{dx}{dt} \;\alpha\; x$$

x เพิ่มขึ้นเมื่อ t เพิ่มขึ้น ดังนั้นจะได้

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad , \quad k > 0$$

$$x = ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0$, $x = x_0$

$$c = x_0$$

$$x = x_0 e^{kt}$$

เมื่อ $t = 2$, $x = 3x_0$

แทนค่า $3x_0 = x_0 e^{2k}$

$$2k = \ln 3$$

$$k = \frac{\ln 3}{2}$$

จงหา t เมื่อ $x = 50x_0$

$$50x_0 = x_0 e^{(\frac{\ln 3}{2})t}$$

$$\frac{t}{2}\ln 3 = \ln 50$$

$$t = 2(\frac{\ln 50}{\ln 3}) = 7$$

เวลาผ่านไป 7 ชั่วโมง แบคทีเรียจะเพิ่มเป็น 50 เท่า ของจำนวนเริ่มแรก

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

กฎการเย็นตัวของนิวตันคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุที่กำลังเย็นตัวลงจะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิวัตถุกับอุณหภูมิคงที่โดยรอบ

ให้ x เป็นอุณหภูมิของวัตถุเมื่อเวลา t

x_0 เป็นอุณหภูมิคงที่โดยรอบ

$$\frac{dx}{dt} \;\alpha\; (x - x_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = k(x - x_0)$$

ตัวอย่าง 2 วัตถุมีอุณหภูมิเริ่มต้น 100° C ปล่อยให้เย็นลงในที่ที่อุณหภูมิคงที่ 20° C เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อุณหภูมิของวัตถุลดลงเหลือ 40°C จงหาอุณหภูมิของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ

วิธีทำ จากสมการ $\frac{dx}{dt} = k(x - x_0)$

$$\frac{dx}{dt} = k(x - 20)$$

$$\frac{dx}{x-20} = kdt$$

$$\ln (x - 20) = kt + \ln c$$

$$x - 20 = c\,e^{kt}$$

$$x = 20 + ce^{kt}$$

เมื่อ $t = 0$, $x = 100$

$$100 = 20 + c$$

$$c = 80$$

$$x = 20 + 80e^{kt}$$

เมื่อ $t = 10$, $x = 40$

$$40 = 20 + 80e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{1}{4}$$

$$10k = -\ln 4 = -1.386$$

$$k = -0.1386$$

$$\text{ดังนั้น } x(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$$

แบบฝึกหัด 4.7

1. ถังบรรจุน้ำเกลือขนาด 50 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 5 ปอนด์ ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีเกลือแกลลอนละ 2 ปอนด์ ลงในถัง ด้วย อัตราเร็ว 3 แกลลอนต่อนาที คนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังในอัตราเดียวกัน จงหา

   1.1 ปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลา t ใดๆ

   1.2 จะมีเกลือเหลืออยู่ในถังเท่าใด เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาที

   1.3 จะมีเกลือเหลืออยู่ในถังเท่าใด เมื่อเวลานานพอสมควร

2. ถังบรรจุน้ำเกลือขนาด 100 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 40 ปอนด์ ปล่อยน้ำเข้าถังด้วยอัตราเร็ว 2 แกลลอนต่อนาที คนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังในอัตราเดียวกัน จงหาปริมาณเกลือในถังเมื่อเวล t ใดๆ ใช้เวลานานเท่าใดความเข้มข้นของเกลือจะเหลือ 0.2 ปอนด์ ต่อแกลลอน

3. ถังบรรจุน้ำเกลือขนาด 100 แกลลอน มีเกลือละลายอยู่ 10 ปอนด์ ปล่อยน้ำเปล่าเข้าถังด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอน ต่อนาทีคนส่วนผสมให้เข้ากันแล้วปล่อยน้ำเกลือออกจากถังด้วยอัตราเร็ว 2 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณเกลือในถังเมื่อเวลาผ่านไป 15 นาที

4. สารเคมีสองชนิด A และ B ทำปฏิกิริยาได้สารเคมีชนิดใหม่ C ถ้าอัตราการเกิดของ C เป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของปริมาณสาร A และ B ในขณะนั้น ในการทำปฏิกิริยานี้ต้องใช้สาร A 3 ปอนด์ สำหรับสาร B 2 ปอนด์ เสมอ ถ้าในขณะเริ่มต้นมีสาร A 60 ปอนด์ และสาร B 60 ปอนด์ เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง ได้สาร C 15 ปอนด์ จงหาปริมาณของสาร C เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง ได้สาร C 15 ปอนด์ จงหาปริมาณของสาร C เมื่อเวลา t ใดๆ และจงหาปริมาณของสาร C เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง

5. อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสารที่มีอยู่ในขณะนั้น ถ้าครึ่งหนึ่งของสารถูกสลายตัวไปในเวลา 1500 ปี จงหาเปอร์เซนต์ของสารเริ่มต้นที่เหลืออยู่หลังเวลาผ่านไป 4500 ปี

6. อัตราการสลายตัวของเรเดียมเป็นสัดส่วนกับปริมาณของเรเดียมในขณะนั้น ถ้าในเวลา 10 ปี เรเดียมหายไป 0.75 % จงหาว่านานเท่าใดจึงจะมีสารเรเดียมเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของสารเริ่มต้น

7. จำนวนประชากรมีอัตราการเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรขณะนั้น ถ้าจำนวนประชากร เพิ่มเป็น 3 เท่าในเวลา 50 ปี จงหาว่าใช้เวลานานเท่าใดจำนวนประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 5 เท่า

8. ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียชนิดหนึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง แบคทีเรียชนิดนี้มีจำนวน 10^4 เมื่อเวลาผ่านไป 5 ชั่วโมง มีจำนวนแบคทีเรีย $4 \cdot 10^4$ จงหาจำนวนแบคทีเรียตอนเริ่มแรก

9. นำเทอร์โมมิเตอร์ซึ่งวัดอุณหภูมิได้ 70° F ออกไปวางไว้นอกห้อง ซึ่งมีอุณหภูมิ 10°F เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{1}{2}$ นาที อ่านอุณหภูมิได้ 50°F จงหาอุณหภูมิที่จะอ่านได้เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที